doi：10. 12068/j. issn. 1005－3026. 2026. 20269018

混沌微腔光频梳的排列熵特性

王安帮[1,2,3]，孙 静[1,2,3]，陈文辉[1,2,3]，文 珊[1,2,3]

（1. 广东工业大学 信息工程学院，广东 广州 510006；2. 广东工业大学 通感融合光子技术教育部重点实验室，广东 广州 510006；3. 广东工业大学 广东省信息光子技术重点实验室，广东 广州 510006）

摘 要：为了量化混沌微腔光频梳各通道的信号复杂度，基于归一化Lugiato-Lefever方程仿真氮化硅微环谐振腔，引入排列熵(permutation entropy,PE)作为单通道复杂度指标，并以多通道排列熵的均值和标准差表征光频梳复杂度及通道一致性．分析了典型通道的时序波形、频谱及排列熵曲线，揭示了单通道从弱混沌向强混沌的演化规律，并系统研究了归一化泵浦功率、失谐及品质因子(Q值)对复杂度的影响．结果表明，增大泵浦功率可提升平均排列熵值并使各通道复杂度趋于一致，增大正失谐有利于进一步提升复杂度，高Q值微腔能以更低的泵浦功率达到高复杂度混沌态，但能达到的最大排列熵却稍小于低Q值微腔．本文为混沌光频梳多路并行输出的工作点选取与参数优化提供了定量依据．

关 键 词：混沌光频梳；调制不稳定性；排列熵；复杂度；微环谐振腔

中图分类号：TN 241 **文献标志码：**A **文章编号：**1005-3026(2026)07-0124-08

Permutation Entropy Characteristics of Chaotic Microresonator Optical Frequency Combs

WANG An-bang[1,2,3], *SUN Jing*[1,2,3], *CHEN Wen-hui*[1,2,3], *WEN Shan*[1,2,3]

(1. School of Information Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China; 2. Key Laboratory of Photonic Technology for Integrated Sensing and Communication, Ministry of Education, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China; 3. Guangdong Provincial Key Laboratory of Information Photonics Technology, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China. Corresponding author: WANG An-bang, E-mail: abwang@gdut.edu.cn)

Abstract: To quantify the individual channel signal complexity of chaotic microresonator optical frequency combs, a silicon nitride microring resonator was simulated based on the normalized Lugiato-Lefever equation. Permutation entropy (PE) was introduced as a single-channel complexity index, and the mean and standard deviation of multi-channel permutation entropy were used to characterize the optical frequency comb complexity and channel consistency. The time-domain waveforms, spectra, and permutation entropy curves of typical channels were analyzed; the single-channel evolution law from weak chaos to strong chaos was revealed, and the effects of normalized pump power, detuning, and quality factor (Q value) on complexity were systematically studied. The results indicate that increasing the pump power increases the mean permutation entropy value and makes the individual channel complexity tend to be consistent. Increasing positive detuning is beneficial to further improve the complexity. High-Q microresonators can achieve a high-complexity chaotic state at a lower pump power, but their achievable maximum permutation entropy is slightly smaller than that of low-Q microresonators. This paper provides a quantitative basis for operating point selection and parameter optimization in the multi-channel parallel output of chaotic optical frequency combs.

Key words: chaotic optical frequency comb; modulational instability; permutation entropy; complexity; microring resonator

收稿日期：2026-03-16

基金项目：国家自然科学基金资助项目(62035009,U22A2087)；广东省“珠江人才计划”引进创新创业团队项目(2019ZT08X340).

作者简介：王安帮(1982—),男,安徽宿州人,广东工业大学教授.

通信作者：王安帮,E-mail:abwang@gdut.edu.cn.

近年来，光学混沌在激光雷达[1-2]、保密通信[3-4]、物理密钥分发[5-6]以及物理随机数发生器[7-8]等领域展现出巨大的应用潜力.利用多路低互相关的并行混沌信号，不仅能有效提升混沌保密通信的容量以及物理随机数发生器的吞吐量，也能应用于激光雷达（LiDAR）.因此，在大容量通信和高速并行处理需求的驱动下，多通道并行混沌源成为当前研究热点.

目前，多路并行混沌源主要依赖半导体激光器架构.一类是采用单纵模分布式反馈（distributed feedback，DFB）半导体激光器，通过外部扰动、耦合结构互注入以及片上阵列结合外部调制实现多路并行混沌输出[9-12].另一类是采用多纵模法布里-珀罗（Fabry-Pérot，FP）激光器，利用单个器件的多纵模提供多通道并行载波[13-14].尽管这些方案在带宽提升和通道扩展方面取得了显著进展，但DFB激光器类方案在向更大规模并行扩展时需要阵列化器件和外部调制，从而使系统结构更为复杂.FP激光器类方案则需要使用外部反馈产生混沌，从而引入了额外的反馈回路与器件，并且产生的通道数量少于混沌光频梳.

相比之下，基于微环谐振腔（microring resonator，MRR）的光频梳为大规模并行混沌源提供了更理想的单片集成解决方案.在连续波（continuous-wave，CW）激光器泵浦下，MRR可通过调制不稳定性（modulation instability，MI）状态自发产生混沌光频梳.混沌微腔光频梳在光谱上具有多个波长，各波长具有随机的强度与相位波动.在四波混频过程中，与泵浦对称的波长对之间可能存在相关性；但其余波长间的互相关可保持在较低水平[2,7]，能够直接结合波分复用技术，充当近正交多载波并行混沌源，用于并行LiDAR架构[1-2]和并行熵源驱动的随机数发生器[7].与DFB激光器类方案相比，混沌微腔光频梳天然具有大量通道，有利于使用单个器件实现规模化并行；同时，相比多纵模FP激光器类方案，混沌微腔光频梳无需外部光反馈环路，通道数量更多，有利于系统封装与片上集成，并降低对环境的敏感性.

然而，多路并行混沌源的实际应用不仅要求通道间低相关，更要求尽可能多的通道能同时输出高复杂度混沌信号.不同泵浦功率与失谐条件下的混沌微腔光频梳可能呈现不同的统计特性.在多通道并行应用中，各个通道的信号复杂度将直接决定每个通道的可用随机比特数和并行系统的总体吞吐极限.尽管已有大量工作采用排列熵（permutation entropy，PE）等指标对半导体混沌激光器产生的混沌信号的复杂度进行量化[15-17]，但对于混沌微腔光频梳在不同参数下的复杂度演化仍缺乏深入探讨.

本文使用归一化Lugiato-Lefever方程（LLE），对基于高微腔品质因子（Q值）氮化硅微环谐振腔产生的混沌光频梳开展了系统的复杂度数值研究.引入PE作为核心量化指标，结合多通道PE的均值与标准差，系统探讨了归一化泵浦功率、归一化失谐以及Q值对复杂度的影响，并在归一化泵浦功率-失谐参数空间构建了平均PE热图.这不仅揭示了混沌微腔光频梳单模式由弱混沌向强混沌演化的动力学特征，更为高吞吐随机数生成、并行保密通信与雷达应用中的混沌源参数优化提供了定量依据.

1　理论模型及演化

1.1　Lugiato-Lefever方程

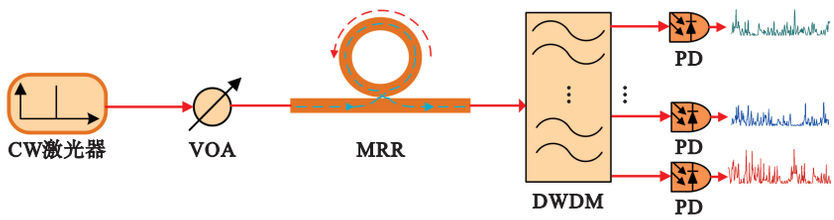
图1描述了本文所使用的微腔光频梳产生装置示意图.该装置主要由CW激光器和氮化硅微环谐振腔组成.CW激光器产生泵浦光，经可变光衰减器（variable optical attenuator，VOA）调节功率后注入微环谐振腔.通过调节CW激光器的失谐量和泵浦功率使微腔产生混沌光频梳，再经过密集波分复用器（dense wavelength division multiplexer，DWDM）滤出光频梳的单个模式作为独立的混沌源.

微腔光频梳的动力学特性可用归一化的LLE来描述[18-19]：

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}=-(1+\mathrm{i}\Delta)\psi+\mathrm{i}\left|\psi\right|^2\psi-\mathrm{i}\frac{D_2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+F. \quad (1)$$

其中：ψ为归一化后的腔内场；t为腔内场演化的归一化慢时间；ϕ为MRR参考系中的快时间；Δ为归一化失谐，在临界耦合假设下$\Delta=\delta_0/\alpha$；F为归一化泵浦幅度，$F=E_{\mathrm{in}}\sqrt{\gamma L\theta/\alpha^3}$；$D_2$为归一化二阶色散系数，$D_2=\beta_2L(2\pi/t_{\mathrm{R}})^2/\alpha$.本文通过引入变换$\psi=E\sqrt{\gamma L/\alpha}$和$t=\alpha T/t_{\mathrm{R}}$对平均场LLE进行归一化处理，$t_{\mathrm{R}}$为环程时间，$\alpha$为腔内总损耗，$L$为微腔周长，$E$为腔内场，$E_{\mathrm{in}}$为泵浦场幅度，$\theta$为功率耦合系数，$T$为平均场LLE的慢时间，$\gamma$为非线性系数，$\delta_0$为相位失谐量.品质因子$Q$为泵浦频率和共振线宽之比，$F^2$为归一化的泵浦功率，本文所用参数取自文献[20]，使用L为757.1 μm的氮化硅

微环谐振腔进行仿真,对应的二阶色散系数β_2为−100 ps²/km,本文仿真中忽略高阶色散,自由光谱范围为200 GHz,泵浦波长为1 558 nm,γ为0.645 W⁻¹·m⁻¹.



PD—光电探测器.

图1 光频梳产生装置示意图

Fig. 1 Schematic diagram of optical frequency comb generation setup

本文采用Q值为1×10⁶的氮化硅微环谐振腔对光频梳的动态特性进行分析.图2描绘了随着归一化失谐增大,微腔输出状态的光谱变化.

光频梳的形成始于对高Q值非线性微环谐振腔的CW泵浦.腔内光功率超过参量振荡阈值后,简并四波混频(degenerate four-wave mixing, DFWM)在泵浦频率两侧产生初级边带,形成主梳,光谱呈离散分布,如图2a所示,Δ=−0.83.随着Δ增大,主梳状态失稳触发调制不稳定性,级联非简并FWM(四波混频)在主梳谱线间生成大量次级光梳,系统进入混沌状态,如图2b所示,Δ=0.40.继续增大Δ至2.48时,次级光梳之间的非线性相互作用加剧,混沌程度显著增强,模式更密集且包络起伏更显著,如图2c所示.当色散与非线性效应、增益与损耗达到动态平衡时,腔内光场形成耗散克尔孤子,光谱完全相干且具有sech²形包络,如图2d所示.本文主要聚焦于MI驱动的混沌微腔光频梳区域,并以其复杂度作为后续分析对象.

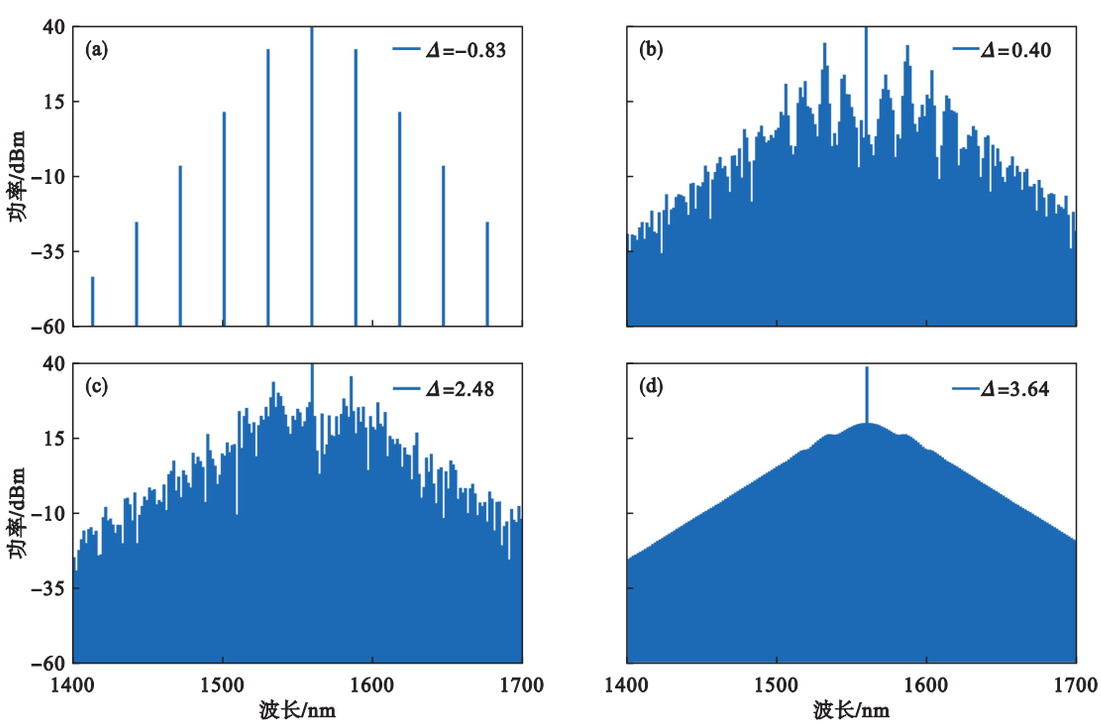


图2 随着Δ增加微腔光频梳的光谱变化

Fig. 2 Spectral variation of microresonator optical frequency comb with increasing Δ

(a)—Δ=−0.83,主梳态;(b)—Δ=0.40,混沌态;(c)—Δ=2.48,混沌态;(d)—Δ=3.64,孤子态.

1.2 排列熵

排列熵是1种由Bandt等[21]提出的时间序列复杂度度量方法.其仅依赖数据点间的相对大小关系,对噪声和非线性变换具有良好的鲁棒性.对于时间序列$y=\{y_1,y_2,\cdots,y_N\}$(N为排列熵输入时间序列的长度),给定嵌入维度m和时间延迟τ,可构造延迟向量$\boldsymbol{X}_j=\{y_j,y_{j+\tau},\cdots,y_{j+(m-1)\tau}\}$,将每个延迟向量中的元素按升序排列,其索引序列$\pi$=

$(j_1,j_2,\cdots,j_m)$即为对应的序数模式，共存在$m!$种可能的模式．通常建议m的取值范围为3到7之间．遍历整个时间序列，统计每种序数模式π_i出现的相对频率作为其概率估计$p(\pi_i)$．归一化排列熵定义为

$$H[P]=-\frac{1}{\ln m!}\sum_i p(\pi_i)\ln p(\pi_i). \tag{2}$$

PE($H[P]$)值介于0和1之间．接近0表示序列具有强规律性和可预测性，接近1则表明序列接近完全随机，复杂度越高．本文取嵌入维度m=5，N=30 000进行仿真计算．

2　结果与讨论

图3a是Q值为1×10^6的氮化硅微环谐振腔在F^2=24，Δ=2.8条件下，产生的跨度超过300 nm、包含512个模式的混沌光频梳光谱；图3b为图3a中标黄部分1 557~1 597 nm（40 nm宽）的局部放大图．为便于描述光频梳通道位置，本文将泵浦中心模式记为0通道，其右侧相邻的首个模式记为+1通道，左侧相邻的首个模式记为−1通道．

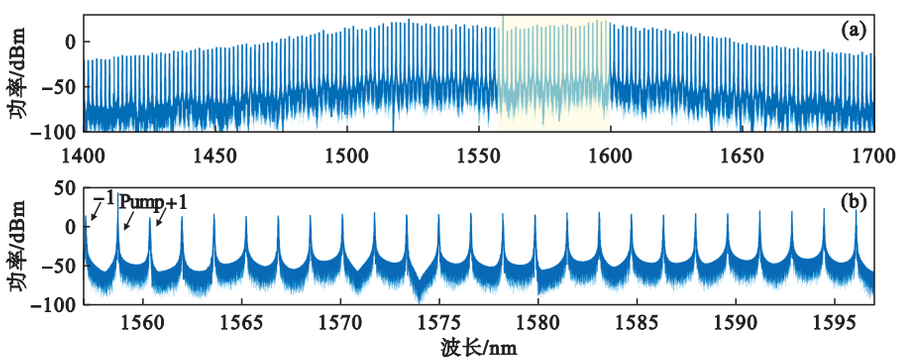


图3　混沌光频梳典型结果

Fig. 3　Typical results of chaotic optical frequency combs

（a）—混沌微腔光频梳光谱；（b）—（a）图中放大的混沌微腔光频梳光谱．

首先以单通道作为研究对象．固定Δ=2.8，选取泵浦波长（通道0）作为代表性通道．泵浦波长位于光频梳的光谱中心，腔内光强最高且直接参与DFWM过程，其复杂度演化能够典型地反映MI驱动下的混沌动力学特征．图4系统展示了泵浦波长在归一化泵浦功率F^2=5.35，6，24的时序波形、PE−延时曲线以及频谱．

当F^2=5.35时，如图4a1~4c1所示，系统刚进入MI态，被激发的通道数量较少，非线性相互作用较弱．时序波形呈现叠加随机波动的准周期包络，如图4a1所示，表明腔内场尚保留显著的周期性结构．与之对应，PE−延时曲线出现多波谷振荡，如图4b1所示，最低波谷出现在$\tau\approx$1.1 ns处，PE值降至0.76，表明在该特征时间尺度上信号具有较强的可预测性和时间相关性．频谱在0.9 GHz处存在突出的尖峰，如图4c1所示，其频率f与对应的PE波谷位置满足$\tau\approx1/f$的倒数关系，从频域验证了时序中存在准周期振荡．上述3类特征相互印证，表明该状态属于带有明显特征时间尺度的弱混沌．

当F^2增大至6时，如图4a2~4c2所示，更多次级梳齿被激发，通道间级联四波混频效应增强．时序波形中的准周期包络结构明显减弱，随机起伏成分增加，如图4a2所示．PE−延时曲线的振荡幅度显著降低，波谷变浅且位置发生偏移，如图4b2所示，说明原有的特征时间尺度逐渐消失，信号的时间相关性减弱．频谱中的尖峰幅度下降、宽度展宽，同时宽带噪声底抬升，如图4c2所示，反映出功率逐渐从离散的准周期分量向宽带连续谱转移．这些特征表明系统正处于从弱混沌向强混沌的过渡阶段．

当F^2进一步增大至24时，如图4a3~4c3所示，腔内大量通道被充分激发，通道间非线性作用进一步增强．时序波形呈现强随机性的无规则起伏，准周期结构完全消失，如图4a3所示．PE−延时曲线的振荡基本消失，饱和时PE接近1，如图4b3所示，表明信号在所有可探测的时间尺度上均呈现出接近完全随机的特征．频谱中无明显尖峰，整体表现为宽带连续分布，低频段仍有起伏，如图4c3所示．该状态对应强混沌，信号复杂度接近理论上限．

由图4可见，随着F^2增大，泵浦通道由保留明显

特征时间尺度的弱混沌,经由过渡态,逐步演变为随机性强的强混沌,其他通道也表现出相同变化.

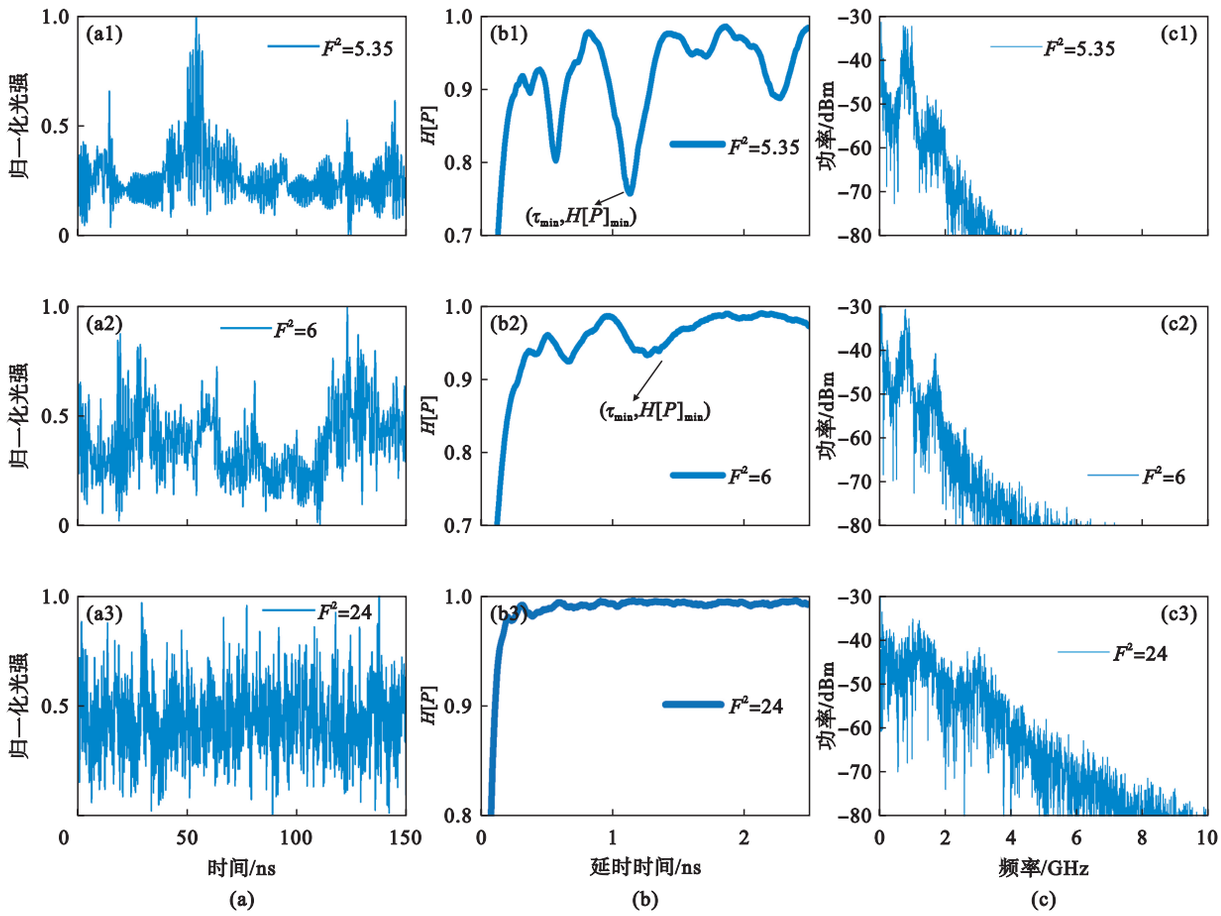


图4 通道0随归一化泵浦功率变化的典型结果

Fig. 4 Typical results of channel 0 as a function of normalized pump intensity

(a)—时序;(b)—PE-延时曲线;(c)—频谱.

图4从单通道角度揭示了复杂度随F^2增大的演化特征.图5进一步从多通道角度出发,统计对称通道-27到+27各通道PE-延时曲线上升后最低点PE值($H[P]_{min}$)及其对应延迟时间τ_{min}的分布,以描述各通道复杂度水平及其一致性.图5a为最低点的多通道分布,整体呈现出一定的对称趋势,但并非严格对称.当F^2=5.35时,$H[P]_{min}$在不同通道中波动较大,表明多通道复杂度水平存在明显不一致性;随着F^2增大,$H[P]_{min}$整体抬升并且更接近1,但依旧存在波动;当F^2=24时,$H[P]_{min}$在接近1的区间内饱和,通道间差异显著减小.图5a表明,随F^2增大各通道$H[P]_{min}$均呈抬升趋势,与图4所揭示的单通道由弱混沌向强混沌的演化趋势一致,且在强泵浦条件下各通道复杂度趋于一致.

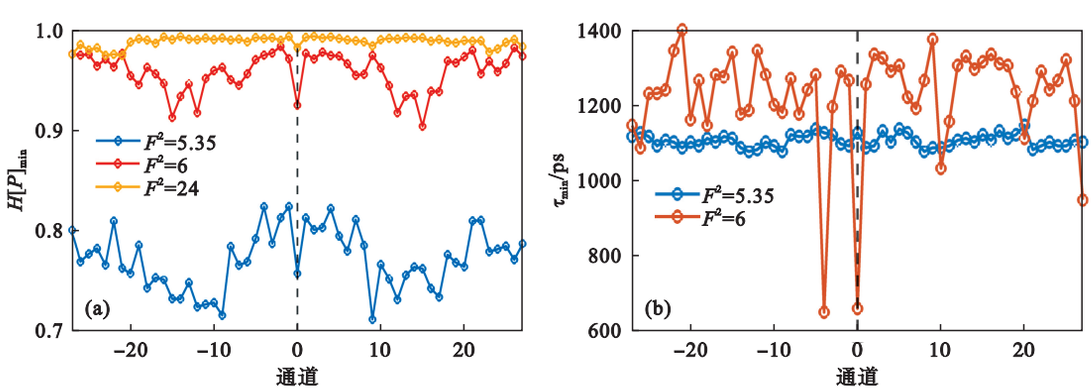


图5 各通道PE-延时曲线最低点统计

Fig. 5 Statistics of minima of PE-delay curves for all channels

(a)—最低点PE值($H[P]_{min}$)随通道变化;(b)—最低点对应的延时时间(τ_{min})随通道变化.

图5b描述了最低点PE值对应延时时间的多通道分布.在F^2=5.35时,对应的延迟时间τ_{min}在各通道上分布比较集中,说明弱混沌状态下存在相对稳定的时间尺度;而在F^2=6时,τ_{min}的波动显著增大,这是由于在向强混沌过渡阶段,PE-延时曲线振荡减弱,曲线的最低点不再明显,导致τ_{min}具有更高的敏感性;当F^2=24时,PE-延时曲线的振荡基本消失,最低点对应的延时时间τ_{min}不再反映稳定、可重复的时间尺度,因此未在图5b中进行展示.

为表征光频梳随参数变化的复杂度及其通道一致性,本文将每个通道PE-延时曲线最低点所对应的值定义为该通道的PE[17,22-23],选择在整个参数变化范围内平均功率大于10 mW的单通道作为有效通道.在图6~7中,选取-32至+27通道计算其PE的平均值作为光频梳的平均PE;同时计算这60个通道PE的标准差,用于衡量不同通道复杂度的离散程度.

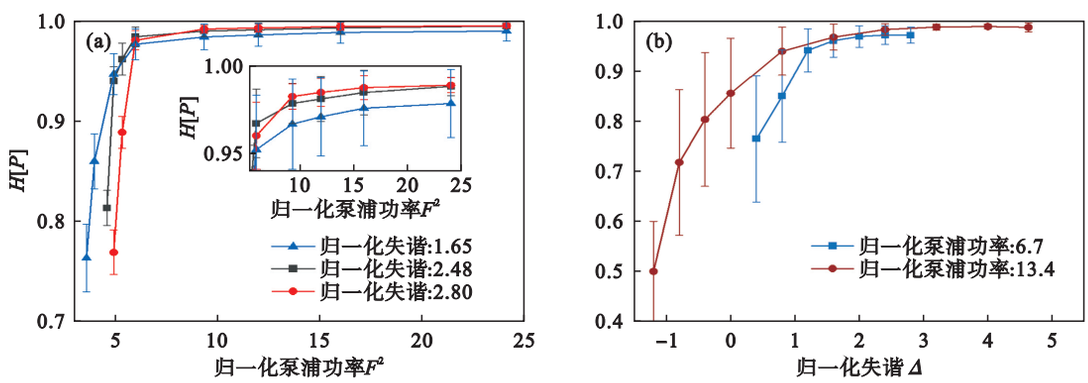


图6　F^2和Δ对混沌光频梳复杂度的影响

Fig. 6　Effects of F^2 and Δ on complexity of chaotic optical frequency combs

(a)—F^2; (b)—Δ.

为了较为全面地分析光频梳在MI阶段的复杂度演化规律,固定使用Q值大小为1×10^6的微腔,在图6a中选取归一化失谐Δ=1.65,2.48,2.80的3组数据,研究归一化泵浦功率F^2对混沌光频梳复杂度的影响.观察图6a可知,随着F^2增大,多通道平均PE呈现先迅速上升后趋于饱和的趋势,同时PE标准差逐渐减小.随着F^2增加,腔内功率与MI增益增加,从而激发更多通道,系统由弱混沌状态过渡到强混沌状态,平均PE增大.在弱混沌状态中,不同通道受相位匹配条件以及级联四波混频过程影响的程度不同,部分通道仍保留较强的周期性成分,导致各通道PE差异较大;而在强混沌状态下,更多通道发生相互作用,通道间级联四波混频效应与能量交换增强,各通道PE的标准差逐渐减小.

进入MI态的归一化泵浦功率阈值并非随Δ单调变化,文献[24]给出的典型相图表明,Δ=1.65更接近MI区域边界,进入MI态的泵浦功率阈值较低.因此在较低的外加F^2下即可让腔内场进入MI态,而Δ=2.48与2.80处于阈值上升段,需要更高的F^2才能进入MI态.总而言之,在较低F^2阶段,较小的Δ使系统先进入MI态,此时输出的混沌光频梳展现出相对较高的复杂度,但在饱和阶段,较大的Δ能够激发更强的有效非线性作用与更强的谱展宽能力,从而使混沌光频梳具有更高的复杂度.总体上,随着Δ增大,曲线向右上方移动.

图6b为固定F^2=6.7与13.4时Δ对光频梳复杂度的影响.较高的归一化泵浦功率不仅能够激发出更强的非线性相互作用,使平均PE曲线整体上移,同时也大幅拓宽了能够产生混沌光频梳的有效失谐范围.具体而言,在正归一化失谐区域,Δ越大,越有利于谱展宽,系统无序程度越加剧,表现为平均PE更大、标准差更小.在F^2=13.4的高归一化泵浦功率条件下,归一化负失谐侧也能观察到MI态.随着Δ从负值向0增大(即$|\Delta|$减小),时域中周期性包络逐渐消失,可预测结构减少,平均PE逐渐升高.

为满足混沌微腔光频梳在高吞吐随机数生成与并行保密通信等应用中对高复杂度-低功耗参数优化的需求,本文进一步研究了Q值对混沌微腔光频梳复杂度的影响,并给出了达到相同复杂度所需的实际泵浦功率.选用Q值分别为2×10^5,4×10^5,6×10^5,8×10^5,1×10^6的微腔产生混沌光频梳,固定Δ=2.8,得到5条固定Q值下平均PE随着归一化泵浦功率F^2变化的曲线.图7a表明,各

Q值下混沌微腔光频梳的平均PE都随着F^2增大而提升,同时通道间的PE标准差随之减小.比较不同Q值的微腔可以发现,较小的Q值对应更宽的共振线宽,能够容纳更大的色散频率偏移,从而使更多通道参与有效的非线性相互作用,在相同的F^2下更容易激发高复杂度的混沌微腔光频梳,可达到的最大PE上限也更高.然而,低Q值微腔的损耗更大,相同的归一化泵浦功率F^2对应更高的实际泵浦功率.由图7b可见:在复杂度相同($H[P]$=0.95)的前提下,采用高Q值微腔能显著降低实际泵浦功率.例如,当PE达到0.95时,Q=2×10^{5}的微腔需要10.6 W的物理泵浦功率,而Q=1×10^{6}的微腔仅需426.5 mW,两者相差近25倍.可见,高Q值微腔能够在达到目标复杂度的同时大幅降低实际泵浦功率,从工程实现的角度更具优势.

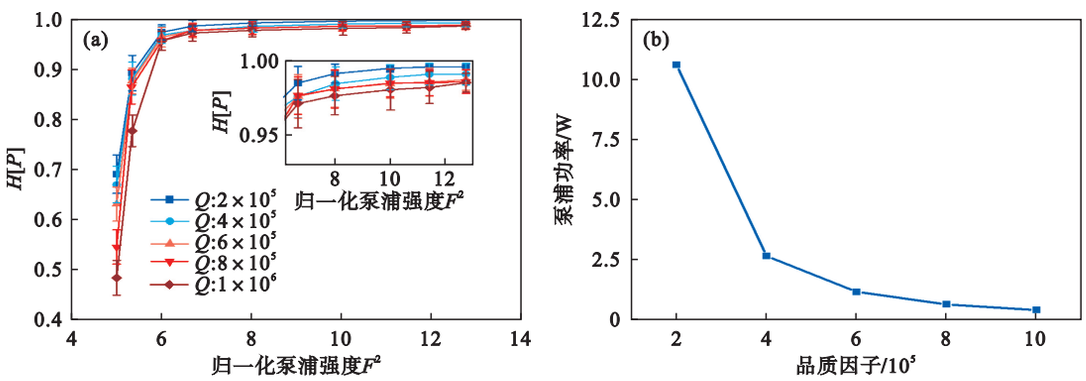


图7 品质因子Q对复杂度及所需泵浦功率的影响

Fig. 7 Effects of quality factor Q on complexity and required pump power

(a)—不同Q值下平均PE随F^2的变化;(b)—相同PE时不同Q值微腔所需的实际泵浦功率.

最后,本文绘制了覆盖主梳、MI及孤子区域的复杂度热图,为工作参数的选取提供了直观参考.图8在Δ从−1.0到4.5,F^2从4到18的参数空间内进行扫描,提取了中心附近20个通道(−10至+9)的平均PE进行绘制,并叠加了PE=0.90与PE=0.98的等值线,以明确划定高复杂度参数区域.数值结果表明,随着Δ从−1.0变化到4.5,系统依次经历主梳、MI及孤子态,平均PE整体呈现先升高后降低的变化趋势.

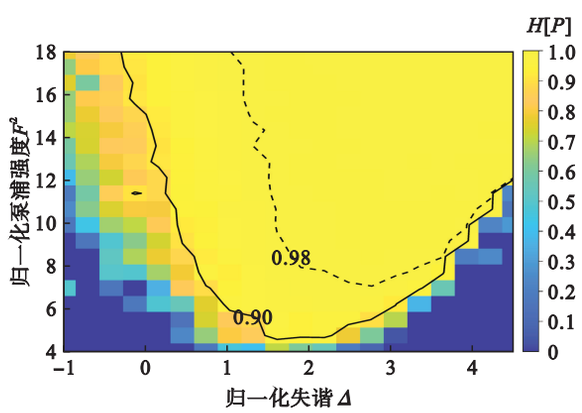


图8 归一化失谐-归一化泵浦功率参数空间中光频梳平均排列熵热图

Fig. 8 Heat map of mean permutation entropy of optical frequency comb in parameter space of normalized detuning-normalized pump intensity

主梳态与孤子态的腔内场演化以周期性稳态结构为主,因此平均PE较低;而进入MI态后,时域波形逐渐转变为更无序的随机起伏,平均PE显著升高并在较大范围内保持高值.当混沌光频梳用作多路并行混沌源时,实际工作点应落在平均PE高且PE标准差小的参数区域内,以确保各通道输出信号同时具备高复杂度与良好的通道间一致性.

3 结 论

1)通过分析代表性通道的时序波形、PE-延时曲线及频谱,揭示了单模式由弱混沌向强混沌演化的典型特征:频谱由具有特征尖峰的分立谱逐步演化为宽带平坦的连续谱,PE-延时曲线的振荡逐渐消失,信号时间相关性显著减弱,系统进入强无序态.

2)随着归一化泵浦功率F^2增大,多通道平均PE整体升高而标准差逐渐降低,表明混沌程度增强的同时各通道复杂度趋于一致.增大正失谐有利于进一步提升复杂度.

3)对不同Q值微腔的对比分析表明,高Q值微腔能以更低的泵浦功率达到高复杂度混沌态,但其可达到的最大排列熵略低于低Q值微腔.

4) 在归一化失谐-归一化泵浦功率(Δ,F^2)参数空间中构建了覆盖主梳、调制不稳定及孤子区域的平均PE热图,直观呈现了复杂度在不同状态间的分布规律,并明确划定了高复杂度参数区间.

参考文献:

[1] Lukashchuk A, Riemensberger J, Tusnin A, et al. Chaotic microcomb-based parallel ranging [J]. *Nature Photonics*, 2023, 17(9): 814-821.

[2] Chen R X, Shu H W, Shen B T, et al. Breaking the temporal and frequency congestion of LiDAR by parallel chaos[J]. *Nature Photonics*, 2023, 17(4): 306-314.

[3] Argyris A, Syvridis D, Larger L, et al. Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links [J]. *Nature*, 2005, 438(7066): 343-346.

[4] Matsuura T, Uchida A, Yoshimori S. Chaotic wavelength division multiplexing for optical communication [J]. *Optics Letters*, 2004, 29(23): 2731-2733.

[5] Gao H, Wang A B, Wang L S, et al. 0.75 Gbit/s high-speed classical key distribution with mode-shift keying chaos synchronization of Fabry-Perot lasers[J]. *Light: Science & Applications*, 2021, 10: 172.

[6] Gao Z S, Ma Z Y, Wu S L, et al. Physical secure key distribution based on chaotic self-carrier phase modulation and time-delayed shift keying of synchronized optical chaos [J]. *Optics Express*, 2022, 30(13): 23953-23966.

[7] Shen B T, Shu H W, Xie W Q, et al. Harnessing microcomb-based parallel chaos for random number generation and optical decision making [J]. *Nature Communications*, 2023, 14: 4590.

[8] Li A R, Jiang N, Geng Y, et al. Parallel high-speed random bit generation based on wideband chaotic microcomb and wavelet high-pass filtering [J]. *Optics Letters*, 2024, 49(20): 5981-5984.

[9] Han Y N, Xiang S Y, Wang Y, et al. Generation of multi-channel chaotic signals with time delay signature concealment and ultrafast photonic decision making based on a globally-coupled semiconductor laser network [J]. *Photonics Research*, 2020, 8(11): 1792.

[10] Zhao A K, Jiang N, Peng J F, et al. Parallel generation of low-correlation wideband complex chaotic signals using CW laser and external-cavity laser with self-phase-modulated injection[J]. *Opto-Electronic Advances*, 2022, 5(5): 200026.

[11] Cai Q, Li P, Shi Y C, et al. Tbps parallel random number generation based on a single quarter-wavelength-shifted DFB laser [J]. *Optics & Laser Technology*, 2023, 162: 109273.

[12] Huang Y, Zhou P, Lau K, et al. Parallel wideband chaos generation system for advancing high-throughput information processing based on an array of four distributed feedback lasers [J]. *ACS Photonics*, 2024, 11(11): 5012-5021.

[13] Li P, Cai Q, Zhang J G, et al. Observation of flat chaos generation using an optical feedback multi-mode laser with a band-pass filter [J]. *Optics Express*, 2019, 27(13): 17859-17871.

[14] Hu D W, Wang F, Li J C, et al. Wideband chaotic comb source using a weak-resonant-cavity Fabry-Perot laser diode subject to optical feedback for parallel random number generation [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2024, 188: 115458.

[15] Guo X X, Xiang S Y, Zhang Y H, et al. Information-theory-based complexity quantifier for chaotic semiconductor laser with double time delays [J]. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 2018, 54(1): 2000308.

[16] Quintero-Rodríguez L J, Zaldívar-Huerta I E, Hong Y H, et al. Permutation entropy analysis of the output of a laser diode under stimulated Brillouin scattering optical feedback [J]. *Optics Express*, 2021, 29(17): 26787-26792.

[17] Chao M, Wang D M, Wang L S, et al. Permutation entropy analysis of chaotic semiconductor laser with chirped FBG feedback[J]. *Optics Communications*, 2020, 456: 124702.

[18] Chembo Y K, Menyuk C R. Spatiotemporal Lugiato-Lefever formalism for Kerr-comb generation in whispering-gallery-mode resonators [J]. *Physical Review A*, 2013, 87(5): 053852.

[19] Coen S, Randle H G, Sylvestre T, et al. Modeling of octave-spanning Kerr frequency combs using a generalized mean-field Lugiato-Lefever model [J]. *Optics Letters*, 2013, 38(1): 37-39.

[20] Moreno D, Fujii S, Nakashima A, et al. Synchronization of two chaotic microresonator frequency combs [J]. *Optics Express*, 2024, 32(2): 2460-2472.

[21] Bandt C, Pompe B. Permutation entropy: a natural complexity measure for time series [J]. *Physical Review Letters*, 2002, 88(17): 174102.

[22] Ji S K, Hong Y H. Effect of bias current on complexity and time delay signature of chaos in semiconductor laser with time-delayed optical feedback[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 2017, 23(6): 1800706.

[23] Rontani D, Mercier E, Wolfersberger D, et al. Enhanced complexity of optical chaos in a laser diode with phase-conjugate feedback [J]. *Optics Letters*, 2016, 41(20): 4637-4640.

[24] Wang Z, Zhu K X, Zhang F X, et al. Collision-induced rogue waves and universal transport dynamics in chaotic Kerr microresonators [J]. *Science Advances*, 2025, 11(21): 9422.