

基于 GRA-BP 模型预测排球扣球落地的 vGRF

刘淑婷, 邱沐恩, 李卫

(北京体育大学体能训练学院, 100084 北京)

摘 要:目的 建立灰色关联度分析 (grey relational analysis, GRA) 和 BP 神经网络 (BP neural network) 的耦合数学模型来预测排球运动员扣球落地的垂直地面反作用力 (vertical ground reaction force, vGRF) 从而来代替三维测力台。方法 选取北京体育大学 20 名二级排球运动员, 采取两步助跑方式进行排球扣球动作演示, 通过运动捕捉系统和三维测力台同步采集运动学和动力学数据。采用 OpenSim 计算排球运动员在进行两步助跑扣球落地时的运动学数据。采用 GRA 来筛选关联度低于 0.98 的运动学指标, 采用均方根误差、平均绝对百分比误差和平均绝对误差、 R 作为 GRA-BP 模型的评价指标, 使用肯德尔 W 系数评价预测 vGRF 与测量 vGRF 之间的一致性。结果 GRA 结果显示骨盆前后倾角度、骨盆左右倾角度、骨盆旋转角度等 13 个运动学数据关联度高于 0.98。训练集中预测值与测量值间均方根误差为 0.271 BW, 平均绝对百分比误差为 4%, 平均绝对误差为 0.17 BW, $R=0.999$; 验证集中预测值与测量值间均方根误差为 0.235 BW、平均绝对百分比误差为 3.9%, 平均绝对误差为 0.14 BW, $R=0.998$; 测试集中预测值与测量值间均方根误差为 0.224 BW, 平均绝对百分比误差为 3.6%, 平均绝对误差为 0.14 BW, $R=0.998$; 肯德尔 W 系数为 0.945, $P \leq 0.001$ 。结论 本研究所建立的 GRA-BP 模型可提高排球运动员扣球落地 vGRF 测量的准确性, 缩短测量时间。

关键词:垂直地面反作用力; 灰色关联度分析; 神经网络; 排球扣球; OpenSim

中图分类号: G842 文献标志码: A DOI: 10.11776/j.issn.1000-4939.2026.01.021

文章编号: 1000-4939(2026)01-0224-12 CSTR: 32414.14.cjam.issn.1000-4939.2026.01.021

vGRF based on GRA-BP model for predicting volleyball dunk landings

LIU Shuting, QIU Mu'en, LI Wei

(School of Physical Training, Beijing Sport University, 100084 Beijing, China)

Abstract: **Objective** To establish a coupled mathematical model of grey relation analysis (GRA) and BP neural networks to predict the vertical ground reaction force (vGRF) of a volleyball player's dunked ball to the ground to replace a three-dimensional force measuring table. **Methods** Twenty volleyball players from Beijing Sport University were selected to demonstrate the volleyball dunking action with two-step run-

收稿日期: 2025-05-26

基金项目: 国家体育总局科技服务项目 (No. BSU20240236); 专用风洞及气动减阻装备研发项目 (No. 2020YFF0304601)

通信作者: 李卫, 教授。E-mail: liweiwin@sina.com

引用格式: 刘淑婷, 邱沐恩, 李卫. 基于 GRA-BP 模型预测排球扣球落地的 vGRF[J]. 应用力学学报, 2026, 43(1): 224-235.

LIU Shuting, QIU Mu'en, LI Wei. vGRF based on GRA-BP model for predicting volleyball dunk landings[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2026, 43(1): 224-235.

ning, and their kinematics and dynamics data were simultaneously collected by the motion capture system and the 3D force measuring table. Opensim was used to calculate the kinematic data of the volleyball players' two-step running dunks. GRA was used to screen kinematic indicators with correlations lower than 0.98. Root mean square error, mean absolute percentage error, mean absolute error, and R were used as the evaluation indexes of the GRA-BP model, and Kendall's W coefficient was used to evaluate the consistency between predicted vGRF and measured vGRF. **Results** The GRA results showed 13 kinematic data correlations of anterior-posterior pelvic tilt angle, left-right pelvic tilt angle, and pelvic rotation angle were all higher than 0.98. The R_{RMSE} between predicted and measured values in the training set was 0.271 BW, the R_{MAPE} was 4%, the R_{MAE} was 0.17 BW, and the R was 0.999. The R_{RMSE} between predicted and measured values in the validation set was 0.235 BW, R_{MAPE} was 3.9%, R_{MAE} was 0.14 BW, and R was 0.998. Between predicted and measured values in the test set, the R_{RMSE} was 0.224 BW, R_{MAPE} was 3.6%, R_{MAE} was 0.14 BW, and R was 0.998; the coefficient of Kendall's W was 0.945 ($P \leq 0.001$). **Conclusion** The GRA-BP model established by this study can be significantly improved. GRA-BP model can significantly improve the accuracy of vGRF of volleyball players' dunk landing and significantly shorten the measurement time.

Key words: vertical ground reaction force; grey relational analysis; neural network; volleyball spike; OpenSim

排球是全球最受欢迎的体育运动之一,拥有约8亿爱好者。作为一项高强度跳跃运动,排球运动员在训练和比赛中频繁完成起跳和落地动作。据报道,美国国家排球队的每名队员在4h训练中可能完成300~500次扣球和拦网跳跃^[1]。另一项研究表明,在比赛中,排球运动员的每小时最大跳跃次数可超过60次,其中扣球手的跳跃频率高于其他位置的运动员^[2]。跳跃-落地顺序与排球运动员的运动损伤高度相关,不仅受比赛中扣球和拦网频率的影响,还与排球扣球时起跳和落地的下肢刚度密切相关^[3]。在排球运动中,垂直地面反作用力(vertical ground reaction force, vGRF)是衡量运动员受力情况和损伤风险的关键指标^[4]。vGRF在运动损伤监测、生物力学分析和临床评估方面至关重要,被认为是排球运动损伤的决定性因素^[5]。然而,当前vGRF的测量仍存在技术瓶颈。尽管三维测力台(3D force platform)作为专业设备可用于疲劳监控、下肢损伤分析等研究,但其安装成本高、环境要求严格,难以广泛应用于运动训练场景^[6]。

由于排球运动员扣球落地时的vGRF与运动学数据之间存在非线性关系,传统线性回归方法难以准确建模。BP神经网络(BP neural network)具有强大的非线性动态处理能力和高拟合精度,在生物力学研究中得到了广泛应用,并已成功用于关节力矩预测^[7-8]。因此,利用BP神经网络模型来估算排球运动员扣球落地时的vGRF,可作为三维测力台的替

代方案,为运动损伤监测提供经济可行的方法。影响排球扣球落地vGRF的运动学因素众多,不同变量对vGRF的影响程度存在差异。灰色关联度分析(grey relational analysis, GRA)作为一种常用的统计分析方法,可用于评估多个因素对最终结果的影响,提供全面的决策依据^[9]。目前,GRA作为一种定量评估变量关联程度的方法,已广泛用于工程、材料、医学等领域,但其在运动生物力学领域的应用仍相对有限^[10-13]。例如,TENG^[10]采用GRA优化卷积神经网络系统的构建,并用于药物评价;KONG等^[11]通过构建GRA神经网络模型预测骨料对混凝土渗透性的影响。与主成分分析、相关系数分析、互信息等常用特征选择方法相比,GRA无需大量样本数据,计算过程简洁,适用于样本量小、特征维度高的运动实验数据分析。特别是在涉及多个运动学变量对特定生物力学输出(如vGRF)影响关系的建模中,GRA具备更强的稳健性和可解释性^[12]。近年来,部分研究人员已开始尝试将GRA与机器学习方法结合,以提升模型性能和泛化能力。然而,将GRA与BP神经网络耦合用于运动负荷预测的研究仍然较少^[13-15]。

因此,本研究在方法路径上提出创新尝试,构建了GRA-BP神经网络融合模型,用于识别影响排球运动员扣球落地vGRF的关键运动学因子,并提升其预测精度。这一方法不仅丰富了GRA在运动生物力学领域的应用路径,也为运动负荷建模与智能

评估提供了新的理论框架与实证基础。这一方法不仅能降低对测力台的依赖,提高数据采集的可行性,还能为排球运动员的损伤预防和训练优化提供科学依据。

1 研究对象与方法

1.1 研究对象

本研究共招募 20 名来自北京体育大学的二级排球运动员(本研究已获得北京体育大学伦理会批准, No. 2025124H), 20 名男性年龄 (21.2 ± 1.4) 岁, 身高 (192.3 ± 2.9) cm, 体质量 (83.5 ± 2.6) kg, 受训时间 (8.8 ± 2.3) 年。

1.2 数据采集

以排球运动员扣球技术动作为研究对象, 收集排球运动员扣球时的运动学与动力学数据(运动学和动力学实验模型及起跳-扣球-落地实验测试照片见图 1), 每位受试者采集 10 次有效数据^[8]。

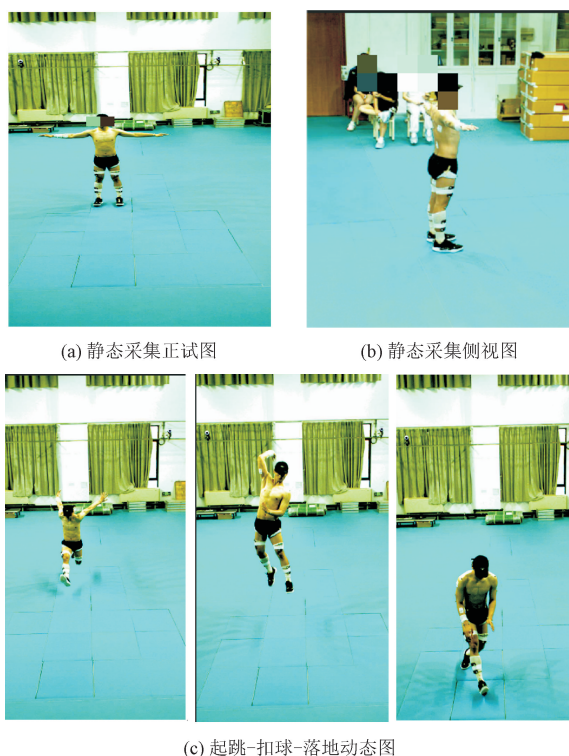


图 1 运动学和动力学受试者实验模型照片及起跳-扣球-落地实验测试照片

Fig. 1 Photographs of experimental models of kinematic and kinetic subjects and photographs of jump-spike-landing experimental tests

本研究采用关键时刻截取法提取起跳瞬间、扣球最高点、落地瞬间这 3 个时间点的数据, 分别记录每个角度变量的值。

1.3 数据处理

在使用 Qualisys 动作捕捉软件时, 首先, 使用 Qualisys 运动捕捉系统采集实验数据, 并将其导出为. C3D 格式文件^[16]。随后, 借助 MATLAB(2017b) 进行数据预处理, 将. C3D 文件转换为. trc(标记点轨迹数据)和. mot(地面反作用力数据)格式, 以便在后续分析中使用。接下来, 在 OpenSim 4.3 软件中, 基于 OpenSense_Subject 通用模型对数据进行 Scale 处理, 即按照受试者的解剖参数对模型进行缩放, 以提高个体化适配性。随后, 应用逆运动学(inverse kinematics, IK)方法, 通过最小化实验测量的标记点轨迹与计算模型标记点之间的误差, 优化关节角度计算精度^[17-20]。紧接着, 利用逆向动力学(inverse dynamics, ID)方法, 结合地面反作用力数据(mot 文件)和运动学数据(trc 文件), 计算各关节的力矩及动力学参数, 从而获得受试者在运动过程中的详细生物力学信息^[21]。将所计算的运动学数据以及 Kistler 三维测力台(9281B, Kistler 公司, 瑞典)的 vGRF 用来创建排球运动员扣球的运动学与动力学数据库, 建立数据集, 在本研究中, 通过 MATLAB 中的 cvpartition 函数随机将数据集按照 4:1 的比例划分为训练集和测试集, 再通过 crossvalind 函数从训练集中随机选取 20% 的数据作为验证集^[22]。

图 2 为进行完 IK 以后排球的扣球动作展示。



图 2 OpenSim 中排球扣球动作展示图

Fig. 2 Volleyball smashing action in OpenSim

运动学和动力学数据使用 OpenSim 中自带的滤波器进行滤波,截止频率为 6 Hz^[23-24]。以 vGRF(N)/(受试者体质量(kg)×重力加速度(N/kg))的方法对 vGRF 进行标准化处理^[3]。

1.4 数据统计

计算排球运动员采用两步助跑方式扣球落地时三维测力台所测 vGRF 与数学模型预测 vGRF 之间的均方根误差(root mean square error, RMSE)、平均绝对百分比误差(mean absolute percentage error, MAPE)和平均绝对误差(mean absolute error, MAE)、R。使用肯德尔 W(Kendall's W)系数评价预测 vGRF 与所测 vGRF 之间的一致性^[25]。

2 建立 GRA-BP 模型

2.1 灰色关联度分析

灰色关联度分析(grey relation analysis, GRA)的基本思想是利用开放数据结构中几何曲线的接近度来评估它们之间的关联是否接近^[9,12-13]。

数据预处理:在本研究中,共收集 200 个样本,包括运动学数据(39 个特征向量)和动力学数据(1 个特征向量)。

1) 确定分析数列。

vGRF 作为参考数列(又称母序列),即

$$Y = Y(\bar{h}), \bar{h} = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

运动学数据作为比较数列(又称子序列),即

$$X_i = X_i(\bar{h}), i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

2) 为了消除量纲的影响,对所有数据进行归一化处理。

$$X_i(\bar{h}) = \frac{X_i(\bar{h})}{\bar{X}_i} \quad (3)$$

其中: $\bar{h} = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, n; \bar{X}_i$ 为均值。

3) 计算运动学与动力学数据之间的关联系数。

$$a = \min_i \min_h |Y(\bar{h}) - X_i(\bar{h})| \quad (4)$$

其中, a 为两级最小差。

$$b = \max_i \max_h |Y(\bar{h}) - X_i(\bar{h})| \quad (5)$$

其中, b 为两级最大差。

$$\gamma(Y(\bar{h}), X_i(\bar{h})) = \frac{a + \rho b}{|Y(\bar{h}) - X_i(\bar{h})| + \rho b} \quad (6)$$

其中, ρ 一般取 0.5。

$$\gamma(Y, X_i) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \gamma(Y(\bar{h}), X_i(\bar{h})) \quad (7)$$

其中, $\gamma(Y, X_i)$ 为 Y 和 X_i 的灰色关联度。

$$\bar{\gamma}(Y, X_i) = \frac{\gamma(Y, X_1) + \gamma(Y, X_2) + \dots + \gamma(Y, X_i)}{i} \quad (8)$$

根据以上灰色关联分析的步骤计算出 39 个运动学特征向量对于 vGRF 的关联度。

2.2 构建 BP 神经网络

根据上述 vGRF 影响因素的灰色关联分析结果,选取关联度大于 0.98^[26] 的 13 个特征向量(骨盆前后倾角度、骨盆左右倾角度、骨盆旋转角度等)建立矩阵 $X_{200 \times 13}$ 输入到 BP 神经网络中。

本模型的拓扑结构为输入层、单隐藏层、输出层(图 3)。采用单隐藏层的原因是由于单隐藏层神经网络能以任意精度逼近非线性函数,从而实现从输入到输出的非线性映射^[13,27-28]。运用 MATLAB (2017b) 软件,输入层的节点数为 13 个,分别对应 vGRF 影响程度较大的 13 个运动学数据;输出层节点为 2,即测量 vGRF 与预测 vGRF;根据经验公式和 Kolmogorov 定律^[15],得到隐含层节点数取值范围为 10~20。经交叉验证,确定隐含层节点为 20,这样网络结构可以确定为 $13 \times 20 \times 2$ 。

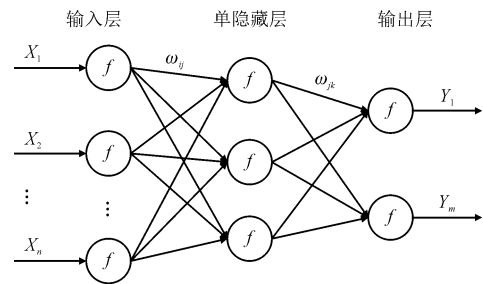


图3 BP神经网络结构

Fig. 3 BP neural network structure

其中: input = $\{X_1, X_2, \dots, X_{13}\}$; output = $\{Y_i, Y_m\}$; $\{X_1, X_2, \dots, X_{13}\}$ 为灰色关联筛选后的运动学数据; Y_i 为三维测力台所测的 vGRF 值; Y_m 为 BP 神经网络预测的 vGRF 值; ω_{ij} 与 ω_{jk} 分别为隐藏层与输出层对应的权重^[16]。

Tansig 函数作为激活函数,即

$$f(X) = \frac{2}{1 + e^{-X}} \quad (9)$$

1) 计算隐藏层输出 H

$$H_j = f\left(\sum_{i=1}^n \omega_{ij} X_i + a_j\right) \quad (10)$$

2) 计算预测输出 Y_i

$$Y_i = \sum_{j=1}^l H_j \omega_{jk} + b_k \quad (11)$$

式中: l 为隐藏层节点数; f 为隐藏层的激活函数。

3) 计算误差 e

$$e_k = Y_m - Y_i \quad (12)$$

4) 根据误差 e 反向传播更新网络连接权重 ω_{ij} 与 ω_{jk}

$$\omega_{ij} = \omega_{ij} + \eta H_j (1 - H_j) X(i) \sum_{k=1}^m \omega_{jk} e_k \quad (13)$$

$$\omega_{jk} = \omega_{jk} + \eta H_j e_k \quad (14)$$

其中, η 为学习速率, 学习率决定网络在每次迭代中更新权重的速度。学习率过高可能导致网络不稳定, 过低则会使训练过程缓慢。

5) 为了评价排球运动员扣球落地的 vGRF 预测的效果, 选择 R_{RMSE} 、 R_{MAPE} 、 R_{MAE} 和 R 作为预测结果的评价指标, 评价指标公式为^[17]

$$R_{\text{RMSE}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Y_m - Y_i)^2} \quad (15)$$

$$R_{\text{MAPE}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{Y_m - Y_i}{Y_m} \right| \times 100\% \quad (16)$$

$$R_{\text{MAE}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |Y_m - Y_i| \times 100\% \quad (17)$$

$$R = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})(Y_m - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N (Y_m - \bar{Y})^2}} \quad (18)$$

其中: Y_i 表示实际成绩; Y_m 表示预测成绩; N 表示预测项目的数量; $\bar{Y}$ 表示平均成绩。

训练步数(也称为迭代次数或训练轮数)通过设置训练目标最小误差来确定。在训练集上, 设置一个过低的目标误差可能导致模型过拟合, 即模型在训练数据上表现良好, 但在新数据上表现不佳, 通过观察验证集与测试集的误差来进行交叉验证。算法参数设置如下: 最大训练次数为 1 200 次, 学习速率设置为 0.01^[28-30], 训练目标最小误差为 0.000 1。

模型的评估与应用: 通过交叉验证等方法对模型进行评估, 以测试其性能。GRA-BP 预测模型图

如图 4 所示。

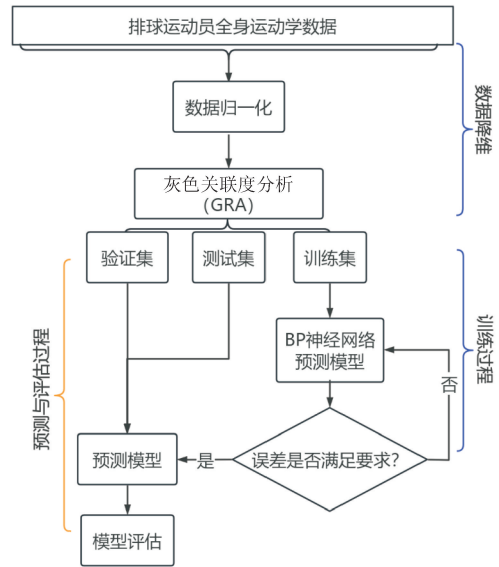


图 4 GRA-BP 预测模型图

Fig. 4 Diagram of GRA-BP predictive model

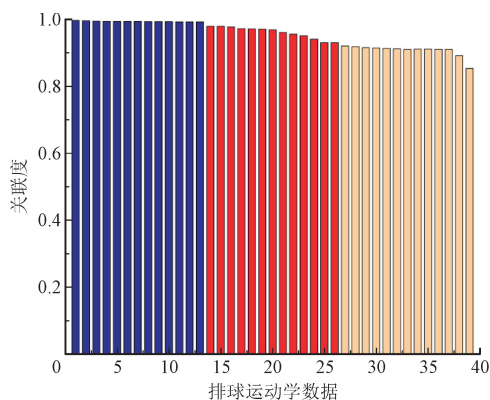
3 结果与分析

3.1 GRA 结果

梁旺东等^[26]通过筛选出所有指标的前 34% (在本研究中选取关联度大于 0.98) 来作为 BP 神经网络的输入层的特征向量。在本研究中, 初步选取 39 种运动学因素作为输入变量, 以尽可能全面地覆盖影响 vGRF 的潜在因素。随后, 通过特征筛选方法(灰色关联度分析), 提取了 13 种对预测精度影响较大的关键因素, 以降低数据冗余, 提高计算效率。虽然体质量、起跳高度和落地角度在影响垂直冲击力方面起重要作用, 但人体运动是一个复杂的系统, 多个变量可能存在交互作用。因此, 本研究采用较多的初始变量进行训练, 以确保模型能充分学习数据中的非线性关系, 并在特征筛选后保留最具代表性的因素, 提高预测的准确性和泛化能力。

经过 GRA 分析结果表明: 骨盆前后倾角度、骨盆左右倾角度、骨盆旋转角度等 13 个指标作为 BP 神经网络的输入(图 5 中 1~13 分别代表骨盆倾斜角、骨盆侧倾角、骨盆旋转角、右侧髋关节屈曲角、右侧髋关节内收角、右侧髋关节旋转角、右膝关节屈曲角、右膝关节内收角、右踝关节内收角、左侧髋关节屈曲角、左侧髋关节内收角、左侧髋关节旋转角、左膝关节屈曲角)。本研究筛选出的 13 个关键运动学

特征主要涵盖骨盆、髋关节、膝关节和踝关节 4 个部位的运动参数。能够描述排球运动员在扣球落地时的姿态变化、关节角度调整以及冲击吸收机制,从而影响 vGRF 及膝关节损伤风险^[27-31]。



注:深蓝色为关联度高于 0.98 的运动学指标

图5 排球运动学数据与 vGRF 关联度

Fig. 5 Correlation between volleyball kinematics data and vGRF

骨盆的运动在下肢生物力学中起着关键作用,它决定了躯干稳定性,并影响下肢运动的协调性^[32]。骨盆前倾/后倾角度描述骨盆在矢状面(前后方向)的倾斜程度。骨盆前倾通常伴随腰椎前凸增加,可能导致髋关节屈曲增大;骨盆后倾减少则可能导致膝关节屈曲角增加,影响落地缓冲策略。骨盆左右倾斜角度描述骨盆在冠状面(左右方向)的倾斜角度。较大的骨盆倾斜可能表示一侧下肢负重过大,导致 vGRF 不均衡增加,进而提高关节损伤风险,尤其是在单脚落地或侧向移动过程中。骨盆旋转角度描述骨盆在水平面上的旋转程度。骨盆旋转角度过大可能表明运动员在落地时出现扭转补偿动作,增加髋关节和膝关节的负担,进而影响运动效率和稳定性^[2,33]。

髋关节是下肢运动的核心枢纽,决定了下肢的力学负载和运动模式^[4,15,34]。右侧髋关节屈曲角描述髋关节在矢状面上的屈曲/伸展角度。落地时,适当的髋关节屈曲能够帮助缓冲冲击力,减少 vGRF 峰值;如果髋关节屈曲不足,可能导致膝关节负荷增加,提高损伤风险。右侧髋关节内收角描述髋关节在冠状面上的内收/外展角度。落地时过度内收(adduction 增大)可能会导致膝关节内扣,增加前交叉韧带损伤的风险。适当的外展减少有助于维持身体平衡,优化冲击分布。右侧髋关节内旋/外旋角度描述髋关节在水平面上的旋转程度。髋关节旋转异

常(过度内旋或外旋)可能会改变膝关节力矩,增加关节损伤风险,尤其是在落地时需要维持稳定性的情况下^[35]。

膝关节在运动过程中起到承重、吸收冲击和稳定下肢的作用,是 vGRF 影响最直接的部位之一^[8,20]。右侧膝关节屈曲角描述膝关节在矢状面上的屈曲/伸展角度。较大的膝关节屈曲角能够延长缓冲时间,降低 vGRF 峰值,从而减少膝关节损伤风险;膝关节过直(屈曲角较小)可能导致冲击力直接传递到关节,提高损伤概率。右侧膝关节 β 角,代表膝关节的力矩特性,主要用于量化膝关节的运动模式,结合力学计算膝关节受力情况。该指标可以反映膝关节在落地时的力矩变化,为评估关节稳定性和受力提供参考^[25]。

踝关节是地面反作用力传递到下肢的第一道关卡,影响整个下肢的运动链。右侧踝关节背屈/跖屈角度:描述踝关节在矢状面上的运动角度。落地时,适当的踝关节背屈有助于缓冲冲击力,减少 vGRF;跖屈过多可能导致落地刚性增大,提高关节负荷^[28]。

由于运动员通常是双脚落地,左侧关节参数与右侧相对应,同样影响落地冲击力的分布和运动模式。左侧髋关节屈曲角与右侧相似,屈曲角越大,缓冲能力越强,冲击力越小。左侧髋关节内收角过大可能导致膝关节内扣,增加损伤风险。左侧髋关节内旋/外旋角度与右侧相似,异常旋转可能增加膝关节力矩,影响稳定性。左侧膝关节屈曲角:膝关节屈曲不足可能导致冲击力集中在关节上,提高损伤风险^[14,20,34]。

综上所述,这些指标的选取不仅能提高 vGRF 预测的准确性,还能为运动损伤预防和运动表现优化提供科学依据。

3.2 BP 神经网络预测结果

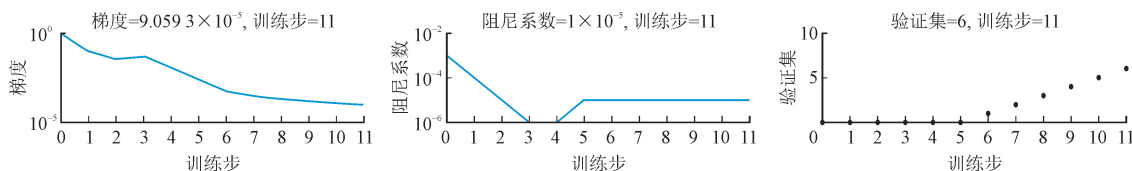
由表 1 可知, GRA-BP 模型中训练集中预测的 vGRF 与测量的 vGRF 之间的 R_{RMSE} 为 (0.271 ± 0.008) BW、 R_{MAPE} 为 4%、 R_{MAE} 为 (0.17 ± 0.0001) BW;验证集中预测的 vGRF 与测量的 vGRF 之间的 R_{RMSE} 为 (0.235 ± 0.0012) BW、 R_{MAPE} 为 3.9%、 R_{MAE} 为 (0.14 ± 0.0001) BW;测试集中预测的 vGRF 与测量的 vGRF 之间的 R_{RMSE} 为 (0.224 ± 0.0011) BW、 R_{MAPE} 为 3.6%、 R_{MAE} 为 (0.14 ± 0.0001) BW。GRA-BP 模型可以达到很好的预测效果,由图 6(a)可知 GRA-BP 模型在 11 步的时候就停止训练,训练状态良好。

由图 6(b) 可知 GRA-BP 模型中的训练集、测试集、验证集的 R 值都大于 0.998, 具有非常好的拟合效果。由图 7 可知排球扣球落地的预测 vGRF 曲线与测量曲线, 具有良好的拟合度。

表 1 GRA-BP 模型性能评估

Tab. 1 Performance evaluation of GRA-BP model

指标	R_{RMSE}/BW	R_{MAPE}	R_{MAE}/BW	R
训练集	$0.271 \pm 0.008\ 0$	0.040 ± 0.006	$0.17 \pm 0.000\ 1$	0.999 75
验证集	$0.235 \pm 0.001\ 2$	0.039 ± 0.005	$0.14 \pm 0.000\ 1$	0.998 95
测试集	$0.224 \pm 0.001\ 1$	0.036 ± 0.004	$0.14 \pm 0.000\ 1$	0.998 76



(a) 模型训练步数

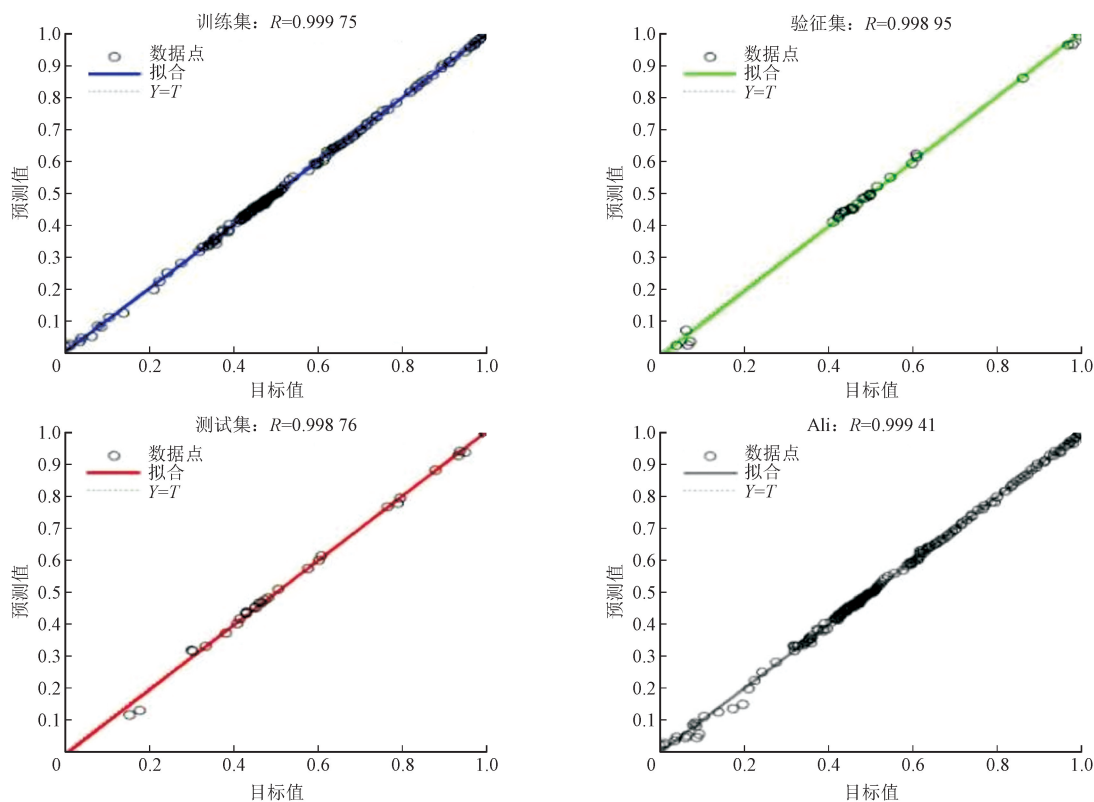
(b) 模型 R 系数

图 6 GRA-BP 模型训练结果

Fig. 6 GRA-BP model training results

由表 2 可知,本研究提出的 GRA-BP 模型精度较 PCA-WNN 模型^[4]和 PCA-BP 模型^[30]精度具有很高的相似性,本模型相较于 WOUDA 模型^[29]更加准确, PSO-GRA-BPNN 模型^[27]与本研究所提出的 GRA-BP 模型在精度方面也有一定的差距。因此本研究所提出的 GRA-BP 模型可以很好地预测排球运动员扣球落地时的 vGRF。

由表 3 可知, GRA-BP 模型与其他几个模型的拓扑结构大多数为单隐藏层,本模型与 WOUDA 模

型^[29]、PCA-BP 模型^[30]所选择的激活函数和学习率一样,与本模型不同的是 NGOH 模型^[28]和 PSO-GRA-BPNN 模型^[27]所选择的激活函数为 Sigmoid。Tansig 函数与 Sigmoid 函数只能输出正值不同, Tansig 函数输出范围为 $-1 \sim 1$, 意味着其输出是零中心化的, 正负输入值的偏差减小, 有助于改善梯度下降的效率。

同时 Tansig 函数较 Sigmoid 函数具有更大的梯度, 这有助于神经网络更快地学习。

表2 GRA-BP 模型与其他模型精度对比结果

Tab. 2 Comparison results between GRA-BP model and other models

模型	R_{RMSE}/BW	$R_{MAPE}/\%$	R_{MAE}/BW	R
GRA-BP 模型	0.224~0.271	3.6~4	0.14~0.17	0.998~0.999
PCA-WNN 模型 ^[4]	0.18~0.28	*	0.14~0.23	*
WOUDA 模型 ^[29]	0.26~0.32	*	*	*
NGOH 模型 ^[28]	0.015~0.017	*	*	*
PSO-GRA-BPNN 模型 ^[27]	*	3.963~4	0.425~0.475	0.984~0.985
PCA-BP 模型 ^[30]	*	2.78~3.15	*	*

注: * 表示该文章中未提到的验证指标。

表3 GRA-BP 模型与其他模型参数设置对比

Tab. 3 Comparison parameter settings between GRA-BP model and other models

参数	拓扑结构	激活函数	学习率	最大迭代次数	目标最小误差
GRA-BP 模型	单隐藏层	Tansig	0.01	1 200	0.000 1
PCA-WNN 模型 ^[4]	单隐藏层	Morlet	*	*	*
WOUDA 模型 ^[29]	单隐藏层	Tansig	0.01	*	*
NGOH 模型 ^[28]	双隐藏层	Sigmoid	*	*	*
PSO-GRA-BPNN 模型 ^[27]	单隐藏层	Sigmoid	*	1 200	0.000 001
PCA-BP 模型 ^[30]	单隐藏层	Tansig	0.01	1 000	*

注: * 表示该文章中未提到的模型参数。

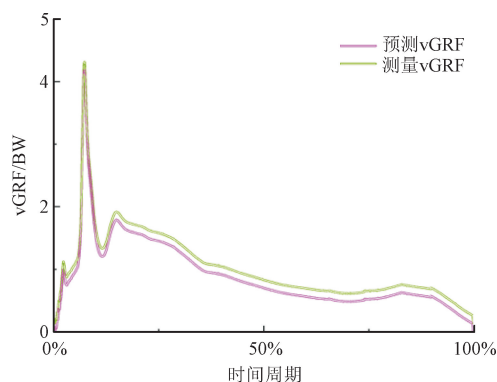


图7 垂直地面反作用力测量值与预测值均值曲线

Fig. 7 Curve mean curve of perpendicular ground reaction force measurements and predicted values

PCA-WNN 模型^[4]所选择的 Morlet 函数更加适合分析时间序列数据或进行信号处理,本模型所选择的 Tansig 函数更适合作为 BP 神经网络的激活函数。

3.3 肯德尔 W 结果

肯德尔 W 系数的中分数 ≥ 0.7 被认为是强相关性。测量 vGRF 与预测 vGRF 之间的一致性结果如表4所示。肯德尔 W 系数为0.945, $P \leq 0.001$ 说明测量 vGRF 与预测 vGRF 之间具有显著的一致性。

表4 测量 vGRF 与预测 vGRF 一致性结果

Tab. 4 Results of measuring vGRF and predicting vGRF

参数	取值
N	2
肯德尔 W 系数	0.945
卡方检验	566.858
渐进显著性	≤ 0.001

4 结果讨论

vGRF 是运动生物力学分析中的核心动力学参数之一,被广泛应用于运动损伤风险评估、康复训练方案制定和运动表现优化。在排球等高强度跳跃运动中,运动员在扣球落地时会承受瞬时高冲击载荷, vGRF 的大小、加载速率以及频率特征均与下肢损伤风险密切相关。研究表明,过大的冲击载荷可能导致髌股关节疼痛、前交叉韧带损伤、胫骨应力性骨折等运动损伤^[18-20,36-37]。目前, vGRF 的采集主要依赖于三维测力台,该设备可提供高精度的地面反作用力数据,是实验室环境下进行运动生物力学分析的标准方法。然而,该方法存在以下局限性:①实验环境受限,测力台需固定安装在实验室或特定平台上,难以应用于实际运动场地;②设备成本高,高精度测力台价格昂贵,维护复杂,难以在大规模训练监测中

推广;③数据采集受限制,运动员需在测力台上完成跳跃或落地动作,可能影响其自然运动模式,限制数据的生态效度^[38]。

鉴于传统测力台的局限性,研究人员开始探索无设备依赖的 vGRF 预测方法,以便在更广泛的运动场景中监测运动员的生物力学负荷。当前的研究方向主要包括以下3类。基于运动学数据的回归模型^[39]:通过高精度运动捕捉系统获取关节角度、步态参数等运动学数据,并利用多元线性回归、决策树等统计模型预测 vGRF。尽管该方法计算简便,但由于 vGRF 和运动学变量之间的非线性关系较强,回归模型的预测精度有限。基于机器学习的预测方法^[8-10,38]:近年来,BP 神经网络等深度学习模型因其强大的非线性拟合能力,在运动生物力学研究中得到了广泛应用。BP 神经网络可以通过训练大规模运动学与动力学数据集,构建高度拟合 vGRF 变化的预测模型,为运动监测提供无接触式、高效的计算方法。融合灰色关联分析(GRA)的智能预测:影响 vGRF 的运动学因素较多,不同变量的影响程度不同,灰色关联度分析(GRA)可用于量化运动学变量与 vGRF 之间的相关性,优化神经网络模型的输入参数,提高预测精度。已有研究表明,结合 GRA 的 BP 神经网络(GRA-BP)能够在生物力学建模中提供更精准的动力学估算^[21-23]。

目前,大多数研究主要集中在步态运动(如行走和跑步)过程中 vGRF 的估算方法,提出了一系列基于不同理论和技术手段的模型。这些方法包括简化的生物医学建模、肌肉骨骼建模,以及基于节段加速度、足底压力等数据驱动模型^[21-22]。这些方法能够较为准确地估算周期性运动中的 vGRF,但对于更复杂的运动模式(如跳跃、变向和落地)仍存在一定的局限性,难以充分捕捉运动过程中复杂的动力学特征。因此,如何在更广泛的运动场景下提高 vGRF 的预测精度,仍是当前运动生物力学研究的关键问题之一。

针对更复杂的运动形式,如楼梯行走,仅有少量研究尝试结合肌肉骨骼建模和动态接触建模进行 vGRF 估计^[23]。由于楼梯行走涉及不均匀地形和变换步态,使得 vGRF 估算相较于平地行走更具挑战性。因此,这类研究通常需要结合更精细的解剖学建模和多体动力学仿真,以更准确地描述人体与环境的相互作用。然而,此类方法计算复杂度较高,对个体化建模的依赖性较强,限制了其在大规模研究

和实际应用中的可行性。

随着人工智能的发展,神经网络因其强大的非线性建模能力,在运动生物力学领域展现出巨大的潜力。神经网络方法能够通过数据驱动的方式学习运动过程中的复杂映射关系,减少对传统建模假设的依赖,从而提高 vGRF 估算的适应性和泛化能力。小波神经网络在跑步过程中预测 vGRF 时,展现出较高的相关性^[4]。小波神经网络通过结合小波变换的时频分析能力,可以有效提取运动过程中不同时间尺度下的特征,提高预测精度。此外,双向长短时记忆网络在楼梯行走 vGRF 预测中的相关系数达到 0.908~0.991^[23]。

此外,多层感知机神经网络在 vGRF 预测中的应用也取得了一定成效。例如,POGSON 等^[5]利用 MLP 神经网络结合可穿戴传感器采集的躯干加速度数据,实现了对 vGRF 的有效预测。相比于传统测力台方法,这种基于可穿戴设备和神经网络的预测方法具有更强的便携性和实用性。未来,随着深度学习技术的进一步发展,卷积神经网络、图神经网络等先进算法也有望在 vGRF 预测中发挥更大作用。

本研究所构建的 GRA-BP 模型不仅提升了排球运动员扣球落地 vGRF 的预测精度,也为运动负荷监测、伤害预警与康复干预提供了理论依据和技术支撑。模型基于运动学特征实现对落地冲击力的量化估计,在实际应用中具有良好的适配性和转化潜力。具体而言,在运动损伤监测方面,模型可辅助识别训练或比赛中落地动作所产生的异常冲击力。当模型预测结果显著高于个体基准值时,可提示存在潜在的伤害风险,指导教练和康复师及时调整训练内容或进行动作再教育,以避免膝、踝等关键部位的过度负荷。在训练方案优化方面,通过连续训练周期内 vGRF 的变化趋势分析,可实现个体化训练强度管理与技术动作反馈。模型可作为量化工具,辅助判定训练负荷是否匹配个体承载能力,尤其适用于跳跃频次高、冲击负荷大的专项训练。在康复干预实践中,可据此构建基于模型输出的康复训练建议框架。在早期康复阶段,设定 vGRF 预测阈值,辅助判断基础功能是否达到负荷训练起点;在恢复进阶阶段,利用模型跟踪预测值变化,评估动作控制能力改善趋势;在重返运动阶段,比较康复后预测值与康复前基线或正常参考值,判断是否具备重返赛场条件。

相较于传统基于测力台的实验方法, GRA-BP 模型能够基于易获取的数据进行 vGRF 估算,降低了对昂贵实验设备的依赖,提升了实际应用价值。未来,该方法可进一步结合可穿戴传感器技术,利用惯性测量单元、足底压力传感器等便携式设备,在运动员的实际训练和比赛场景下实现实时 vGRF 估算。通过多模态数据融合与实时监测技术的结合,未来有望为运动员提供更加精准的运动健康管理方案,助力运动表现提升与伤害防护。

尽管本研究主要聚焦于排球运动员群体,但所构建的 GRA-BP 模型在更广泛的运动场景中亦具有推广潜力。尤其在全民健身逐渐普及的背景下,普通健身人群对运动风险监测、运动姿态优化及个性化训练建议的需求日益增长。相比传统的三维动作捕捉系统和测力平台, GRA-BP 模型基于运动学特征实现 vGRF 的预测,具备无需高成本设备、依赖变量少、预测效率高等优势,为模型在大众健身领域的转化应用奠定了基础。

具体而言,可穿戴设备(如惯性测量单元、智能运动鞋、足底压力垫等)可用于实时采集与模型输入特征高度相关的数据,如下肢角度变化或运动周期信息。这为模型嵌入移动终端或健身指导系统提供了可行性。此外,通过对不同人群(青少年、中老年、健身爱好者)在日常训练中采集的基础运动数据进行适配性训练与模型微调,有望实现模型在广泛非专业人群中的泛化应用。

因此,未来研究可从以下方向开展:①开发与模型兼容的低成本、便携式监测装置;②构建适应不同身体条件与运动背景的个性化参数调整机制;③基于模型输出设计科学运动建议算法,实现风险提示与训练指导功能。这些探索将进一步提升本模型在全民运动、科学健身等领域的实用价值与社会效益。

本研究具有一定的局限性。首先,在数据层面,本研究训练集中所选取的排球运动员身高体质量相对一致,旨在减少个体差异对模型训练过程的影响。然而,这种相对单一的样本结构限制了模型在更广泛人群中的适用性。为提升模型的可迁移性,后续研究将扩大数据集范围,引入不同身高、体质量、性别及竞技水平的运动员进行训练与测试,从而评估模型在多样化人群中的推广能力。其次,在方法层面,尽管本研究统一采用了 Qualisys 动作捕捉系统和标准化实验流程以确保数据质量,但仍不可避免存在系统误差和随机误差,如标记点布置偏差、追踪

精度不足等。此外,运动学分析依赖于 OpenSim 建模平台,其模型缩放过程基于静态姿态与预设模板,可能因个体解剖结构差异造成运动学参数估计的偏差,从而影响部分输入变量的准确性。最后,在模型层面, BP 神经网络虽然具备良好的拟合能力,但面对较小样本集时仍存在过拟合风险。尽管本研究通过 GRA 方法对输入变量进行了筛选,降低了模型复杂度,但后续仍需引入如正则化技术、交叉验证策略、数据增强方法或迁移学习框架,以增强模型的鲁棒性与泛化能力。此外,未来可探索更具解释性的可视化分析方法,辅助理解模型输出结果与生物力学机制之间的对应关系。

5 结 论

本研究通过 OpenSim 软件计算出排球运动员两步助跑扣球时的 39 个运动学数据,并且通过 GRA 筛选出右侧腕部内收外展角度和左侧肩关节旋转角度等运动学指标关联度低于 0.98,其余骨盆前后倾角度、骨盆左右倾角度、骨盆旋转角度等 13 个运动学数据关联度高于 0.98。最后将筛选出的 13 个运动学数据放入 BP 神经网络中来预测排球运动扣球落地的 vGRF。 GRA-BP 模型预测出的 vGRF 与三维测力板测量出的 vGRF 有很高的一致性,模型的预测结果具有很高的准确性。 GRA-BP 模型为教练员获得排球运动员的运动生物力学数据提供了新途径,教练员可以通过本模型来了解排球运动员扣球落地时的 vGRF,以及本模型为排球运动员康复训练与损伤研究等提供了有效方法。

参考文献:

- [1] SAHIN S, ERDMAN A, MCGINLEY J, et al. The relationship between Beighton score and biomechanical risk factors among adolescent, female volleyball players[J]. *Physical therapy in sport*, 2024, 70: 84-89.
- [2] DE BLEECKER C, VERMEULEN S, WILLEMS T, et al. How reliable are lower limb biomechanical evaluations during volleyball-specific jump-landing tasks? [J]. *Gait & posture*, 2024, 113: 287-294.
- [3] 贾宜, 郭俊芬, 杨程. 影响男子排球运动员扣球起跳动作效果的动力学研究[J]. *河北体育学院学报*, 2017, 31(5): 64-70.
JIA Yi, GUO Junfen, YANG Cheng. Kinetic analysis of the effect of volleyball spike jump for male athletes[J]. *Journal of Hebei Sport University*, 2017, 31(5): 64-70 (in Chinese).
- [4] 王冬梅, 郭文霞, 袁书芳, 等. 基于主成分分析和小波神经网络

- 预测跑步中垂直地面反作用力[J]. 医用生物力学, 2022, 37(4): 706-712.
- WANG Dongmei, GUO Wenxia, YUAN Shufang, et al. Predicting vertical ground reaction force during treadmill running using principal component analysis and wavelet neural network[J]. Journal of medical biomechanics, 2022, 37(4): 706-712(in Chinese).
- [5] POGSON M, VERHEUL J, ROBINSON M A, et al. A neural network method to predict task- and step-specific ground reaction force magnitudes from trunk accelerations during running activities[J]. Medical engineering & physics, 2020, 78: 82-89.
- [6] TAYFUR A, HAQUE A, SALLES J I, et al. Are landing patterns in jumping athletes associated with patellar tendinopathy? A systematic review with evidence gap map and meta-analysis[J]. Sports medicine, 2022, 52(1): 123-137.
- [7] CRONIN J B, BRESSEL E, FKINN L. Augmented feedback reduces ground reaction forces in the landing phase of the volleyball spike jump[J]. Journal of sport rehabilitation, 2008, 17(2): 148-159.
- [8] 张楠, 孟庆华, 鲍春雨, 等. 脑卒中患者运动过程中动力学特征的智能预测[J]. 医用生物力学, 2024, 39(3): 489-496.
- ZHANG Nan, MENG Qinghua, BAO Chunyu, et al. Intelligent prediction for dynamic characteristics of stroke patients during exercise[J]. Journal of medical biomechanics, 2024, 39(3): 489-496(in Chinese).
- [9] 冯茹, 杨辰, 李翰君, 等. 机器学习在预测人体运动地面反作用力中的应用综述[J]. 数据采集与处理, 2021, 36(4): 639-647.
- FENG Ru, YANG Chen, LI Hanjun, et al. Application of Machine-Learning in predicting ground reaction force of human motion: a review[J]. Journal of data acquisition and processing, 2021, 36(4): 639-647(in Chinese).
- [10] TENG H. Construction and drug evaluation based on convolutional neural network system optimized by grey correlation analysis[J]. Computational intelligence and neuroscience, 2021, 2021(1): 2794588.
- [11] KONG L J, CHEN X Y, DU Y B. Evaluation of the effect of aggregate on concrete permeability using grey correlation analysis and ANN[J]. Computers and concrete, 2016, 17(5): 613-628.
- [12] 郑震, 查冰婷, 谭钰然, 等. 基于灰色关联分析的三维点云识别算法[J]. 南京理工大学学报, 2022, 46(6): 679-687.
- ZHENG Zhen, ZHA Bingting, TAN Yuran, et al. 3D point cloud recognition algorithm based on grey relational analysis[J]. Journal of Nanjing University of Science and Technology, 2022, 46(6): 679-687(in Chinese).
- [13] 邹萌, 陈小红, 陆英, 等. 基于灰色关联分析的芍药产地初加工条件优化[J]. 湖南农业大学学报(自然科学版), 2022, 48(6): 749-754.
- ZOU Meng, CHEN Xiaohong, LU Ying, et al. Condition optimization of original processing methods of *Paeonia lactiflora* Pall. using grey correlation analysis[J]. Journal of Hunan Agricultural University(natural sciences), 2022, 48(6): 749-754(in Chinese).
- [14] HORNIK K, STINCHCOMBE M, WHITE H. Multilayer feedforward networks are universal approximators[J]. Neural networks, 1989, 2(5): 359-366.
- [15] 王小川, 史峰, 郁磊, 等. MATLAB 神经网络 43 个案例分析[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2013.
- [16] MA Y, LIU D W, CAI L S. Deep learning-based upper limb functional assessment using a single kinect v2 sensor[J]. Sensors, 2020, 20(7): 1903.
- [17] WANG D, ZHANG J, DONG H, et al. Enhancing outcome prediction in intracerebral hemorrhage through deep learning: a retrospective multicenter study[J]. Academic radiology, 2025, 32(3): 1574-1583.
- [18] XIN M, ZHANG W Q, SUN S Q, et al. VPModel: high-fidelity product simulation in a virtual-physical environment[J]. IEEE transactions on visualization and computer graphics, 2019, 25(11): 3083-3093.
- [19] HUANG W W, LU M M, ZENG Y X, et al. Technical and tactical diagnosis model of table tennis matches based on BP neural network[J]. BMC sports science, medicine and rehabilitation, 2021, 13(1): 54.
- [20] TANG H Y, JIANG G S, WANG Q D. Prediction of college students' sports performance based on improved BP neural network[J]. Computational intelligence and neuroscience, 2022, 2022: 5872384.
- [21] KHADSE C B, CHAUDHARI M A, BORGHATE V B. Electromagnetic compatibility estimator using scaled conjugate gradient back-propagation based artificial neural network[J]. IEEE transactions on industrial informatics, 2017, 13(3): 1036-1045.
- [22] LIU Y J, ZHANG Q C, DONG W, et al. Autoformer-based model for predicting and assessing wheat quality changes of pesticide residues during storage[J]. Foods, 2023, 12(9): 1833.
- [23] DE ARAUJO FARIA V, AZIMBAGIRAD M, VIANI ARRUDA G, et al. Prediction of radiation-related dental caries through PyRadiomics features and artificial neural network on panoramic radiography[J]. Journal of digital imaging, 2021, 34(5): 1237-1248.
- [24] LIU L, XUE M Y, GUO N, et al. Investigating the path tracking algorithm based on BP neural network[J]. Sensors, 2023, 23(9): 4533.
- [25] 李路. 基于 Opensim 的踝关节外侧韧带的数字化模拟与验证[J]. 医用生物力学, 2021, 36(增刊 1): 437.
- LI Lu. Digital simulation and validation of Opensim-based lateral ankle ligaments[J]. Journal of medical biomechanics, 2021, 36(S1): 437(in Chinese).
- [26] 梁旺东, 王子龙. 基于灰色关联选取特征向量的 BP 神经网络岩相识别——以 X 油田 A 区部分井为例[J]. 北京石油化工学院学报, 2022, 30(2): 24-29.
- LIANG Wangdong, WANG Zilong. BP neural network lithofacies recognition based on feature vector selected by grey correlation for wells in area a of Foshan oil field[J]. Journal of Beijing Institute of Petrochemical Technology, 2022, 30(2): 24-29(in Chinese).
- [27] LIU E C, LI J, ZHENG A N, et al. Research on the prediction model of the used car price in view of the PSO-GRA-BP neural network[J]. Sustainability, 2022, 14(15): 8993.

- [28] NGOH K J H, GOUWANDA D, GOPALAI A A, et al. Estimation of vertical ground reaction force during running using neural network model and uniaxial accelerometer [J]. *Journal of biomechanics*, 2018, 76: 269-273.
- [29] WOUDA, J F, GIUBERTI M, BELLUSCI G, et al. Estimation of vertical ground reaction forces and sagittal knee kinematics during running using three inertial sensors [J]. *Frontiers in physiology*, 2018, 9: 00218.
- [30] HE F, ZHANG L Y. Prediction model of end-point phosphorus content in BOF steelmaking process based on PCA and BP neural network [J]. *Journal of process control*, 2018, 66: 51-58.
- [31] 庞博, 张子华, 纪仲秋. 基于 AnyBody 仿真的八段锦动作下肢生物力学特征研究 [J]. *应用力学学报*, 2023, 40(1): 234-240.
- PANG Bo, ZHANG Zihua, JI Zhongqiu. Biomechanical characteristics of lower limbs in Baduanjin based on AnyBody simulation [J]. *Chinese journal of applied mechanics*, 2023, 40(1): 234-240 (in Chinese).
- [32] 魏震, 王琳. 基于统计参数映射分析不同习惯落地模式跑者跑步过程中地面反力的差异 [J]. *应用力学学报*, 2023, 40(2): 474-480.
- WEI Zhen, WANG Lin. Ground reaction forces characteristics among runners with different foot strike patterns: analysis of one-dimensional statistical parametric mapping [J]. *Chinese journal of applied mechanics*, 2023, 40(2): 474-480 (in Chinese).
- [33] 陈诗琴, 杨洋, 张勤, 等. 业余跑者跑步经济性与下肢运动学和时空步态特征的相关性研究 [J]. *应用力学学报*, 2025, 42(2): 473-482.
- CHEN Shiqin, YANG Yang, ZHANG Qin, et al. Relationship of running economy with lower-limb kinematics and spatiotemporal gait characteristics in recreational runners [J]. *Chinese journal of applied mechanics*, 2025, 42(2): 473-482 (in Chinese).
- [34] 杜娟, 夏晓宇, 孟琳, 等. 基于肌骨动力学与有限元耦合模型的脊柱生物力学研究应用进展 [J]. *应用力学学报*, 2024, 41(1): 233-240.
- DU Juan, XIA Xiaoyu, MENG Lin, et al. A review on applications of computational models combining finite element methods and musculoskeletal model [J]. *Chinese journal of applied mechanics*, 2024, 41(1): 233-240 (in Chinese).
- [35] 常先坤, 张建新. 不同鞋底厚度的运动鞋对高中生步态参数和爆发力的影响 [J]. *应用力学学报*, 2024, 41(3): 719-728.
- CHANG Xiankun, ZHANG Jianxin. Gait parameters and explosive power of sports shoes with different sole thickness of high school students [J]. *Chinese journal of applied mechanics*, 2024, 41(3): 719-728 (in Chinese).
- [36] 李夏元, 刘飞亮, 夏正亮, 等. 不同等级男子撑竿跳高运动员助跑及起跳的生物力学特征研究 [J]. *应用力学学报*, 2024, 41(4): 956-972.
- LI Xiayuan, LIU Feiliang, XIA Zhengliang, et al. Biomechanical characteristics of run-up and takeoff of male elite pole vaulters [J]. *Chinese journal of applied mechanics*, 2024, 41(4): 956-972 (in Chinese).
- [37] 肖松林, 孙晓乐, 杨洋, 等. 跑鞋与触地模式的生物力学及其与损伤关系研究进展 [J]. *应用力学学报*, 2022, 39(2): 201-208.
- XIAO Songlin, SUN Xiaole, YANG Yang, et al. Progress in research on biomechanics of footwear and foot strike patterns and its relationship with running injuries [J]. *Chinese journal of applied mechanics*, 2022, 39(2): 201-208 (in Chinese).
- [38] 张楠, 孟庆华, 鲍春雨. 基于 XCM 模型预测排球运动员前交叉韧带应力 [J]. *医用生物力学*, 2024, 39(6): 1146-1153.
- ZHANG Nan, MENG Qinghua, BAO Chunyu. Predicting anterior cruciate ligament stress in volleyball players based on the XCM model [J]. *Journal of medical biomechanics*, 2024, 39(6): 1146-1153 (in Chinese).
- [39] 李夏元. 不同等级男子撑竿跳高运动员助跑及起跳的生物力学特征与因子分析研究 [D]. 上海: 上海体育学院, 2023.

(编辑 李坤璐)