文章编号:1674-2869(2026)03-0343-06

基于“辩证”思路的水力压裂数值计算

吴彬彬,李尧誉,龙恭博*,赵宁致,安松松,邱乐天,周 龙
武汉工程大学机电工程学院,湖北 武汉 430205

摘 要:在水力压裂作业中,为应对应力阴影效应及地应力梯度的不利作用,往往需施加较高的射孔摩阻。然而,该操作易导致井底压力异常升高,进而可能引发压裂施工失败。针对该问题,使用FrackOptima全三维水力压裂软件和前期研究提出的射孔冲蚀模型与滤失模型建立算例,采用综合性边界元法对网格进行离散化处理,并结合时间步长算法进行流固耦合数值仿真,定量研究了射孔数目分布对裂缝最终形态、压裂液分布以及井底压力的影响规律。研究结果表明,为了获得较均匀的多簇裂缝形态和压裂液分布,不需要使用射孔摩阻同时克服应力阴影效应和地应力梯度,而是辩证地将二者分别对待:在地应力较小的区域,主要影响因素是应力阴影效应,此时应设置较少的射孔数,提高射孔摩阻克服应力阴影效应;而在地应力较大的区域,主要影响因素是地应力梯度,此时应适当增加射孔数,确保足够的压裂液流体压力去克服地应力梯度。在本文算例参数条件下,4个射孔簇的孔眼数分别为12、14、16、24时,可以确保井底压力在实际压裂安全范围内,同时实现较均匀的多簇裂缝形态和压裂液分布。这一“辩证”思路能够为高效、安全的实际压裂方案设计提供理论指导。

关键词:水力压裂;应力阴影效应;地应力梯度;射孔数;数值计算
中图分类号:TE357.1 **文献标志码**:A **DOI**:10.19843/j.cnki.CN42-1779/TQ.202509002

Numerical simulation of hydraulic fracturing based on a dialectical approach

WU Binbin, *LI Yaoyu*, *LONG Gongbo**, *ZHAO Ningzhi*, *AN Songsong*, *QIU Letian*, *ZHOU Long*
School of Mechanical and Electrical Engineering, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430205, China

Abstract: In hydraulic fracturing, excessively high perforation friction pressure is often required to overcome the adverse effects of both stress shadowing and in situ stress gradients, which can lead to excessive downhole pressure and eventual fracturing failure. To address this issue, in this study we established numerical cases using the full 3D hydraulic fracturing simulator FrackOptima, along with a previously developed perforation erosion model and fluid loss model. Discretization was performed using a combined boundary element method, and fluid-solid coupling was simulated numerically with a time-stepping algorithm. The influence of perforation cluster distribution on final fracture geometry, fracturing fluid distribution, and downhole pressure was quantitatively investigated. The results indicated that achieving relatively uniform multi-fracture geometry and fluid distribution did not require the use of perforation friction to simultaneously overcome both stress shadowing and the in situ stress gradient. Instead, a dialectical approach should be adopted, treating the two factors separately: in regions with lower in situ stress, stress shadowing is the dominant factor, and fewer perforations should be used to increase perforation friction to counteract it; in regions with higher in situ stress, its gradient dominates, and perforation numbers should be appropriately increased to ensure sufficient fluid pressure to overcome the stress gradient. Under the

收稿日期:2025-09-03
基金项目:湖北省自然科学基金(2019CFB103);湖北省教育厅重点项目(D20201505)
作者简介:吴彬彬,硕士研究生。Email:wubinbin47@163.com
***通信作者**:龙恭博,博士,副教授。Email:longgongbo@163.com
引文格式:吴彬彬,李尧誉,龙恭博,等. 基于“辩证”思路的水力压裂数值计算[J]. 武汉工程大学学报,2026,48(3):343-348.

parameters used in this study, a perforation distribution of 12, 14, 16, and 24 across four clusters ensured that downhole pressure remained within the safe range for practical fracturing operations while achieving relatively uniform multi-fracture geometry and fluid distribution. This dialectical reasoning provides theoretical guidance for designing efficient and safe fracturing treatments.

Keywords: hydraulic fracturing; effect of stress shadowing; in situ stress gradient; perforation number; numerical simulation

水力压裂是一种能够经济、高效开发非常规油气储集层的关键技术[1-3]。在压裂作业时,地面高压泵将含固体支撑剂颗粒的压裂液加压注入油井井筒,压裂液在高压作用下高速通过井筒壁的射孔簇,从而在射孔簇对应区域的储集层形成水力裂缝,并推动裂缝持续扩展生长[4]。从理想工况来看,若压裂液能在各射孔簇间实现较均匀的分配,便可保障多簇裂缝同步起裂且均匀发育,最终为后续生产阶段各射孔簇处油气的均衡产出创造条件[5]。然而,生产测井统计结果[5-7]显示:在实际压裂过程中,仅约20%的射孔簇能够成为"优先簇",大部分压裂液首先汇入该类簇并促进其裂缝优先生长。由此造成油气产量高度集中于优先簇,占比可达约80%,且仍有近30%簇难以形成有效裂缝,几乎无油气产出,难以实现"各射孔簇处油气均衡产出"的目标。造成这一现象的原因主要有两点:第一是应力阴影效应。即多条水力裂缝同时扩展时,每条裂缝都会将其扩展产生的额外压应力作用于其他裂缝,使得外部射孔簇处起裂的裂缝所受压力少于内部射孔簇处起裂的裂缝,从而优先发育[8-9]。第二是地应力梯度。由于重力作用,地应力随储集层深度增加而增加。射孔簇所在区域地应力较小时,在该处起裂的裂缝所需克服的阻力较小,因此优先发育;而射孔簇所在区域的地应力较大时,在该处起裂的裂缝需要克服的阻力较大,因此发育较慢[10-11]。上述两个因素耦合,会使得各裂缝发育得更加不均匀[4]。

相关研究[10-12]表明:可借助"限流压裂"以缓解应力阴影与地应力梯度的负效应。通过减少孔数/孔径来增大射孔摩阻,使两类因素达到相对平衡,从而促使裂缝更趋均匀扩展。但是,这些研究同时指出:若要同时消除上述两者因素的影响,往往需要过高的射孔摩阻,井底压力随之升高并可能突破现场安全允许范围。因此,本文使用前期已建立的射孔冲蚀模型与双裂缝滤失模型,并耦合FrackOptima全三维水力压裂软件开展数值模拟计算,定量研究不同地应力处的射孔数目分布对压裂结果的影响,为实际复杂工况条件下的压裂优化设计提供理论依据。

1 水力压裂数值模型

1.1 射孔冲蚀模型

根据伯努利方程,压裂液从井筒较大直径截面(单位以m计)高速进入微小射孔通道(单位以mm计)时,会产生压力降[4]:

$$\begin{cases} p_{ri} = \left(\dfrac{8\rho}{\pi^2 C_{di}^2 D_i^4 n_i^2} \right) q_{Vi}^2 \\ Q = \sum_{i=1}^{m} q_{Vi} \end{cases} \tag{1}$$

式(1)中:p_{ri}为第i簇的射孔摩阻;ρ为压裂液密度;C_{di}为第i簇的流量系数,该系数可表征射孔入口处的几何形状(图1)对射孔摩阻的影响;D_i为第i簇的射孔直径;n_i为第i簇的射孔数;q_{Vi}为压裂液流经第i簇的体积流量;Q为压裂液总注入流量;m为射孔簇总数。本文物理量的单位均采用国际单位制。

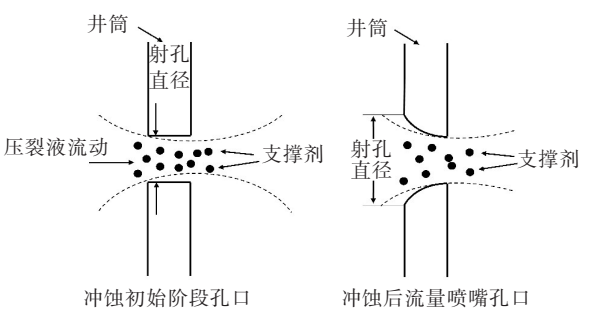

图1 射孔冲蚀示意图

Fig. 1 Schematic diagram of perforation erosion

现场工况下,高速流动的压裂液携带的支撑剂颗粒,在流经射孔孔道时,会对射孔壁产生持续的冲蚀,使射孔直径与流量系数逐渐增大,从而导致射孔摩阻逐步降低,削弱射孔摩阻克服应力阴影效应和地应力梯度的作用[4]。本文采用课题组前期研究得到的射孔冲蚀模型量化表征冲蚀过程[4]:

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \alpha C v^2 \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}C_\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\beta Cv^2\left(1-\frac{C_\mathrm{d}}{C_\mathrm{d}^{\max}}\right) \tag{3}$$

式(2-3)中：C为支撑剂浓度，v为压裂液流速，二者平方乘积Cv^2可量化表征支撑剂的动能。最大流量系数$C_\mathrm{d}^{\max}$取值区间0.60~0.95；$(1-C_\mathrm{d}/C_\mathrm{d}^{\max})$作为饱和函数项，用来量化表征冲蚀过程中$C_\mathrm{d}$随冲蚀发展增大至$C_\mathrm{d}^{\max}$后保持恒定的变化规律。该模型认为：流量系数$C_\mathrm{d}$与射孔直径$D$的冲蚀变化率，均与支撑剂的动能$Cv^2$呈正比关系。这和相关冲蚀实验结果一致。正比例系数$\alpha$和$\beta$是两个相互独立的实验参数，其具体数值可通过文献[13]中提出的拟合方法确定。

1.2　双裂缝滤失模型

实际压裂时，部分压裂液会以渗流的方式通过裂缝内表面进入储集层，无法有效推动裂缝扩展发育[4]。这一现象称为“滤失”，是决定裂缝最终尺寸形状的重要因素之一。目前，压裂软件普遍采用一维卡特模型计算压裂液的滤失[14]。但是，该模型的构建以单条裂缝的渗流滤失为理论基础，与当前实际压裂作业中“多射孔簇同步起裂，推动裂缝同步扩展”的工况存在差异。在多裂缝发育的复杂地质下，除需关注裂缝间因压应力产生的相互作用(即应力阴影效应)外，各裂缝间的滤失行为也会相互影响。这就要求开展滤失计算时，必须充分考虑裂缝之间滤失的相互影响。因此，本文采用课题组前期研究得到的双裂缝滤失模型来计算滤失[14]：

$$v_\mathrm{L}=\frac{4k\left(p_\mathrm{c}-p_0\right)}{\mu d}\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left[\frac{(2m-1)\pi}{d}\right]^2 Kt} \tag{4}$$

式(4)中：v_L为滤失速率；k为储集层渗透率；p_c和p_0分别为裂缝内部的压裂液流体压力和储集层介质的孔隙压力；μ为压裂液黏度；d为裂缝(射孔簇)间距；K为扩散系数，表达式为：

$$K=\frac{k}{\mu\phi c_\mathrm{t}} \tag{5}$$

式(5)中：c_t为压缩率，ϕ为孔隙率。

和一维卡特模型相比，双裂缝滤失模型考虑了裂缝之间滤失的相互影响，并引入裂缝间距d作为关键参数。

1.3　FrackOptima压裂软件

本文采用课题组和华裔学者徐冠水教授课题组联合开发的全三维压裂软件FrackOptima进行数值计算研究。该软件基于全三维位错理论的综合性边界元离散方案，裂缝内流动按润滑近似处理，固-流耦合与支撑剂运移采用时间步长算法。该软件已在国际及国内多家油气公司得到了应用[15]。该软件使用式(1)~式(3)计算射孔冲蚀导致的射孔摩阻瞬时动态变化，使用式(4)~式(5)计算滤失。相关方程细节请见文献[16]。

2　水力压裂数值计算

本文算例研究的水力压裂基本结构如图2所示，上下两层厚度为400 m的应力屏障层将厚度为20 m的储集层约束在中间。顶部应力屏障层地应力σ始终维持在42.5 MPa。储集层在垂直方向上均匀划分为4层，第1层地应力为30 MPa，以下各层间地应力按恒定梯度$\Delta\sigma$逐层递增。底部屏障层地应力则比储集层第4层高出12.5 MPa。相关研究[4]表明：$\Delta\sigma$最大取值不超过4 MPa，即使$\Delta\sigma$=4 MPa，顶部屏障层地应力仍高于储集层第4层，能够对裂缝缝高形成有效约束。因此，在分析裂缝发育尺寸时，可忽略缝高影响，仅需分析缝长与缝宽分布。4个射孔簇均匀分布在大斜度井上，每簇间距为d=15 m。

图2中大斜度井的相关几何尺寸严格按照比例绘制，井筒倾斜角∂确保示意图中的井筒分布与实际工况下高度吻合。算例假设：储集层采用均匀各向同性的弹性介质，地应力梯度$\Delta\sigma$=3 MPa；压裂液在每个射孔间呈均匀分布状态；压裂液视为黏度恒定的牛顿流体；支撑剂是圆度为1的球形颗粒。前期研究[9]表明，此参数条件下，水平10 m、垂直5 m的网格尺寸可确保数值模拟稳定且结果准确；此外，针对上述支撑剂物性，前期研究还明确α=1.07×10^{-13} (m^2·s)/kg，β=1.08×10^{-8} (m·s)/kg[9]。

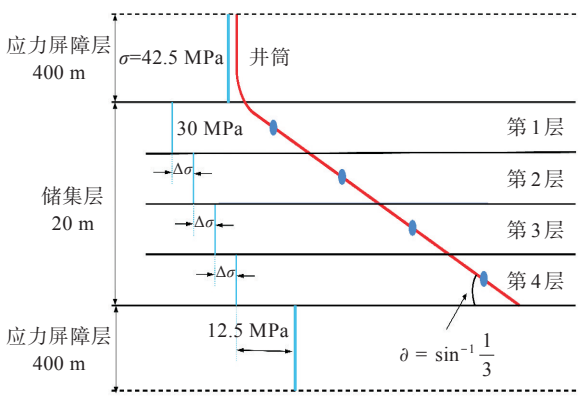

图2　水力压裂基本结构示意图

Fig. 2　Schematic diagram of hydraulic fracturing structure

此外，根据实际工况[10-11]，设置如表1和表2所示的算例基本参数。

表1 算例基本参数取值

Table 1 Basic parameters for the numerical case

储集层物性参数					
杨氏模量 / GPa	泊松比	p_0 / MPa	k / m^2	ϕ	韧性 / (MPa·$m^{0.5}$)
30	0.2	20	10^{-18}	0.1	1.5
射孔物性参数					
D / mm	初始 C_d	C_d^{max}	每簇孔数		
10	0.6	0.9	12		
流体物性参数					
μ / (Pa·s)	ρ / (kg/m^3)	c_t / Pa^{-1}			
0.01	1 010	10^{-4}			
支撑剂物性参数					
直径 / mm	密度 / (kg/m^3)				
0.4	2 600				
井筒物性参数					
直径 / mm	粗糙度	网格尺寸 / m			
150	0	10(水平)× 5(垂直)			

表2 施工排量参数

Table 2 Parameters of pumping schedule

流量 / (m^3/s)	持续时间 / min	C / (kg/m^3)
0.16	20	0
0.16	20	51.02
0.16	20	104.17
0.16	20	159.57
0.16	20	217.39

3 计算结果及分析

本文重点研究射孔数分布对压裂结果的影响。图3展示了射孔数目按 n_1=n_2=n_3=n_4=12 均匀分布时,压裂作业完成后的各射孔簇的裂缝形态。图3中4条裂缝自上而下依次对应射孔簇1至射孔簇4,且图中同步标注了各裂缝的缝宽分布与缝长数据,以此实现对裂缝形态的定量描述。该图表明,射孔簇4因为处于地应力最大区域,其对应裂缝发育阻力过大,因此未成功发育,使得4条裂缝发育很不均匀。

图4为上述射孔数均匀分布时,4个射孔簇在压裂过程中的压裂液体积动态分布。在理想情况下,压裂液应在四簇间实现均匀分配,即每簇分得总体积的25%。体现在压裂液流入体积分布百分比图中,可通过体积分布曲线与1条自原点出发以恒定斜率上升至25%的参考直线进行对比,来判断压裂液的分布情况。因此,体积分布曲线越贴近该参考直线,表明压裂液分布越均匀。在图4中,只有极少一部分压裂液在约第27 min之前流

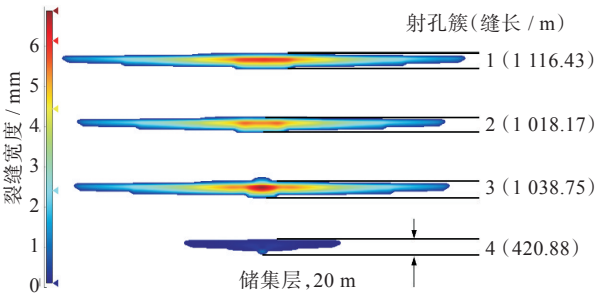

图3 射孔数均匀分布 n_1=n_2=n_3=n_4=12 时计算得到的裂缝图

Fig. 3 Fractures obtained with a uniform perforation distribution (n_1=n_2=n_3=n_4=12)

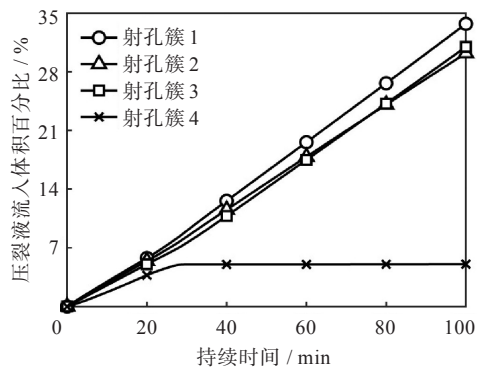

图4 射孔数均匀分布 n_1=n_2=n_3=n_4=12 时的压裂液体积分布百分比

Fig. 4 Percentage distribution of fracturing fluid volume with uniform perforation distribution (n_1=n_2=n_3=n_4=12)

经射孔簇4,此后便没有压裂液流经,使得射孔簇4处的裂缝几乎没有发育。

图5中的带圆曲线显示的是射孔数均匀分布时的井底压力。由图5可知,该井底压力逐渐逼近压裂施工安全阈值45 MPa。

图3~图5表明,当每簇射孔数为12时,限流压裂无法克服应力阴影效应和地应力梯度,也就无法获得较均匀的水力裂缝和压裂液分布。此外,该参数条件下的井底压力逼近了实际压裂安全阈值。因此,如果选择减少射孔数来提高射孔摩阻以克服应力阴影效应和地应力梯度,会增加井底压力,容易使之突破安全阈值,导致压裂失败。因此,不能盲目减少射孔数以期克服应力阴影效应和地应力梯度。

相关文献表明[17-18],在地应力较大区域适当增加射孔数目,能够增加连接射孔簇和储集层之间的通道,使压裂液更加容易流经这些射孔簇。因此,本文将射孔数分布调整为:n_1=12, n_2=14, n_3=16, n_4=18。图6和图7分别显示该条件下的裂缝形态和压裂液分布。

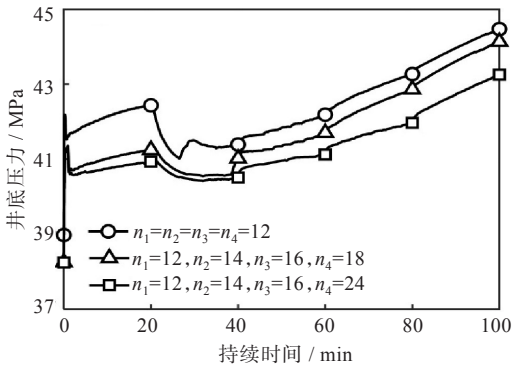

图5　压裂过程中的井底压力动态变化

Fig. 5　Downhole pressure dynamics during fracturing process

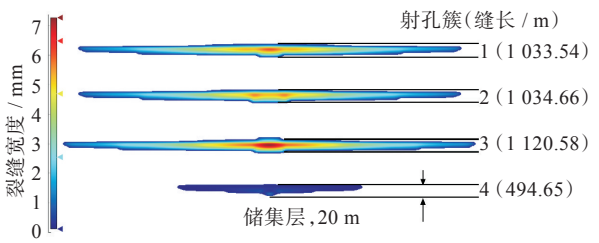

图6　n_1=12，n_2= 14，n_3=16，n_4=18时计算得到的裂缝图

Fig. 6　Fractures obtained with n_1=12，n_2= 14，n_3=16，n_4=18

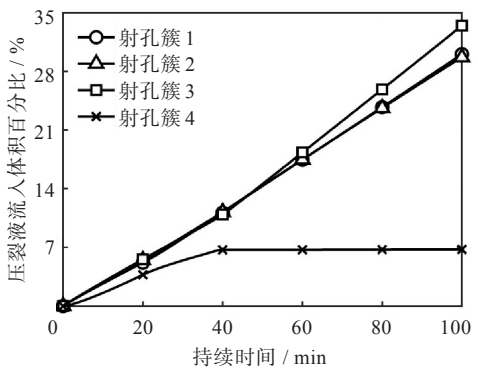

图7　n_1=12，n_2= 14，n_3=16，n_4=18时的压裂液体积分布百分比

Fig. 7　Percentage distribution of fracturing fluid volume with n_1=12，n_2= 14，n_3=16，n_4=18

图6和图7表明，n_1=12、n_2=14、n_3=16、n_4=18时的射孔数分布依然无法获得较均匀的裂缝发育和压裂液分布。比较图4和图7可知，非均匀分布的射孔依然使得射孔簇1~射孔簇3获得了大量的压裂液分布。该条件下，从约第40 min开始，就没有压裂液通过射孔簇4。该现象发生的时间晚于射孔数均匀分布条件下的约第27 min。这表明，虽然压裂结果的非均匀性有所改善，但是n_4=18仍不足以同时抑制应力阴影效应和地应力梯度，也无法为射孔簇4建立足够的通道来连通储集层和井筒。

当n_2=14时，这14个射孔为射孔簇2搭建了充足的连通通道，促使通过射孔簇2的压裂液体积与射孔簇1的压裂液体积基本处于同一水平。而n_3=16时，这16个射孔为射孔簇3搭建了“过度”的通道连接储集层和井筒，使得射孔簇3获得了最多的压裂液。

基于上述结果，为了获得较均匀的裂缝发育和压裂液分布，将射孔簇4射孔数n_4增加至24，确保在地应力最大处的射孔簇4也能建立足够的连接通道。图8和图9分别显示该条件下的裂缝形态和压裂液分布。

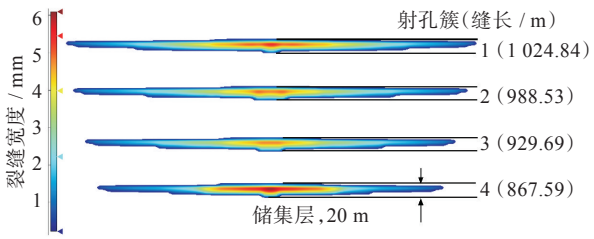

图8　n_1=12，n_2= 14，n_3=16，n_4=24时计算得到的裂缝图

Fig. 8　Fractures obtained with n_1=12，n_2= 14，n_3=16，n_4=24

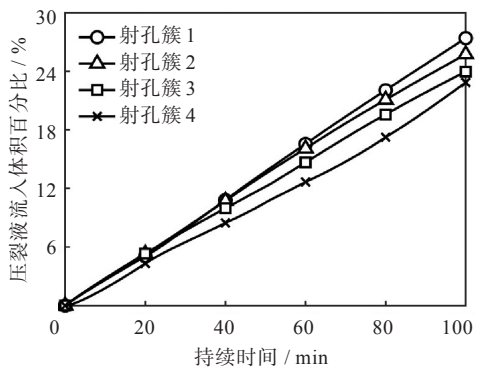

图9　n_1=12，n_2= 14，n_3=16，n_4=24时的压裂液体积分布百分比

Fig. 9　Percentage distribution of fracturing fluid volume with n_1=12，n_2= 14，n_3=16，n_4=24

图8表明，n_1=12、n_2=14、n_3=16、n_4=24时的射孔数分布能够获得较均匀的4条水力裂缝。图9中的4条曲线均趋向于25%，而且它们的斜率差别不大。这表明，4个射孔簇的压裂液流量分布较为均匀。因此，射孔簇4的24个射孔可以为其提供足够的连接通道。此外，图5中3种射孔数分布条件下的井底压力变化也表明，n_1=12、n_2=14、n_3=16、n_4=24时的井底压力最小，因此该参数条件下的压裂也最安全。

上述计算结果和相关油田现场数据[10-11]体现的射孔数分布优化趋势一致。这表明，不宜过度通过减少射孔数来增加射孔摩阻以同时克服应力阴影效应和地应力梯度，否则容易造成井底压力过大，导致压裂失败。应该辩证地将二者分别对待：在地应力较小的区域，主要影响因素是应力阴

影效应，此时应设置较少的射孔数，提高射孔摩阻克服应力阴影效应；而在地应力较大的区域，主要影响因素是地应力梯度，此时应适当增加射孔数，增加储集层和井筒的连接通道，确保足够的压裂液流体压力去克服地应力梯度。这一“辩证”思路既可以确保较均匀的多簇裂缝形态和压裂液分布，也可以确保井底压力在实际压裂安全范围内。

4 结 论

为了解决水力压裂过程中需要极大的射孔摩阻克服应力阴影效应和地应力梯度容易产生过大井底压力导致压裂失败的问题，使用FrackOptima全三维水力压裂软件和前期研究提出的射孔冲蚀模型与滤失模型建立算例，开展数值计算研究，得到如下结论：

（1）仅仅通过减少射孔数来提高射孔摩阻，很难同时克服应力阴影效应和地应力梯度，而且容易使得井底压力过高，造成压裂失败。

（2）本文基于“辩证”思路提出应根据不同射孔簇区域地应力大小来确定该簇射孔数。在地应力较小区域，应设置较少的射孔数；而在地应力较大区域，应适当增加射孔数。该辩证设孔方案可在保障施工安全的前提下，有效促进多簇裂缝均匀扩展。因此，在算例参数条件下，选取n_1=12、n_2=14、n_3=16、n_4=24的射孔数分布较为适宜。

（3）射孔冲蚀模型与双裂缝滤失模型均假设射孔几何形状为圆形，而实际压裂中射孔多呈“梨形”，未考虑射孔圆度，后续将结合油田实际测试数据修正理论假设，优化模型以提升工程适用性。

参考文献

[1] 宋岩，李卓，姜振学，等. 非常规油气地质研究进展与发展趋势[J]. 石油勘探与开发，2017，44(4)：638-648.

[2] 王作乾，范喆，陈希，等. 2023年度全球油气开发现状、形势及启示[J]. 石油勘探与开发，2024，51(6)：1331-1346.

[3] 覃建华，鲜成钢，张景，等. 基于水力压裂现场实验室的致密砾岩人工缝网特征[J]. 石油勘探与开发，2025，52(1)：217-228.

[4] LONG G B，XU G S. The Effects of perforation erosion on practical hydraulic-fracturing applications [J]. SPE Journal，2017，22(2)：645-659.

[5] ELGIBALY A，OSMAN M A. Perforation friction modeling in limited entry fracturing using artificial neural network [J]. Egyptian Journal of Petroleum，2019，28(3)：297-305.

[6] TAN L，XIE L Z，HE B，et al. Multi-fracture propagation considering perforation erosion with respect to multi-stage fracturing in shale reservoirs [J]. Energies，2024，17(4)：828.

[7] YI L P，FANG J X，LI X G，et al. Study on multi-cluster fracture propagation and quantitative evaluation method considering perforation erosion [J]. Petroleum Science and Technology，2025，43(21)：3084-3109.

[8] 赵金洲，陈曦宇，李勇明，等. 水平井分段多簇压裂模拟分析及射孔优化[J]. 石油勘探与开发，2017，44(1)：117-124.

[9] 袁传澳，聂嘉龙，龙恭博，等. 水力压裂过程中射孔冲蚀效应的数值模拟研究[J]. 武汉工程大学学报，2024，46(1)：72-78.

[10] CRAMER D，FRIEHAUF K，ROBERTS G，et al. Integrating distributed acoustic sensing，treatment-pressure analysis and video-based perforation imaging to evaluate limited-entry-treatment effectiveness [J]. SPE Production & Operations，2020，35(4)：730-755.

[11] YI S，WU C H，SHARMA M M. Optimization of plug-and-perforate completions for balanced treatment distribution and improved reservoir contact [J]. SPE Journal，2020，25(2)：558-572.

[12] SHI X，YANG Y Y，KONG X W，et al. Experimental study of hydraulic fracture propagation with multi-cluster in-plane perforations in a horizontal well [J]. Petroleum Science，2024，21(5)：3258-3270.

[13] LONG G B，LIU S X，XU G S，et al. Modeling of perforation erosion for hydraulic fracturing applications [C]// SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Richardson：Society of Petroleum Engineers (SPE)，2015：3208-3221.

[14] 周鹏，周龙，龙杨忠，等. 基于双裂缝滤失模型的水力压裂数值模拟[J]. 湖北理工学院学报，2025，41(2)：9-14.

[15] ZHAI Z Y，FONSECA E，AZAD A，et al. A new tool for multi-cluster & multi-well hydraulic fracture modeling [C]// SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference. Richardson：Society of Petroleum Engineers，2015：600−610.

[16] WONG S W，GEILIKMAN M，XU G S. Interaction of multiple hydraulic fractures in horizontal wells [C]// SPE Middle East Unconventional Gas Conference and Exhibition. Richardson：Society of Petroleum Engineers (SPE)，2013：335-344.

[17] LECAMPION B，DESROCHES J. Simultaneous initiation and growth of multiple radial hydraulic fractures from a horizontal wellbore [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids，2015，82：235-258.

[18] WU K，OLSON J，BALHOFF M T，et al. Numerical analysis for promoting uniform development of simultaneous multiple-fracture propagation in horizontal wells [J]. SPE Production & Operations，2017，32(1)：41-50.

本文编辑：霍淑利