文章编号:1674-2974(2026)03-0055-08 DOI:10.16339/j.cnki.hdxbzkb.2026024

连续薄壁箱梁约束扭转分析的方法

夏桂云†,杨翱蔚,温睿
(长沙理工大学 土木与环境工程学院,湖南长沙,410114)

摘 要:力法是超静定结构弯曲分析的经典方法,根据连续箱梁弯曲和约束扭转问题的相似性,将力法应用于约束扭转分析,解决图乘法无法计算柔度的关键问题.利用薄壁箱梁约束扭转微分方程的初参数解,推导赘余力和荷载(集中扭矩、均布扭矩、集中双力矩和均布双力矩)作用于基本结构时其状态向量(扭角、翘曲位移、双力矩和扭矩)的理论解析;利用理论解析直接计算基本结构的柔度,利用叠加法进行状态向量后处理.状态向量的理论解和后处理方法为连续薄壁箱梁约束扭转力法分析奠定了基础.算例结果表明,连续薄壁箱梁约束扭转的力法分析结果与超越有限元结果一致,表明力法是连续薄壁箱梁约束扭转分析中的精确方法.本文提出以基本结构状态向量解析解、状态向量后处理的叠加法为基础的完整力法分析方法,为力法推广应用解决了关键问题.

关键词:力法;约束扭转;连续箱梁;柔度;内力分布
中图分类号:U448.213 **文献标志码**:A

Force method for restrained torsion analysis of continuous thin-walled box girder

XIA Guiyun†, YANG Aowei, WEN Rui
(School of Civil and Environmental Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, China)

Abstract: The force method is a classical approach for bending analysis of statically indeterminate structures. Based on the similarity between the bending and restrained torsion problems of a continuous box girder, the force method is applied to the analysis of restrained torsion, addressing the critical limitation of the graph multiplication method, which fails to calculate flexibility in such cases. Initial parameter solutions to the differential equations governing the restrained torsion of thin-walled box girder are used to derive theoretical expressions for state vectors (twist angle, warping displacement, bimoment and torque) in the released structure subjected to unit redundant and loads (concentrated torque, uniformly distributed torque, concentrated bimoment and uniformly distributed bimoment). The theoretical solutions are then applied to calculate the flexibility of the released structure. The superposition method is implemented to conduct the post-processing of state vectors. Theoretical formulae and post-processing method of state vectors lay a concrete groundwork for the force method applied to the restrained torsion analysis of continuous thin-walled box girder. The example results by the force method are consistent with the exact

* **收稿日期**:2025-02-14
基金项目:国家自然科学基金资助项目(51278072), National Natural Science Foundation of China(51278072);湖南省教育厅重点项目(22A0223), Key Project of Education Department of Hunan Province(22A0223)
作者简介:夏桂云(1972—),男,湖南湘阴人,长沙理工大学教授,博士
† 通信联系人,E-mail: xiagy72@163.com

finite elements in a continuous thin-walled box girder, which demonstrates the precision of the force method applied to the restrained torsion analysis of a continuous thin-walled box girder. The integral force method presented in this paper is based on the analytical solutions of state vectors in the released structure and the superposition method for the post-processing of state vectors. Critical questions are solved to expand the applications of the force method.

Key words: force method; restrained torsion; continuous box girder; flexibility; internal force distribution

竖向弯曲[1-2]、剪力滞、约束扭转、畸变[3]、横向弯曲[4]是箱梁的基本力学问题[5]. 目前,相关研究已较为深入,针对上述问题分别形成了多种单因素分析理论和多因素耦合理论[6]. 对于箱梁这种薄壁闭口结构,其约束扭转理论有乌曼斯基第二约束扭转理论、广义坐标理论及广义梁理论[7]等. 徐勋[8]基于广义坐标法,采用混合变分原理,建立了开/闭口混合截面杆件约束扭转分析理论. 黄洪猛等[9-10]考虑全部次生剪应力对剪切变形的影响,基于Reissner原理建立了约束扭转分析理论. 李夏元[11]基于最小势能原理,考虑非均匀扭转翘曲和剪切变形影响的单箱多室箱梁约束扭转分析理论. Chen等[12]考虑截面中线的剪切变形影响,将扭转角分解为翘曲扭转角和剪切扭转角,分别建立了关于总扭转角和翘曲扭转角的微分方程,确立总扭转角与翘曲扭转角间的关系. Murín等[13]类比了约束扭转理论与Timoshenko梁柱理论,并建立了有限元列式. 对于箱梁约束扭转求解方法,针对简支箱梁[14]、悬臂箱梁[15]、固支箱梁[16]等单跨结构,采用初参数法,进行理论解析的做法比较普遍. 夏桂云等[17]利用微分方程的初参数解转换成超越有限元,建立非节点荷载等效公式和弯扭力矩算法. Cambronero-Barrientos等[18]运用有限梁段单元分析了箱梁的剪力滞、约束扭转及畸变效应.

针对超静定结构的弯曲问题,《结构力学》给出了力法、位移法、力矩分配法等实用方法[19-20],这些方法使得弯曲分析时不需要微分方程求解,丰富了工程结构的分析手段. 对于连续薄壁箱梁的约束扭转问题,其与连续梁的弯曲问题具有相似性:1)弯曲问题中,以竖向变形和转角为变形变量、以弯矩和剪力为内力变量;薄壁箱梁的约束扭转问题中,以扭角和翘曲位移为变形变量、以双力矩和扭矩为内力变量. 2)连续箱梁弯曲问题中,支座处的竖向变形约束、转角自由;连续箱梁约束扭转问题中,支座处一般采用双支座且横隔板平面内抗畸变刚度较大,扭角可视为约束,横隔板出平面的翘曲刚度较小,其翘曲可视为自由[21]. 这种相似性可使力法成为连续梁约束扭转的分析途径,从而使约束扭转分析也不需要求解微分方程,而用结构力法的方法进行工程结构分析. 但是基于乌曼斯基第二约束扭转理论的薄壁箱梁约束扭转分析比较复杂,其放弃翘曲位移β等于扭角率θ'的假定(乌曼斯基第一约束扭转理论所采用的假定),并且考虑截面中线的剪切变形影响、总扭矩由自由扭矩和二次扭矩(弯扭力矩)构成,因此不能将梁弯曲问题的力法简单移植到薄壁箱梁的约束扭转问题中,需要解决以下关键问题:1)梁弯曲问题的力法分析中,常用图乘法计算基本结构的柔度[20,22],但是由于薄壁箱梁约束扭转理论的复杂性[23],图乘法在约束扭转问题中不成立. 本文提出利用约束扭转微分方程的初参数解求解基本结构的柔度.2)梁弯曲问题的力法分析中,利用力法方程确定赘余力,根据叠加原理计算结构的内力分布[20,22],利用图乘法计算结构的变形[20,22]. 对于薄壁箱梁约束扭转问题的力法分析,由于图乘法不成立,不能利用图乘法进行变形(扭角、翘曲)的后处理计算. 本文发现叠加法不仅适用于约束扭转的内力(双力矩、扭矩)的计算,也适用于变形计算,约束扭转力法分析的后处理问题得到解决.

1 连续箱梁约束扭转的初参数解

利用力法分析超静定结构的弯曲问题时,通常需要经历4步:选择基本结构和赘余力、计算基本结构在赘余力和外荷载作用下的柔度(常变位、载变位)、利用力法方程求解赘余力、内力和变形的后处理. 将力法应用于约束扭转问题时,由于计算理论的复杂性、图乘法理论在约束扭转问题中不成立等,本文对基本结构的分析改用直接理论求解. 为方便阅读,列出基于乌曼斯基第二约束扭转理论的约束扭转微分方程[5,17]:

$$E_1 J_\varpi \theta''''(x) - vGJ_d \theta''(x) = vm(x) \tag{1}$$

式中:E_1、G分别为材料折算弹性模量和剪切模量;扇性惯性矩$J_\varpi=\oint\varpi^2\mathrm{d}A$,$\varpi$为广义扇形坐标,$A$为截面面积;抗扭惯性矩$J_\mathrm{d}=\Omega^2/\oint\frac{\mathrm{d}s}{\delta}+\sum c_ib_it_i^3$,$\Omega$为闭口截面中线围成面积的2倍值,$\delta$为闭口截面构件壁厚,$c_i$、$b_i$、$t_i$分别为第$i$个开口构件的抗扭刚度系数、宽度和厚度;翘曲系数$v=1-J_\mathrm{d}/J_\rho$,极惯性矩$J_\rho=\int\rho^2\mathrm{d}A$,$\rho$为极点到计算点切线的距离;$m(x)$为分布扭矩.

任意截面的扭角$\theta(x)$、翘曲位移$\beta(x)$、双力矩$B(x)$和扭矩$M(x)$用初参数值$\theta_0=\theta(x=0)$、$\beta_0=\beta(x=0)$、$B_0=B(x=0)$、$M_0=M(x=0)$表示的解[17]为:

$$\begin{cases}\theta(x)=\theta_0+\dfrac{v\cdot\sinh(kx)}{k}\beta_0+\dfrac{1-\cosh(kx)}{GJ_\mathrm{d}}B_0+\\\qquad\dfrac{kx-v\cdot\sinh(kx)}{kGJ_\mathrm{d}}M_0\\\beta(x)=\cosh(kx)\cdot\beta_0-\dfrac{k\cdot\sinh(kx)}{vGJ_\mathrm{d}}B_0+\\\qquad\dfrac{1-\cosh(kx)}{GJ_\mathrm{d}}M_0\\B(x)=-\dfrac{vGJ_\mathrm{d}\sinh(kx)}{k}\cdot\beta_0+\cosh(kx)\cdot B_0+\\\qquad\dfrac{v\cdot\sinh(kx)}{k}M_0\\M(x)=M_0\end{cases}\tag{2}$$

式中:空间坐标参数$k=\sqrt{\dfrac{GJ_\mathrm{d}v}{E_1J_\varpi}}$.

2　基本结构的受力分析

2.1　赘余力(B=1)作用下基本结构的受力分析

对于连续梁来说,可取简支梁(两端扭转角约束、翘曲位移自由)为基本结构,梁端的双力矩为赘余力.单位双力矩B=1作用于基本结构的右端时,如图1所示,根据初参数解,可得到结构状态向量的解析解为:

$$\begin{cases}\bar\theta=\dfrac{1}{GJ_\mathrm{d}}\left[\dfrac{x}{L}-\dfrac{\sinh(kx)}{\sinh(kL)}\right]\\\bar\beta=\dfrac{1}{LGJ_\mathrm{d}}\left[1-\dfrac{kL\cdot\cosh(kx)}{v\cdot\sinh(kL)}\right]\\\bar B(x)=\dfrac{\sinh(kx)}{\sinh(kL)}\\\bar M(x)=\dfrac{1}{L}\end{cases}\tag{3}$$

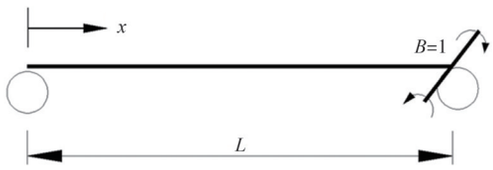
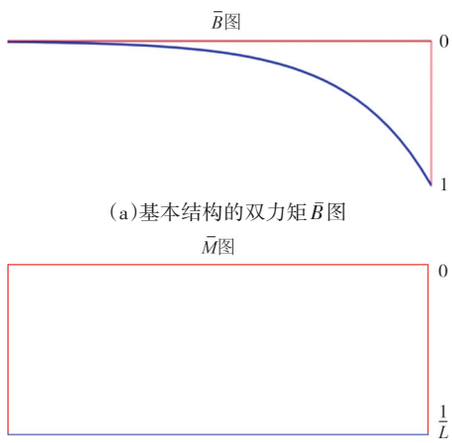


图1　单位双力矩作用于基本结构右端图

Fig.1　Released structure subjected to unit redundant of bimoment at the right side

双力矩和扭矩在基本结构中的分布如图2所示.由图2可知,约束扭转问题的双力矩$\bar B$图和扭矩$\bar M$图与弯曲问题对应的弯矩$\bar M$和剪力$\bar Q$分布图形有较大差别,尤其是双力矩$\bar B$图为双曲正弦函数分布、弯矩$\bar M$为直线分布.



(a)基本结构的双力矩$\bar B$图

(b)基本结构的扭矩$\bar M$图

图2　双力矩和扭矩在基本结构中的分布图

Fig.2　Bimoment and torque distributing diagrams in the released structure

为方便力法方程的应用和求解,根据式(3),基本结构左、右端翘曲柔度分别为:

$$\begin{cases}\delta_{12}=\beta(0)=\dfrac{1}{LGJ_\mathrm{d}}\left[1-\dfrac{kL}{v\sinh(kL)}\right]\\\delta_{22}=\beta(L)=\dfrac{1}{LGJ_\mathrm{d}}\left[1-\dfrac{kL\cosh(kL)}{v\sinh(kL)}\right]\end{cases}\tag{4}$$

如图3所示,单位双力矩B=1作用于基本结构的左端时,结构受力状态的理论解析解为:

$$\begin{cases}\bar\theta=\dfrac{1}{GJ_\mathrm{d}}\left\{\dfrac{L-x}{L}-\dfrac{\sinh[k(L-x)]}{\sinh(kL)}\right\}\\\bar\beta=\dfrac{1}{LGJ_\mathrm{d}}\left\{\dfrac{kL\cdot\cosh[k(L-x)]}{v\cdot\sinh(kL)}-1\right\}\\\bar B(x)=\dfrac{\sinh[k(L-x)]}{\sinh(kL)}\\\bar M(x)=-\dfrac{1}{L}\end{cases}\tag{5}$$

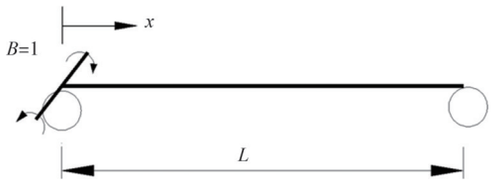


图3 单位双力矩作用于基本结构左端图

Fig.3 Released structure subjected to unit redundant of bimoment at the left side

根据式(5)的第2式,基本结构左、右端翘曲柔度分别为:

$$\begin{cases}\delta_{11}=\beta(0)=\dfrac{1}{LGJ_{\mathrm{d}}}\left[\dfrac{kL\cosh(kL)}{v\sinh(kL)}-1\right]\\ \delta_{21}=\beta(L)=\dfrac{1}{LGJ_{\mathrm{d}}}\left[\dfrac{kL}{v\sinh(kL)}-1\right]\end{cases}\tag{6}$$

力法分析中,需要计算赘余力和外荷载作用于基本结构的柔度,加之本文内力和变形后处理采用叠加法,需要外荷载作用于基本结构时状态向量(扭角、翘曲位移、双力矩和扭矩)分布的理论解,为方便约束扭转力法分析的使用,本文推导了集中扭矩、均布扭矩、集中双力矩和均布双力矩作用于基本结构时状态向量分布的理论解.

2.2 集中扭矩M_{k}作用于基本结构的受力分析

如图4所示,集中扭矩M_{k}作用于基本结构时,扭角、翘曲位移、双力矩和扭矩分布的理论解为:

当$0\leqslant x\leqslant a$时,

$$\begin{cases}\theta_{\mathrm{P}}=\dfrac{M_{\mathrm{K}}}{kGJ_{\mathrm{d}}}\left[\dfrac{kbx}{L}-\dfrac{v\sinh(kb)\sinh(kx)}{\sinh(kL)}\right]\\ \beta_{\mathrm{P}}=\dfrac{M_{\mathrm{K}}}{GJ_{\mathrm{d}}}\left[\dfrac{b}{L}-\dfrac{\sinh(kb)\cosh(kx)}{\sinh(kL)}\right]\\ B_{\mathrm{P}}=\dfrac{vM_{\mathrm{K}}}{k}\dfrac{\sinh(kb)}{\sinh(kL)}\sinh(kx)\\ M_{\mathrm{P}}=\dfrac{b}{L}M_{\mathrm{k}}\end{cases}\tag{7}$$

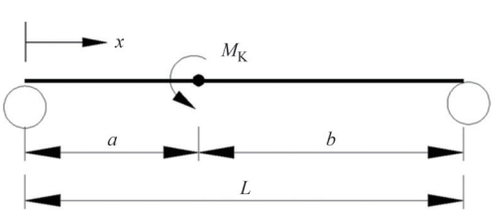


图4 集中扭矩作用于基本结构

Fig.4 Released structure subjected to concentrated torque

当$a\leqslant x\leqslant L$时,

$$\begin{cases}\theta_{\mathrm{P}}=\dfrac{M_{\mathrm{K}}}{kGJ_{\mathrm{d}}}\left\{\dfrac{ka(L-x)}{L}-\dfrac{v\sinh(kb)\sinh(kx)}{\sinh(kL)}+v\sinh\left[k(x-a)\right]\right\}\\ \beta_{\mathrm{P}}=\dfrac{M_{\mathrm{K}}}{GJ_{\mathrm{d}}}\left\{-\dfrac{a}{L}-\dfrac{\sinh(kb)\cosh(kx)}{\sinh(kL)}+\cosh\left[k(x-a)\right]\right\}\\ B_{\mathrm{P}}=\dfrac{vM_{\mathrm{K}}}{k}\left\{\dfrac{\sinh(kb)}{\sinh(kL)}\sinh(kx)-\sinh\left[k(x-a)\right]\right\}\\ M_{\mathrm{P}}=-\dfrac{a}{L}M_{\mathrm{k}}\end{cases}\tag{8}$$

根据式(7)的第2式、式(8)的第2式,基本结构左、右端的柔度为:

$$\begin{cases}\Delta_{1\mathrm{P}}=\beta(0)=\dfrac{M_{\mathrm{K}}}{GJ_{\mathrm{d}}}\left[\dfrac{b}{L}-\dfrac{\sinh(kb)}{\sinh(kL)}\right]\\ \Delta_{2\mathrm{P}}=\beta(L)=\dfrac{M_{\mathrm{K}}}{GJ_{\mathrm{d}}}\left[-\dfrac{a}{L}+\dfrac{\sinh(ka)}{\sinh(kL)}\right]\end{cases}\tag{9}$$

2.3 均布扭矩m_{K}作用于基本结构的受力分析

如图5所示,基本结构受均布扭矩m_{K}作用时,扭角、翘曲位移、双力矩和扭矩分布的理论解为:

$$\begin{cases}\theta_{\mathrm{P}}=\dfrac{m_{\mathrm{K}}}{kGJ_{\mathrm{d}}}\left\{\dfrac{v\sinh\left[k(L-x)\right]}{k\sinh(kL)}+\dfrac{v}{k}\left(\dfrac{\sinh(kx)}{\sinh(kL)}-1\right)+\dfrac{kx(L-x)}{2}\right\}\\ \beta_{\mathrm{P}}=\dfrac{m_{\mathrm{K}}}{2k\sinh(kL)GJ_{\mathrm{d}}}\left\{2\cosh(kx)-2\cosh\left[k(L-x)\right]+kL\sinh(kL)-2k\sinh(kL)x\right\}\\ B_{\mathrm{P}}=\dfrac{vm_{\mathrm{K}}}{k^2}\left\{1-\dfrac{\sinh(kx)+\sinh\left[k(L-x)\right]}{\sinh(kL)}\right\}\\ M_{\mathrm{P}}=\dfrac{m_{\mathrm{K}}(L-2x)}{2}\end{cases}\tag{10}$$

根据式(10)的第2式,基本结构左、右端的柔度为:

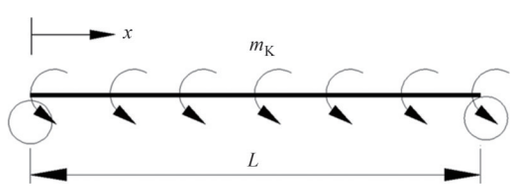


图5 均布扭矩作用于基本结构

Fig.5 Released structure subjected to uniformly distributed torque

$$\begin{cases}\Delta_{1P}=\dfrac{m_K\left[2-2\cosh(kL)+kL\cdot\sinh(kL)\right]}{2k\sinh(kL)GJ_d}\\ \Delta_{2P}=-\dfrac{m_K\left[2-2\cosh(kL)+kL\cdot\sinh(kL)\right]}{2k\sinh(kL)GJ_d}\end{cases}\tag{11}$$

2.4　集中双力矩B_K作用于基本结构的受力分析

如图6所示,基本结构受集中双力矩B_K作用时,扭角、翘曲位移、双力矩、扭矩分布的理论解为:

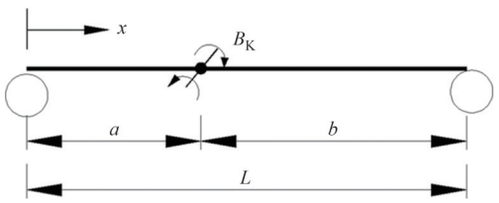


图6　集中双力矩作用于基本结构

Fig.6　Released structure subjected to concentrated bimoment

当$0\leqslant x\leqslant a$时,

$$\begin{cases}\theta_P=\dfrac{B_K}{kLGJ_d}\left[\dfrac{kL\cosh(kb)\sinh(kx)}{\sinh(kL)}-kx\right]\\ \beta_P=\dfrac{B_K}{v\sinh(kL)LGJ_d}\left[kL\cosh(kb)\cosh(kx)-v\sinh(kL)\right]\\ B_P=-\dfrac{\cosh(kb)\sinh(kx)}{\sinh(kL)}\cdot B_K\\ M_P=-\dfrac{B_K}{L}\end{cases}\tag{12}$$

当$a\leqslant x\leqslant L$时,

$$\begin{cases}\theta_P=\dfrac{B_K}{kLGJ_d}\left\{\dfrac{kL\cosh(kb)\sinh(kx)-kL\sinh(kL)\cosh\left[k(x-a)\right]}{\sinh(kL)}+k(L-x)\right\}\\ \beta_P=\dfrac{B_K}{v\sinh(kL)LGJ_d}\left\{kL\cosh(kb)\cosh(kx)-v\sinh(kL)-kL\sinh(kL)\sinh\left[k(x-a)\right]\right\}\\ B_P=\dfrac{\cosh\left[k(x-a)\right]\sinh(kL)-\cosh(kb)\sinh(kx)}{\sinh(kL)}\cdot B_K\\ M_P=-\dfrac{B_K}{L}\end{cases}\tag{13}$$

根据式(12)的第2式、式(13)的第2式,基本结构左、右端的柔度为:

$$\begin{cases}\Delta_{1P}=\dfrac{B_K\left[kL\cosh(kb)-v\sinh(kL)\right]}{v\sinh(kL)LGJ_d}\\ \Delta_{2P}=\dfrac{B_K\left[kL\cosh(ka)-v\sinh(kL)\right]}{v\sinh(kL)LGJ_d}\end{cases}\tag{14}$$

2.5　均布双力矩b_K作用于基本结构的受力分析

如图7所示,基本结构受均布双力矩b_K作用时,扭角、翘曲位移、双力矩、扭矩分布的理论解为:

$$\begin{cases}\theta_P=0\\ \beta_P=\dfrac{b_K(1-v)}{vGJ_d}\\ B_P=0\\ M_P=-b_K\end{cases}\tag{15}$$

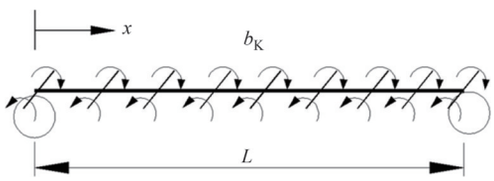


图7　均布双力矩作用于基本结构

Fig.7　Released structure subjected to uniformly distributed bimoment

根据式(15)的第2式,基本结构左、右端的柔度为:

$$\Delta_{1P}=\Delta_{2P}=\frac{b_K(1-v)}{vGJ_d}\tag{16}$$

3　内力和变形的后处理

用力法分析超静定结构弯曲问题时,根据力法原理,结构内力可采用叠加原理进行后处理.对于薄壁箱梁的约束扭转问题,叠加原理依然有效,其双力矩和扭矩分布可采用如下公式进行计算.

$$\begin{cases}B=\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{B}_i\cdot X_i+B_P\\ M=\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{M}_i\cdot X_i+M_P\end{cases}\tag{17}$$

用力法分析超静定结构弯曲问题的变形时,通常做法是先任选一种基本结构,利用单位赘余力作用下虚拟内力$\bar{M}$和结构真实内力M进行图乘,得到结构的变形.对于连续梁的约束扭转问题,图乘法不成立,但本文发现叠加法在变形的后处理中仍然成立,可根据下式计算扭转角和翘曲位移.

$$\begin{cases}\theta=\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{\theta}_i\cdot X_i+\theta_P\\ \beta=\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{\beta}_i\cdot X_i+\beta_P\end{cases}\tag{18}$$

式(18)中,赘余力作用下的变形状态和外荷载作用下的变形状态在基本结构的受力分析中已经详细给出了理论表达式,因此直接套用即可.基本结构

在赘余力和外荷载作用下状态向量分布的理论解析式(3)~式(16)为约束扭转的力法分析奠定了基础.

4 算例分析

预应力混凝土等截面三跨连续箱梁,跨径布置为(16+24+16)m,如图8所示.主梁材料为UHPC混凝土,弹性模量E=42.84 GPa、剪切模量G=17.85 GPa.箱梁横截面尺寸如图9所示,顶板、底板、边腹板和悬臂板厚t=0.10 m、中腹板厚t=0.15 m.经计算,截面扇性惯性矩J_ω=0.203 4 m^6、自由扭转惯性矩J_d=0.718 0 m^4、极惯性矩J_ρ=1.276 2 m^4;计算参数k=0.802 078.第一跨跨中作用集中扭矩M_K=1 085.0 kN·m、第二跨作用均布扭矩m_K=120 kN·m/m.取三跨简支梁(扭转角约束、翘曲自由)为基本结构,中间支座处的双力矩为赘余力,力法分析简图如图10所示.

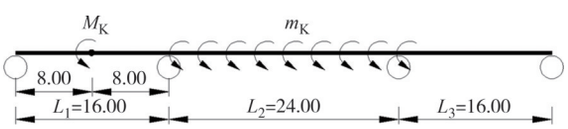


图8 三跨连续薄壁箱梁受集中扭矩和均布扭矩共同作用(单位:m)

Fig.8 Three-span continuous thin-walled box girder subjected to the combined loads of concentrated torque and uniformly distributed torque (unit: m)

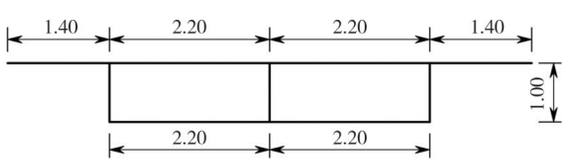


图9 截面尺寸(单位:m)

Fig.9 Dimension of the cross section (unit: m)

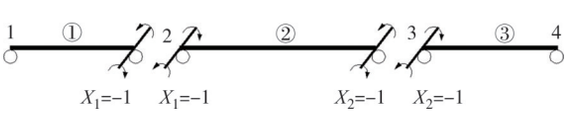


图10 基本结构受赘余力作用图

Fig.10 The diagram of released structure subjected to redundant

力法方程为:

$$\begin{cases}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0\end{cases}\tag{19}$$

梁弯曲问题的力法分析中,将正弯矩图画在梁的受拉侧,利用图乘法计算基本结构的柔度时,其正负取值可根据弯矩图的相对侧位判断,非常方便.对于梁约束扭转的力法分析,需要特别指出的是:本文所推导的柔度公式是统一按照位移(扭角、翘曲位移)和内力(双力矩、扭矩)正方向定义推导的,利用这些公式计算柔度值后,还应按照力法的原理并根据赘余力方向判别正负取值,再组装式(19)中的柔度.举例来说,当赘余力X_1=1作用于②号基本结构左端,按 式(6)第2式计算X_2方向的柔度δ_{21}后,再取负值-δ_{21},其含义为按赘余力X_2=-1的方向计算柔度.

根据赘余力正负值和方向的定义,式(19)中各变形的具体计算如下:

$$\delta_{11}=(-1)\cdot\frac{1}{L_1GJ_d}\left[1-\frac{kL_1\cosh(kL_1)}{v\sinh(kL_1)}\right]+\frac{1}{L_2GJ_d}\left[\frac{kL_2\cosh(kL_2)}{v\sinh(kL_2)}-1\right]=2.780\,3\times10^{-7}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=(-1)\cdot\frac{1}{L_2GJ_d}\left[\frac{kL_2}{v\cdot\sinh(kL_2)}-1\right]=3.251\,1\times10^{-9}$$

$$\delta_{22}=(-1)\cdot\frac{1}{L_2GJ_d}\left[1-\frac{kL_2\cosh(kL_2)}{v\sinh(kL_2)}\right]+\frac{1}{L_3GJ_d}\left[\frac{kL_3\cosh(kL_3)}{v\sinh(kL_3)}-1\right]=2.780\,3\times10^{-7}$$

$$\Delta_{1P}=(-1)\times\frac{M_K}{GJ_d}\left[-\frac{L_1/2}{L_1}+\frac{\sinh(kL_1/2)}{\sinh(kL_1)}\right]+m_K\cdot\frac{2-\cosh(kL_2)+kL_2\sinh(kL_2)}{2k\sinh(kL)GJ_d}=1.428\,7\times10^{-4}$$

$$\Delta_{2P}=(-1)^2\cdot m_K\cdot\frac{2-2\cosh(kL_2)+kL_2\sinh(kL_2)}{2k\sinh(kL_2)GJ_d}=1.006\,8\times10^{-4}$$

解力法方程,得到X_1=-509.706 0,X_2=-356.163 6.

利用叠加法进行状态向量的后处理,得到扭角、翘曲位移、双力矩和扭矩结果,其与超越有限元结果[17]的对比如图11~图14所示.

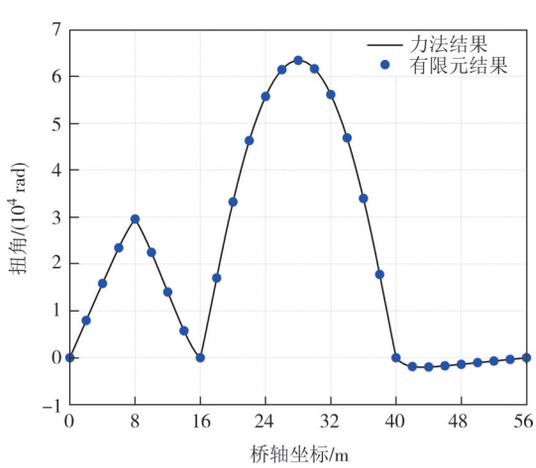


图11 沿桥轴的扭角分布图

Fig.11 Twist angle distribution diagram along the bridge axis

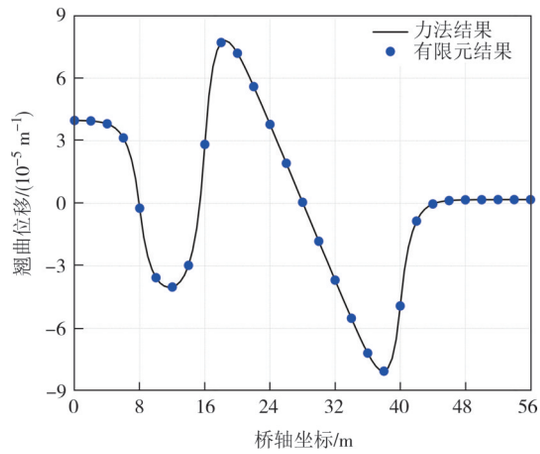


图 12　沿桥轴的翘曲位移分布图

Fig.2　Warping displacement distribution diagram along the bridge axis

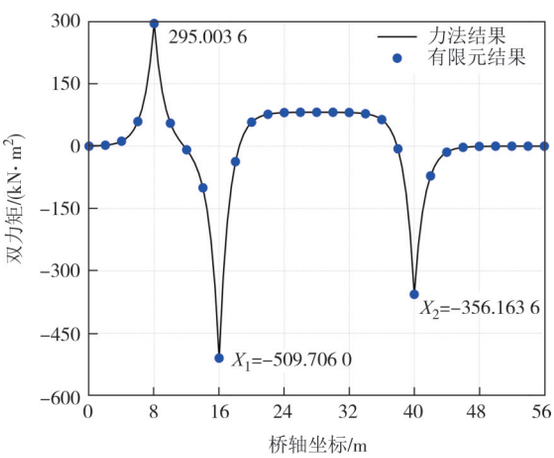


图 13　沿桥轴的双力矩分布图

Fig.13　Bimoment distribution diagram along the bridge axis

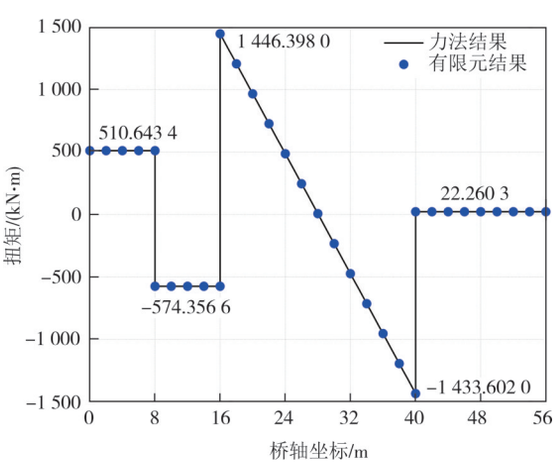


图 14　沿桥轴的扭矩分布图

Fig.14　Torque distribution diagram along the bridge axis

从图 11~图 14 可以看出,本文的力法结果与超越有限元结果一致,证明力法是连续薄壁箱梁约束扭转分析的精确方法.虽然图乘法无法计算约束扭转的柔度,但是利用基本结构的解析解和叠加法可进行柔度计算和状态向量的后处理,形成了约束扭转力法分析的完整计算方法.

5　结 论

利用连续梁弯曲问题和约束扭转问题的相似性,本文提出了连续薄壁箱梁约束扭转的完整力法分析方法,从而简化约束扭转分析过程.通过算例验证了连续箱梁约束扭转力法分析的准确性,得到如下结论:

1)基于乌曼斯基第二约束扭转理论,连续薄壁箱梁约束扭转的力法分析中,利用图乘法计算柔度的理论不成立,本文提出了基本结构在赘余力和外荷载作用下柔度的理论公式,可直接计算柔度.

2)本文推导了基本结构在赘余力和 4 种常见荷载作用下状态向量分布的理论公式,可供连续箱梁约束扭转的力法分析使用,奠定了连续箱梁约束扭转力法分析的理论基础.推而广之,只要能解决基本结构的受力问题,按照本文的思路可将力法进行拓展应用,如连续箱梁的畸变、连续梁的自由振动以及有中间刚性支承的多跨连续弹性地基梁等问题都可运用力法进行分析.

3)连续箱梁约束扭转的力法分析中,本文发现利用叠加原理、采用式(18)可计算结构的变形,与内力计算方法一致.

4)支座位置的横隔板对连续箱梁约束扭转存在纵向翘曲的弹性约束,可将其视为抗翘曲弹簧,在力法方程的柔度计算中加以考虑[19,24],便可分析此类问题.

参考文献

[1]　朱平, 丁子贤, 张哲, 等. 波形钢腹板-UHPC组合连续箱梁桥静力和抗震性能研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版),2022,49(11):45-56.
ZHU P, DING Z X, ZHANG Z, et al. Study on static and seismic performances of corrugated steel webs-UHPC composite continuous box girder bridge [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2022, 49(11): 45-56. (in Chinese)

[2]　王方旭,刘世忠,杨霞林,等. 变截面波形钢腹板悬臂梁抗剪性能研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版),2025,52(1):108-117.
WANG F X, LIU S Z, YANG X L, et al. Research on shear performance of cantilever beam with variable-section corrugated steel web [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2025,52(1):108-117. (in Chinese)

[3] 魏彦红,张元海,周福成,等. 带悬臂板单箱双室薄壁箱梁畸变效应分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版),2025,52(1):61-68.
WEI Y H,ZHANG Y H,ZHOU F C,et al. Analysis on distortion effect of single-box twin-cell thin-walled box girders with cantilever plates [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2025, 52(1): 61-68.(in Chinese)

[4] 赵品,荣学亮,叶见曙. 波形钢腹板组合箱梁横向受力有效分布宽度研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版),2016,43(7):105-110.
ZHAO P, RONG X L, YE J S. Research on the lateral effective width of composite box-girders with corrugated steel webs [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2016, 43(7): 105-110.(in Chinese)

[5] 郭金琼,房贞政,郑振. 箱形梁设计理论[M]. 2版. 北京: 人民交通出版社,2008.
GUO J Q,FANG Z Z,ZHENG Z. Design theory of box girder[M]. 2nd ed. Beijing: China Communications Press,2008.(in Chinese)

[6] 张元海, 马云亮, 刘泽翔. 考虑扭转与畸变耦联影响的薄壁箱梁翘曲效应分析[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2023, 53(3): 418-424.
ZHANG Y H, MA Y L, LIU Z X. Analysis on warping effect of thin-walled box girders considering coupling between torsion and distortion [J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2023, 53(3): 418-424.(in Chinese)

[7] MITTELSTEDT C. Generalized beam theory for the analysis of thin-walled structures: a state-of-the-art survey [J]. Thin-Walled Structures, 2024,200:111849.

[8] 徐勋. 大跨度混凝土箱梁结构空间效应研究[D]. 成都:西南交通大学,2009.
XU X. Research of spatial effects of concrete box girder structure with long span [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2009.(in Chinese)

[9] 黄洪猛, 张元海,罗奎. 单箱多室波形钢腹板组合箱梁约束扭转剪应力分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版),2023,50(9):186-194.
HUANG H M,ZHANG Y H,LUO K. Analysis on shear stress of single-box multi-cell composite box girders with corrugated steel webs under restrained torsion[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2023, 50(9):186-194.(in Chinese)

[10] 黄洪猛. 考虑剪切变形的波形钢腹板组合箱梁扭转和畸变理论及其应用[D]. 兰州:兰州交通大学,2023.
HUANG H M. Theory and application on torsion and distortion of composite box girder with corrugated steel webs considering shear deformation [D]. Lanzhou: Lanzhou Jiatong University, 2023.(in Chinese)

[11] 李夏元. 基于有限元法的单箱多室波形钢腹板组合箱梁空间力学性能研究[D]. 南京: 东南大学,2021.
LI X Y. Study on the spatial mechanical properties of single-box multi-cell composite box girders with corrugated steel webs based on finite element analysis [D]. Nanjing: Southeast University, 2021.(in Chinese)

[12] CHEN S G, LI C L, GUO Q Q, et al. Computational analysis of shear deformation effects on open thin-walled beams [J]. Structures,2022,36:678-690.

[13] MURÍN J, KUTIŠ V. An effective finite element for torsion of constant cross-sections including warping with secondary torsion moment deformation effect [J]. Engineering Structures, 2008, 30(10): 2716-2723.

[14] 魏娜, 张元海, 姚晓东. 波形钢腹板箱梁的约束扭转剪应力分析[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(4): 386-395.
WEI N,ZHANG Y H,YAO X D. Analysis on restrained torsional shear stresses of box girders with corrugated steel webs [J]. Applied Mathematics and Mechanics,2020,41(4):386-395.(in Chinese)

[15] 张元海,何嘉祥,王晨光,等. 开闭混合断面薄壁梁约束扭转分析[J]. 建筑结构学报,2020,41(2):166-172.
ZHANG Y H,HE J X,WANG C G,et al. Analysis on restrained torsion of thin-walled beams with open-closed mixed section[J]. Journal of Building Structures, 2020, 41 (2) : 166-172. (in Chinese)

[16] 徐勋,叶华文,强士中. 带悬臂板薄壁箱梁的扭转和畸变分析[J]. 铁道学报,2015,37(10):83-91.
XU X,YE H W,QIANG S Z. Torsion and distortion analysis of thin-walled box girder with cantilever flanges[J]. Journal of the China Railway Society,2015,37(10):83-91.(in Chinese)

[17] 夏桂云, 李传习, 杨美良. 薄壁箱梁约束扭转的有限元分析及弯扭力矩新算法[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2019, 46(1): 85-92.
XIA G Y, LI C X, YANG M L. Finite element analysis of restrained torsion and new algorithm of flexural-torsional moment for thin-walled box girder [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences),2019,46(1): 85-92.(in Chinese)

[18] CAMBRONERO-BARRIENTOS F, DÍAZ-DEL-VALLE J, MARTÍNEZ-MARTÍNEZ J A. Beam element for thin-walled beams with torsion, distortion, and shear lag [J]. Engineering Structures,2017,143:571-588.

[19] LEET K, UANG C M, LANNING J T, et al. Fundamentals of Structural Analysis [M]. 5th ed. New York: McGraw-Hill Education,2018.

[20] 龙驭球, 包世华, 袁驷. 结构力学[M] 4版. 北京:高等教育出版社,2020.
LONG Y Q, BAO S H, YUAN S. Structural mechanics[M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2020.(in Chinese)

[21] ZHAO C,ZHOU Y,ZHONG X G,et al. A beam-type element for analyzing the eccentric load effect of box girder bridges [J]. Structures,2022,36:1-12.

[22] BAO S H, ZHOU J. Structural Mechanics[M]. Wuhan: Wuhan University of Technology Press, 2013.

[23] HEINS C P. Bending and torsional design in structural members [M]. London,Lexington,Mass:Lexington Books,1975.

[24] 吴昊. 力法去弹性支座多余约束的一种处理方式[J]. 力学与实践,2023,45(5): 1183-1187.
WU H. An approach of removing redundant elastic support for solving statically indeterminate structure by the force method[J]. Mechanics in Engineering,2023,45(5):1183-1187.(in Chinese)