连续结构分布动载荷的离散等效加载方法

李 靖， 姜金辉， 张 方
（南京航空航天大学 航空航天结构力学及控制全国重点实验室，南京 210016）

摘 要：针对实验中精确施加分布动载荷的问题，提出了一种在高斯点施加集中动载荷以实现分布动载荷等效加载的方法。该方法在模态空间中采用模态截断技术，通过模态力等效的方法离散化分布动载荷，并利用Gauss-Legendre求积公式计算集中动载荷系数。在数值仿真中，计算悬臂梁和四边简支板在给定分布动载荷与等效集中动载荷下的动响应，使用模态叠加法评估梁与板的动力学响应。研究结果显示，在分布动载荷和等效集中动载荷作用下的加速度响应误差不超过4.5%，位移响应误差不超过4.2%。此外，还讨论了等效集中动载荷叠加噪声情况下的等效结果变化，仿真结果验证了该分布动载荷等效方法的准确性和适用性。

关键词：结构动力学；分布动载荷；等效加载；模态力；Gauss-Legendre积分
DOI：10.15938/j.jhust.2026.04.014
中图分类号：TB123；O327 **文献标志码**：A **文章编号**：1007-2683(2026)04-0141-14

Discrete Equivalent Loading Method for Continuous Structural Distributed Dynamic Loads

LI Jing， JIANG Jinhui， ZHANG Fang
（State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China）

Abstract: To address the challenge of accurately applying distributed dynamic loads in experiments, a method is proposed whereby concentrated dynamic loads are applied at Gauss points to achieve an equivalent effect. This approach utilizes modal truncation in the modal space, discretizes the distributed dynamic load through a modal force equivalence method, and calculates the coefficients of the concentrated dynamic loads using the Gauss-Legendre quadrature formula. In numerical simulations, dynamic responses of a cantilever beam and a simply supported plate under both distributed and equivalent concentrated dynamic loads are analyzed, with the modal superposition method used to evaluate the dynamics of the beam and plate. Results indicate that the acceleration response error under distributed and equivalent concentrated loads does not exceed 4.5%, and the displacement response error does not exceed 4.2%. Additionally, the variation of equivalent results under noise in the concentrated loads is examined. The simulation results validate the accuracy and applicability of this equivalent method for distributed dynamic loads.

Keywords: structural dynamics; distributed dynamic loads; equivalent loading; modal force; Gauss-Legendre integration

收稿日期：2024-11-14
基金项目：国家自然科学基金(12372066，U23B6009)；直升机旋翼动力学国家级重点实验室基金项目(61422202105)；2024年江苏高校“青蓝工程”.
作者简介：李 靖(2000—)，男，硕士研究生；
张 方(1962—)，男，博士，教授.
通信作者：姜金辉(1981—)，男，博士，教授，E-mail：jiangjinhui@nuaa.edu.cn.

0 引 言

在结构设计与强度检验的过程中,经常会遇到有关分布动载荷的问题,例如飞机上的气动载荷,船舶上的波浪载荷等。有时即使能够准确地识别出分布动载荷,但分布动载荷的加载往往难以实现。如何准确地将分布动载荷施加到结构上,进而精准地预测结构的振动情况仍然是航空航天等工程领域的学者和工程师们关注的重点问题之一。

自上世纪80年代以来,众多学者致力于分布动载荷的等效加载问题,也取得了许多优秀的成果。一般来说,分布动载荷的等效方法大致分为以下两类:物理空间下的分布动载荷等效重构方法和模态空间下的分布动载荷等效重构方法[1]。

其中,物理空间下的分布动载荷等效重构方法主要是使用工程上常用的时域及频域分布动载荷模型进行降阶重构。1984年,潘树祥等[2]进行了地面热颤振模拟试验研究,但受到当时多输入多输出振动激励方法、控制技术和高性能计算机发展的限制,研究未能进一步推进。ZENG等[3]提出一种确定飞行器颤振速度和颤振频率的试验方法("干风洞"DWT技术),并实现了矩形平板翼的地面颤振模拟。通过实时测量响应并计算得到激振器实时施加给结构的等效集中力,以此来模拟颤振时的气动载荷,王俊蛟[4]采用MS法进行有理函数拟合,将频域内的非定常气动力变换为时域内的非定常气动力。胡巍等[5]基于气动力和铰链力矩相等的理论对操纵面使用2个集中力来模拟气动力和铰链力矩,在瞬态激励下,以气动力降阶重构前后主翼面结构上某点的气动弹性响应差异为目标函数,优化了操纵面上加载点的位置。DHITAL等[6]引入地面颤振模拟试验的概念,使用少量集中力模拟复合材料层合板的颤振,用经典小挠度理论和活塞理论来计算线性面板颤振的气动弹性方程。并通过将气动载荷产生的压力替换为集中载荷产生的压力,推导出仿真简支板颤振的颤振方程。高博[7]通过对地面颤振试验的各环节建立数学模型,采用试验数据对模型参数进行辨识,并使用鲁棒控制理论解决控制对象和外界扰动的不稳定性。

模态空间下的分布动载荷等效重构方法的主要原理是通过计算出结构上有限点在分布动载荷作用下的模态力,使其与集中动载荷的模态力等效,最终得出集中动载荷的大小。SMYSLOV[8]提出将模态测试与EMS结合起来,将分布的气动力转换为几个集中力,实现对飞机结构动态特性的精确模拟和分析。DHITAL等[9]利用曲面样条法和虚功原理对经典板模型上的气动力进行等效,并在结构特性不变的情况下计算模态空气动力。ZHANG等[10]通过引入Fisher信息矩阵来优化激励/测量点的布置,提供了新的方法来设计和实施DWT颤振测试。文[11-12]提出基于计算流体力学(CFD)的非定常气动力重构方法。陈奥辉等[13]通过Gauss-Legendre积分建立载荷与响应之间的动标定矩阵,对时域分布动载荷进行识别。张世基[14]采用多个正弦激振力,通过调节各力幅值及相位使得各阶模态力相等来实现飞机激励的加载。文[15-16]使用模糊PID完成对送风子系统中无刷直流电机的控制优化。

当前行业内存在1种基于模态力等效原理的分布动载荷等效方法。这种方法计算单位集中载荷形成的集中动载荷模态力矩阵的逆矩阵,然后与分布动载荷对应的模态力矩阵相乘,以此来确定集中动载荷的载荷系数。但在矩阵求逆过程中不可避免会出现数值不稳定现象,以及集中载荷如何选点问题。本文在模态空间下,对分布动载荷等效加载问题进行深入研究,通过Gauss Ledengre积分原理让梁上分布动载荷与集中动载荷的模态力相等,进而确定梁上集中载荷的大小及位置,保证矩阵求逆的数值稳定性。最后,进行数值仿真,首先在悬臂梁上实现一维分布动载荷等效加载计算位移、加速度与应力的响应,再在输入等效集中载荷中加入1%噪声后计算响应变化情况,最终通过在简支板上的二维分布动载荷的等效结果来进一步证明积分点数目对等效结果的影响。

1 分布动载荷等效理论

1.1 Gauss-Legendre积分理论

一般高斯积分表达式为

$$\int_a^b f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{N} A_k f(x_k) \tag{1}$$

式中:$x_k(k=0,1,2\cdots)$为求积节点;$A_k(k=0,1,2\cdots)$为求积系数;$\rho(x)$为权函数;$f(x)$为被积函数;$[a,b]$为积分区间。当选取适当x_k和A_k时,使得上式求积具有$2N-1$次代数精度,这时称选择的节点为高斯点。

在区间$[-1,1]$上权函数$\rho(x)=1$的正交多项式称为Legendre多项式,$P_n(x)$为第n阶legendre多

项式,其表达式如下

$$\left.\begin{aligned} &P_0(x)=1\\ &P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\frac{(2n-2i)!}{i!\ (n-i)!\ (n-2i)!}x^{n-2i},\\ &\quad n=1,2,\cdots,i=1,\cdots,N \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中 $N=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & n\text{ 为偶数}\\ \dfrac{n-1}{2}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

若积分区间$[a,b]=[-1,1]$,权函数$\rho(x)=1$,取 n 次多项式 $P_n(x)$ 的零点 x_k 为高斯点,则式(1)变为

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{N}A_kf(x_k) \tag{3}$$

此时称之为 Gauss-Legendre 积分公式,为使 Gauss-Legendre 积分公式具有更广泛的应用空间,下面进行如下的变量代换

$$x=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t \tag{4}$$

当$x\in[a,b]$时,$t\in[-1,1]$,此时有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b+a}{2}\int_{-1}^{1}f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)\mathrm{d}t\approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n}A_kf\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t_k\right) \tag{5}$$

1.2　悬臂梁响应计算及一维分布载荷等效理论

梁系构件为刚架结构的基础构件,在工程结构中应用广泛,特别是在建筑工程、航空航天等领域。由于梁结构对梁系构件和刚架结构振动特性的研究具有一定的科学价值和实用价值,所以下文将对工程中经常出现的梁结构进行分布动载荷等效研究。

本文研究的是基于 Bernoulli-Euler 梁模型的 1 根悬臂梁,这种细长梁的低频振动忽略梁的剪切变形和截面绕中性轴转动惯量的影响。设梁的长度为 l,其轴线方向为 x 轴,梁左端为 x 轴原点,具体结构如图 1 所示。设梁的截面面积为 $A(x)$,材料的弹性模量为 $E(x)$,质量密度为$\rho(x)$,截面关于中性轴的惯性矩为 $I(x)$。设 $w(x,t)$为点 x 处的截面中性轴在 t 时刻的横向位移,$f(x,t)$和 $m(x,t)$分别表示单位长度梁上分布的横向外力和外力矩。

等截面的 Bernoulli-Euler 梁的运动微分方程如下:

$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=f-\frac{\partial m}{\partial x} \tag{6}$$

梁的固有频率为

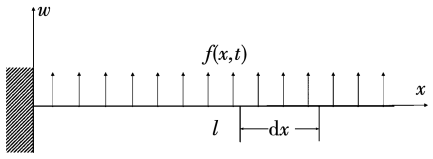


图 1　Bernoulli-Euler 悬臂梁

Fig. 1　Bernoulli-Euler cantilever beam

$$\omega_n=(s_nl)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho Al^4}}\ (n=1,2,3,\cdots) \tag{7}$$

式中:s_n 为第 n 阶模态波数。

固有振型为

$$W_n(x)=\cosh s_n-\cos s_nx+v_n(\sinh s_nx-\sin s_nx)\ (n=1,2,3,\cdots) \tag{8}$$

式中:n 为阶数;$v_n=-\dfrac{\sinh s_nl-\sin s_nl}{\cosh s_nl+\cos s_nl}$,且 s_nl 满足 $\cos s_nl\cosh s_nl=-1$。

使用振型叠加法计算梁的响应,利用振型函数的正交性,参考多自由度的模态分析方法,引入如下的坐标变换

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}W_n(x)q_n(t) \tag{9}$$

式中:$q_n(t)$为响应随时间变化的分量。

假设简支梁系统含有比例阻尼 C,则系统振动微分方程如下:

$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+C\frac{\partial w}{\partial t}+EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=f-\frac{\partial m}{\partial x} \tag{10}$$

将式(9)代入式(10)后对两端同乘 $W_m(x)$并沿梁方向对 x 积分,利用固有振型正交性得到如下公式:

$$M_n\ddot{q}_n(t)+C_n\dot{q}_n(t)+K_nq_n(t)=f_n(t)\ (n=1,2,3,\cdots) \tag{11}$$

式中:M_n、K_n 和 C_n 分别为第 n 阶主质量、主刚度与阻尼;上方 1 个点表示 1 阶导数,2 个点表示 2 阶导数,模态力 f_n 为

$$f_n(t)=\int_0^l\left(f-\frac{\partial m}{\partial x}\right)W_n(x)\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

假设系统无外力矩,初始条件为零,即 $q(0)=0$,$\dot{q}(0)=0$,则梁响应如下:

$$q_n(t)=\frac{1}{M_nw_{dn}}\int_0^t \mathrm{e}^{-\zeta_nw_n(t-\tau)}\sin w_{dn}(t-\tau)f_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{13}$$

式中:w_{dn}为第 n 阶阻尼固有频率;ζ_n 为第 n 阶阻尼比;τ 为杜哈梅积分中引入的中间变量。最终梁在物理空间下的响应为

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}W_n(x)q_n(t) \tag{14}$$

由于在同一结构上,系统的模态参数相同,由式(13)~(14)可知,只需要保证模态力 $f_n(t)$ 相同则可以得到相同的响应。

连续系统有无穷阶模态,但在分析梁的响应时不可能算出所有阶模态的响应。因此,需要引入模态截断法,这是系统响应的近似计算方法。由于系统的高阶模态对系统响应的影响很小,采用模态截断法通过只计算前几阶模态响应来代替所有阶响应,减少计算量,提高计算效率[17-18]。

假设梁上施加的分布动载荷为 $F(x,t)=P(x)T(t)$,梁在第 n 阶模态上模态力为 $F_n(t)$,则有

$$F_n(t)=\int_0^l P(x)T(t)W_n(x)\mathrm{d}x \tag{15}$$

对积分 $\int_0^l W_1(x)P(x)\mathrm{d}x$ 使用 Gauss-Legendre 积分,取梁上 k 个高斯积分点,并求得对应求积系数 A_i 可得:

$$F_n(t)=T(t)\sum_{i=1}^{k}A_iW_n(x_i)P(x_i) \tag{16}$$

式中:x_i 为选取的 k 个积分点位置。

假设在每个高斯积分点 x_i 上施加集中力

$$f_i(t)=s_iT(t)\delta(x-x_i) \tag{17}$$

式中:s_i 为第 i 个集中力的系数;$\delta(x-x_i)$ 为狄拉克函数。

则第 i 个集中力的各阶模态力如下:

$$\bar{F}_n(t)=T(t)\int_0^l s_iW_n(x)\delta(x-x_i)\mathrm{d}x=T(t)s_iW_n(x_i) \tag{18}$$

将 k 个集中力的第 n 阶模态力求和可得:

$$\bar{F}_{sn}(t)=T(t)\sum_{i=1}^{k}s_iW_n(x_i) \tag{19}$$

使各阶模态力相等,即有

$$\left.\begin{aligned}
&F_1(t)=T(t)\sum_{i=1}^{k}A_iW_1(x_i)P(x_i)=T(t)\sum_{i=1}^{k}s_iW_1(x_i)=\bar{F}_{s1}(t)\\
&F_2(t)=T(t)\sum_{i=1}^{k}A_iW_2(x_i)P(x_i)=T(t)\sum_{i=1}^{k}s_iW_2(x_i)=\bar{F}_{s2}(t)\\
&F_3(t)=T(t)\sum_{i=1}^{k}A_iW_3(x_i)P(x_i)=T(t)\sum_{i=1}^{k}s_iW_3(x_i)=\bar{F}_{s3}(t)\\
&\vdots\\
&F_n(t)=T(t)\sum_{i=1}^{k}A_iW_n(x_i)P(x_i)=T(t)\sum_{i=1}^{k}s_iW_n(x_i)=\bar{F}_{sn}(t)
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

根据式(20)可得各个高斯积分点上的力的幅值:

$$s_i=A_iP(x_i) \tag{21}$$

当外力 $F(x,t)$ 为复杂载荷,不能直接分离变量时,需要对外力进行分解,具体方法如下:

假设力 $F(x,t)$ 为在有限区域[0,l]上不可分离变量的复杂载荷。此时,假设该力在空间上进行周期延拓,针对变量 x 对力 $F(x,t)$ 进行傅里叶展开,易知力 $F(x,t)$ 在 x 方向上的周期为 l。

$$F(x,t)=\frac{a_0(t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(t)\cos\left(\frac{2\pi nx}{l}\right)+b_n(t)\sin\left(\frac{2\pi nx}{l}\right)\right) \tag{22}$$

式中:傅里叶系数 $a_n(t)$ 和 $b_n(t)$ 为关于 t 的函数,可以通过如下积分计算:

$$a_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l F(x,t)\cos\left(\frac{2\pi nx}{l}\right)\mathrm{d}x \tag{23}$$

$$b_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l F(x,t)\sin\left(\frac{2\pi nx}{l}\right)\mathrm{d}x \tag{24}$$

此时复杂力 $F(x,t)$ 变换为以下几个力的和:

$$F_1=\frac{a_0(t)}{2} \tag{25}$$

$$F_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\cos\left(\frac{2\pi nx}{l}\right) \tag{26}$$

$$F_3=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\sin\left(\frac{2\pi nx}{l}\right) \tag{27}$$

此时 F_1、F_2、F_3 实现变量分离,对3个力 F_1、F_2、F_3 分别使用式(21)求得最终各集中力,可表示为

$$F_i(t)=S_{F1}\frac{a_0(t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(S_{F2}a_n(t)+S_{F3}b_n(t)\right) \tag{28}$$

式中:S_{F1}、S_{F2}、S_{F3} 分别为 F_1、F_2、F_3 各力成分的最终等效集中动载荷系数。且一般对于较为平滑的函数,前几项的和就能捕捉函数的大部分特征,故在实际中可使用前几项傅里叶展开的和得到该复杂力的近似结果。

1.3 四边简支板的响应计算与二维动载荷的等效方法

设薄板的长宽分别为 a 和 b,厚度为 h,材料密度为 ρ,弹性模量为 E,泊松比为 μ,薄板上作用分布动载荷 $f(x,y,t)$,中面上的各点只做沿 z 轴的微幅振动,且中面的挠度为 $w_n(x,y)$,则可以得到薄板的振动微分方程:

$$\rho h\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2}+D\nabla^4 w_n=f(x,y,t) \tag{29}$$

式中:$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为拉普拉斯算子;$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ 为薄板的抗弯刚度。

参考对梁振动响应的求解方法,采用分离变量法,设:

$$w_n(x,y,t)=W(x,y)q(t) \tag{30}$$

根据板的四边简支边界条件,可以给出满足板的边界条件的振型函数:

$$W_{mn}(x,y)=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}(m,n=1,2,3,\cdots) \tag{31}$$

固有频率如下:

$$\omega_{mn}=\pi^2\sqrt{\frac{D}{\rho h}}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)(m,n=1,2,3,\cdots) \tag{32}$$

假设板上作用的分布动载荷为 $f(x,y,t)$,根据振型叠加法及式(30)中所假设的结构响应形式可得板受迫振动响应:

$$w_n(x,y,t)=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}W_{mn}(x,y)q_{mn}(t) \tag{33}$$

将上式代入薄板的振动微分方程(即式(29))可得:

$$\rho h\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}W_{mn}\ddot{q}_{mn}+D\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\nabla^4W_{mn}q_{mn}=f(x,y,t) \tag{34}$$

对式(34)两边同时乘 W_{kl},并沿板 s 积分,利用振型函数的正交性,可以得到

$$\ddot{q}_{mn}(t)+2\zeta_{mn}\omega_{mn}\dot{q}(t)+\omega_{mn}^2q_{mn}(t)=f_{mn}(t)\quad(m=1,2,\cdots;n=1,2,\cdots) \tag{35}$$

式中:$f_{mn}(t)$、ζ_{mn} 分别为第(m,n)阶模态力和模态阻尼比。

$$\left.\begin{aligned}M_{mn}&=\iint_s\rho hW_{mn}^2\,\mathrm{d}s\\f_{mn}(t)&=\frac{1}{M_{mn}}\iint_s f(x,y,t)W_{mn}(x,y)\,\mathrm{d}s\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

式中:M_{mn} 为(m,n)阶模态质量。设系统的初始位移与初始速度分别为 $w_0(x,y)$、$\dot{w}_0(x,y)$,则可得到模态坐标下的初始条件:

$$\left.\begin{aligned}q_{mn}(0)&=\frac{1}{M_{mn}}\iint_s\rho hW_{mn}(x,y)w_0(x,y)\,\mathrm{d}s\\\dot{q}_{mn}(0)&=\frac{1}{M_{mn}}\iint_s\rho hW_{mn}(x,y)\dot{w}_0(x,y)\,\mathrm{d}s\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

在模态空间下解耦后,系统由多个单自由度系统响应以零初始状态下受激励引起的响应及零激励条件下由初始条件引起的响应叠加而成,将模态空间下的结构响应代入式(35)即可得物理坐标下的系统响应:

$$w_n(x,y,t)=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}W_{mn}(x,y)\left(U_{mn}(t)q_{mn}(0)+V_{mn}(t)\dot{q}_{mn}(0)+\int_0^t h_{mn}(t-\tau)f_{mn}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \tag{38}$$

其中模态空间的单位脉冲响应函数 $h_{mn}(t)$ 为

$$h_{mn}(t)=\frac{\mathrm{e}^{-\zeta_{mn}\omega_{mn}t}}{\omega_{mn}\sqrt{1-\zeta_{mn}^2}}\sin\omega_{mn}\sqrt{1-\zeta_{mn}^2}\,t \tag{39}$$

式中:$U_{mn}(t)$ 和 $V_{mn}(t)$ 分别为单位初始位移和单位初始速度引起的自由振动,当初始条件为零时,系统响应可简化为

$$w_n(x,y,t)=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}W_{mn}(x,y)\int_0^t h_{mn}(t-\tau)f_{mn}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{40}$$

假设作用在薄板上的分布动载荷为 $f(x,y,t)$,对该分布动载荷分离变量:

$$f(x,y,t)=P(x,y)T(t) \tag{41}$$

则薄板的分布动载荷模态力为

$$f_{mn}(t)=\frac{1}{M_{mn}}\iint_s P(x,y)T(t)W_{mn}(x,y)\,\mathrm{d}s \tag{42}$$

即

$$f_{mn}(t)=\int_0^b\int_0^a W_{mn}(x,y)P(x,y)T(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(m=1,2,\cdots,k;n=1,2,\cdots,k) \tag{43}$$

选取薄板上的 $k\times k$ 个高斯点,对式(43)使用 Gauss-Legendre 积分公式可得第 $m\times n$ 阶模态力为

$$F_{m\times n}(t)=T(t)\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}A_iB_j[W_{mn}(x_i,y_j)P(x_i,y_j)]\quad(m=1,2,\cdots,k;n=1,2,\cdots,k) \tag{44}$$

式中 A_i 和 B_j 为 x 和 y 方向的高斯积分系数。

设在同一块薄板上施加 $k\times k$ 个集中动载荷 f_{kk},每个集中力正好加载到薄板的高斯勒让德积分点上。集中力表达式为

$$f_{ij}=I_{ij}\delta(x-x_i)\delta(y-y_j) \tag{45}$$

式中:I_{ij} 为第(i,j)个集中力 f_{ij} 的系数。

则有第(i,j)个集中动载荷的第 $m\times n$ 阶模态力为

$$F'_{mn}(t)=\int_0^b\int_0^a W_{mn}(x,y)I_{ij}\delta(x-x_i)\delta(y-y_j)T(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{46}$$

即

$$F'_{mn}(t)=T(t)W_{mn}(x_i,y_j)I_{ij} \tag{47}$$

则 $k\times k$ 个集中动载荷在第 $m\times n$ 阶模态力之和为

$$F_{mn}(t)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}T(t)W_{mn}(x_i,y_j)I_{ij} \tag{48}$$

根据模态截断原理,高阶模态响应对实际响应影响较小,故只需考虑前 $k\times k$ 阶模态响应。令分布动载荷前 $k\times k$ 阶模态力与集中动载荷的模态力相等,则有:

$$\left.\begin{aligned}
F_{11}(t)&=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}T(t)W_{kk}(x_i,y_j)I_{ij}=\\
&\quad T(t)\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}A_iB_j[W_{11}(x_i,y_j)P(x_i,y_j)]\\
&\vdots\\
F_{1k}(t)&=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}T(t)W_{kk}(x_i,y_j)I_{ij}=\\
&\quad T(t)\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}A_iB_j[W_{1k}(x_i,y_j)P(x_i,y_j)]\\
F_{21}(t)&=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}T(t)W_{kk}(x_i,y_j)I_{ij}=\\
&\quad T(t)\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}A_iB_j[W_{21}(x_i,y_j)P(x_i,y_j)]\\
&\vdots\\
F_{kk}(t)&=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}T(t)W_{kk}(x_i,y_j)I_{ij}=\\
&\quad T(t)\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}A_iB_j[W_{kk}(x_i,y_j)P(x_i,y_j)]
\end{aligned}\right\}\tag{49}$$

根据式(49)可得板上各高斯积分点上力的幅值:

$$I_{ij}(x_i,y_j)=A_iB_jP(x_i,y_j)\tag{50}$$

2 仿真算例

2.1 有限元建模

为对本文提出的分布动载荷等效加载方法进行验证,下面将通过 Abaqus 建立有限元模型,并通过有限元仿真验证。

由于研究的梁为 Bernoulli-Euler 梁,不考虑梁的剪切变形与绕中性轴的转动惯量,且不讨论梁的扭转变形。因此,可以在部件模块中建立三维可变形的线模型来简化实际梁模型,设置梁长度为 0.7 m。定义材料属性并装配后进行网格划分,使用软件自带的全局布种,尺寸控制在 0.007 m,把梁结构分为 100 个单元,并设置单元类型为两节点空间线性梁单元(B31)。设置悬臂梁的边界条件后,施加目标分布动载荷与等效集中动载荷进行分析。具体建模结果如图 2 所示。

此外,在下文还将涉及板的有限元建模。具体建模过程与梁结构类似,主要区别在于建立板模型时,通过部件模块创建三维可变形壳结构来简化建模,薄板结构的长宽设置为 0.5 m×0.5 m。使用全局布种划分结构化网格,每边按个数布种划分为 36 个单元。设置单元类型为四结点曲面薄壳或厚壳(S4R),具体模型如图 3 所示。

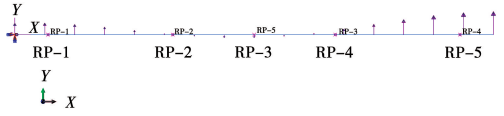


图 2 悬臂梁有限元模型

Fig. 2 Cantilever beam finite element model

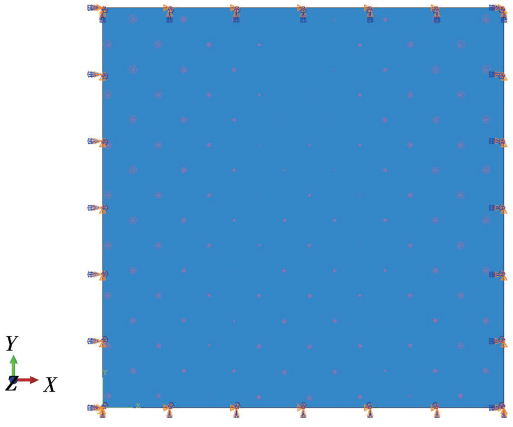


图 3 板有限元模型

Fig. 3 Plate finite element model

2.2 算例 1:一维分布动载荷

选择如图 4 所示的受分布动载荷影响的等截面均质 Bernoulli-Euler 梁模型,梁的两端简支。其中梁长度 $l=1$ m,矩形截面高 $h=0.008$ m,截面宽度 $b=0.02$ m,材料的杨氏模量 $E=210$ GPa,密度 $\rho=7\,800$ kg·m^{-3},假设阻尼为 Rayleigh 阻尼,阻尼系数 $\alpha=4.543$,$\beta=4.874\times10^{-6}$。在梁上施加垂直于 x 轴的按如下分布的动载荷 $F(x,t)$:

$$F(x,t)=10\left(\cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)+\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)\right)\sin(160\pi t)\tag{51}$$

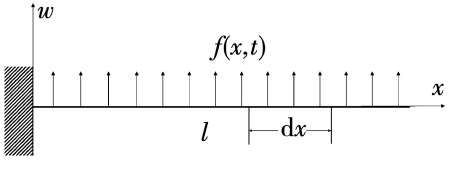


图 4 Bernoulli-Euler 悬臂梁模型

Fig. 4 Bernoulli-Euler cantilever beam module

通过在上一小节中对模态截断方法的论证,可知截取对系统响应影响较大的前几阶模态响应就足以近似系统的实际振动。因此,下面选择梁上 5 个

高斯点等效梁的前 5 阶模态振动,计算出相应高斯点的求积系数 A_i,根据式(21)计算出各高斯积分点上施加的集中力系数 s_i,结果如表 1 所示。

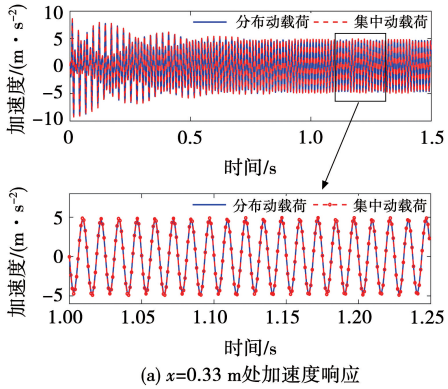
表 1　各高斯点的求积系数和集中力的幅值系数

Tab. 1　Quadrature and amplitude coefficients at Gaussian points

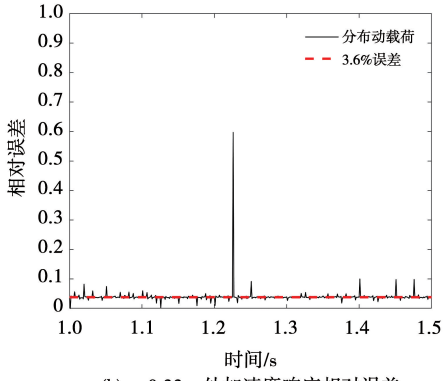
高斯点序号	x_i/m	A_i	s_i
1	0.046 9	0.118 4	1.221
2	0.230 7	0.239 3	1.137
3	0.500 0	0.284 4	−0.833
4	0.769 2	0.239 3	2.526
5	0.953 1	0.118 4	2.314

2.2.1 无噪声情况下梁加速度与位移响应及误差

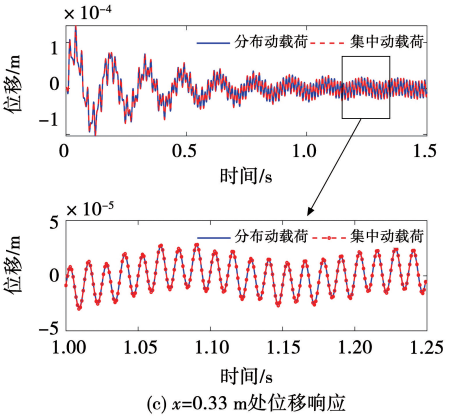
通过 Abaqus 建立有限元模型,分别在梁模型上施加分布动载荷 $F(x,t)$ 和集中动载荷。假设梁的初始条件为零,取梁上 $x=0.33$ m 和 $x=1$ m 处的加速度响应,并绘制其前 1.5 s 的加速度响应,其结果如图 5 ~6 所示。



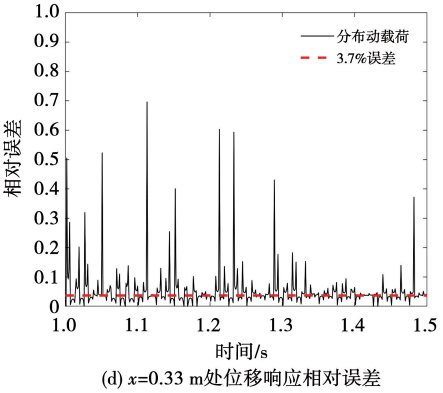
(a) x=0.33 m处加速度响应



(b) x=0.33 m处加速度响应相对误差



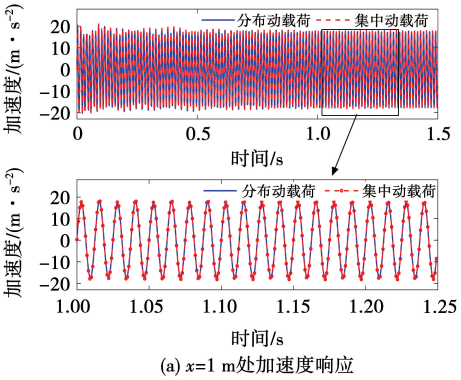
(c) x=0.33 m处位移响应



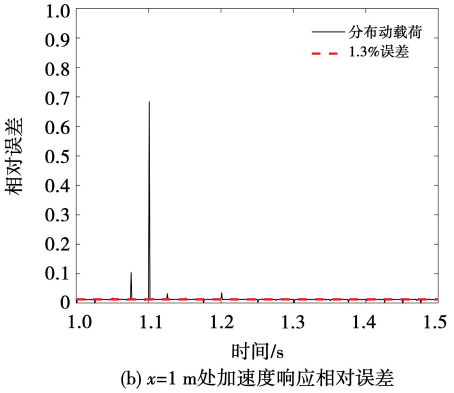
(d) x=0.33 m处位移响应相对误差

图 5　$x=0.33$ m 处等效响应及误差

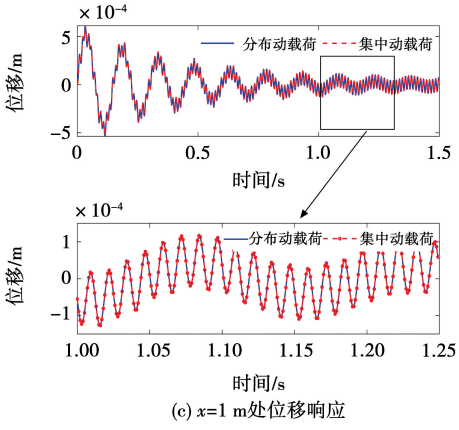
Fig. 5　Equivalent response and error at $x=0.33$ m



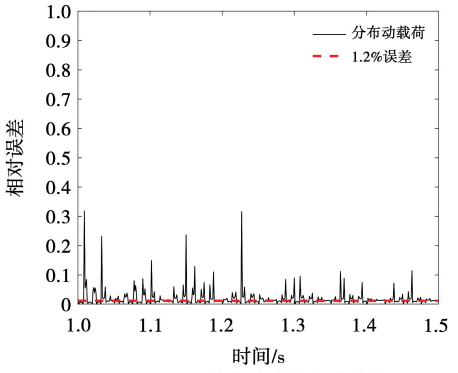
(a) x=1 m处加速度响应



(b) x=1 m处加速度响应相对误差



(c) x=1 m处位移响应



(d) x=1 m处位移响应相对误差

图 6 x =1 m 处等效响应及误差

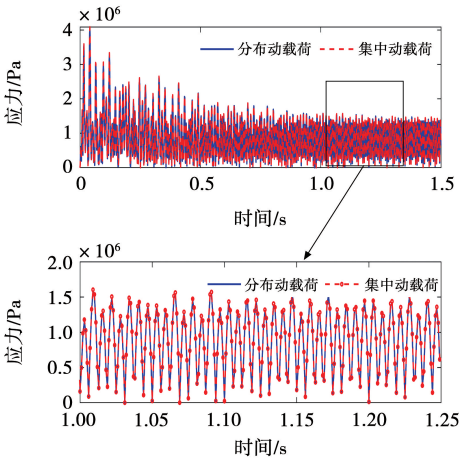
Fig. 6 Equivalent response and error at x =1 m

由图 5 ~6 可知,在不考虑加载过程中引入的噪声情况下,两种加载方式下,梁上随意选择的点 x = 0.33 m 与 x = 1 m 处的加速度响应与位移响应的绝对误差都较小。个别点出现相对误差偏大的原因是相对误差计算时分母为零,微小的误差也会导致较大的相对误差。经计算,x = 0.33 m 与 x = 1 m 处的加速度响应绝对误差分别为 4.2% 和 1.5%,位移的相对误差为 4.1% 和 1.4%。仿真所得梁上加速度和位移等效响应数据结果都较好。

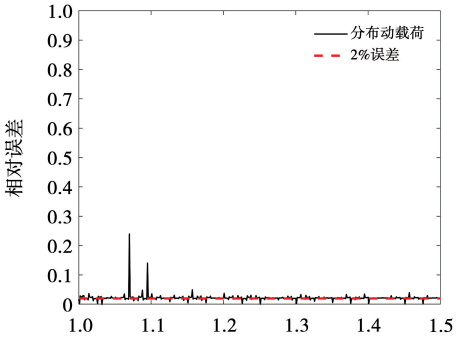
2.2.2 无噪声情况下梁应力响应及误差

除了位移与加速度响应,还要考虑分布动载荷与集中动载荷作用下梁上应力的变化情况,悬臂梁最大应力一般出现在固定约束处,下面取悬臂梁固定约束处应力并分析其前 1.5 s 的结果,如图 7 所示。

由图可见,在不考虑集中动载荷加载过程中激振器等引入噪声的情况下,本文提出的等效加载方法与分布动载荷直接加载下 x = 0 m 处的 Mises 应力的绝对误差很小,应力的相对误差大约在 2%。由



(a) x=0 m处Mises应力响应



(b) x=0 m处Mises应力响应

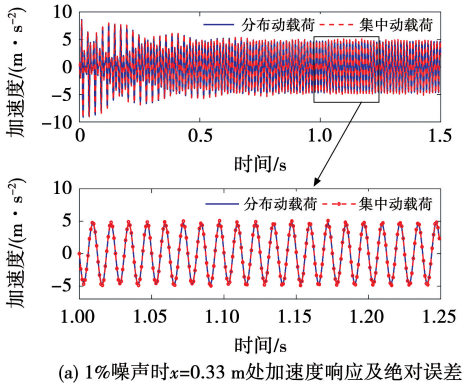
图 7 x =1 m 处应力响应及误差

Fig. 7 Mises stress response and error at x = 0 m

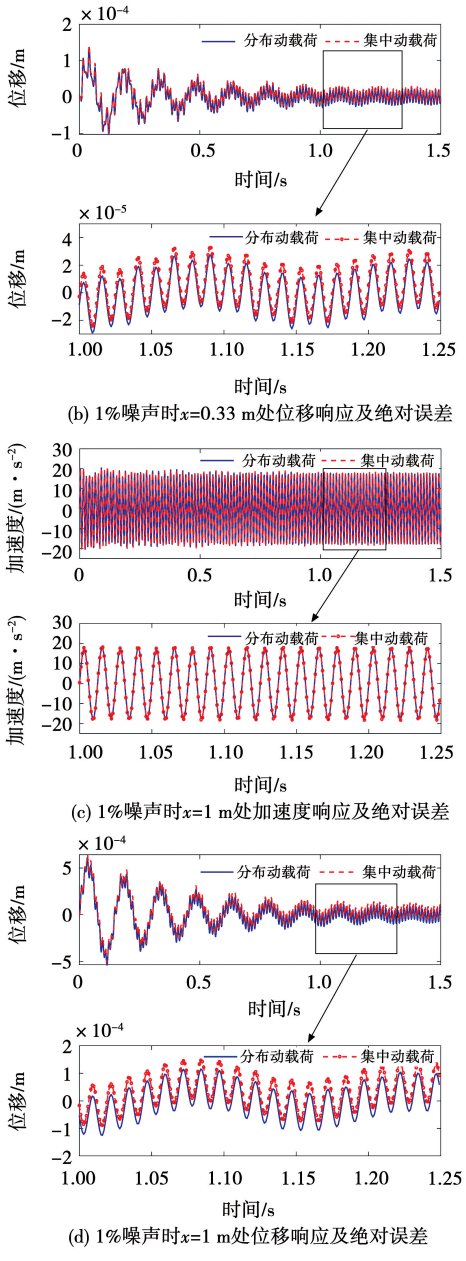
于 x = 0 m 处为悬臂梁最大应力点,故可通过等效方法核验分布动载荷作用下结构的强度。

2.2.3 1% 噪声情况下梁加速度与位移响应及误差

为探讨噪声对等效结果的影响,在所有输入的集中动载荷中增加 1% 的随机信号,再通过仿真求出其在 x = 0.33 m 与 x = 1 m 处 0 ~ 1.5 s 的等效加速度响应,具体结果如图 8 所示。



(a) 1%噪声时x=0.33 m处加速度响应及绝对误差



(b) 1%噪声时x=0.33 m处位移响应及绝对误差

(c) 1%噪声时x=1 m处加速度响应及绝对误差

(d) 1%噪声时x=1 m处位移响应及绝对误差

图 8　1%噪声时结构响应及绝对误差

Fig. 8　Structural response and absolute error with 1% noise

由图 8 可见,在 1% 的噪声集中动载荷激励下,梁结构上 $x=0.33$ m 与 $x=1$ m 处加速度与位移响应相较未加噪声改变较小。经计算,两处加速度响应相对误差改变不超过 1%,位移响应误差改变不超过 2%,可知噪声对结果的影响较小,等效方法具有一定的抗噪声能力。具体加速度和位移绝对误差变化如表 2 所示。

表 2　加噪声前后响应相对误差

Tab. 2　Relative error of response before and after adding noise

相对误差	无噪声	1% 噪声
$x=0.33$ m,加速度相对误差/%	3.9	4.9
$x=0.33$ m,位移相对误差/%	4.2	6.5
$x=1$ m,加速度相对误差/%	1.5	1.9
$x=1$ m,位移相对误差/%	1.4	3.1

2.3　算例 2:二维分布动载荷

2.3.1　板响应及误差(高斯积分点 $M=5, N=5$ 时)

M、N 分别为矩形板上 x、y 方向所取的高斯点数目。为了验证方法的通用性,并进一步探索高斯点数目对动载荷等效结果的影响,下面对板结构进行仿真分析。选取 1 块 0.5 m × 0.5 m × 0.005 m 的矩形板,板材料的杨氏模量为 $E=210$ GPa,密度为 $\rho=7\,800$ kg·m^{-3},假设阻尼为 Rayleigh 阻尼,阻尼系数 $\alpha=4.543$,$\beta=4.874\times10^{-6}$。在板上施加 $F(x,y,t)=10\left(\cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)+\sin\left(\frac{\pi y}{2l}\right)\right)\sin(300\pi t)$,再计算出板上高斯勒让德积分点的位置,在 x 和 y 方向取高斯点数目为 $M=5$,$N=5$,计算出其具体位置及积分系数,如表 3 ~ 4 所示。

表 3　高斯积分点的位置

Tab. 3　The positions of Gaussian quadrature points

高斯积分点位置(x_i,y_i)/m	$y_1=0.046$	$y_2=0.230$	$y_3=0.500$	$y_4=0.769$	$y_5=0.953$
$x_1=0.046$	(0.046,0.046)	(0.046, 0.230)	(0.046, 0.500)	(0.046, 0.769)	(0.046, 0.953)
$x_2=0.230$	(0.230, 0.046)	(0.230, 0.230)	(0.230, 0.500)	(0.230, 0.769)	(0.230, 0.953)
$x_3=0.500$	(0.500, 0.046)	(0.500, 0.230)	(0.500, 0.500)	(0.500, 0.769)	(0.500, 0.953)
$x_4=0.769$	(0.769, 0.046)	(0.769, 0.230)	(0.769, 0.500)	(0.769, 0.769)	(0.769, 0.953)
$x_5=0.953$	(0.953, 0.046)	(0.953, 0.230)	(0.953, 0.500)	(0.953, 0.769)	(0.953, 0.953)

表 4 高斯积分点的积分系数

Tab. 4 Quadrature coefficients of Gaussian quadrature points

各点积分系数	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0.036	0.093	0.14	0.134	0.06
x_2	0.013	0.068	0.15	0.151	0.0792
x_3	−0.078	−0.109	−0.059	−0.011	−0.0002
x_4	0.013	0.068	0.141	0.151	0.079
x_5	0.036	0.093	0.140	0.134	0.068

具体集中动载荷施加示意图如下：

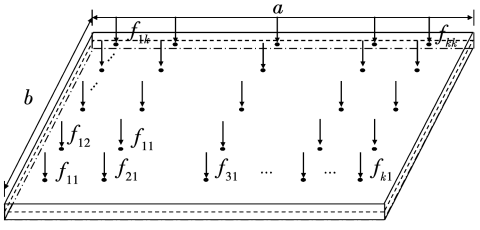
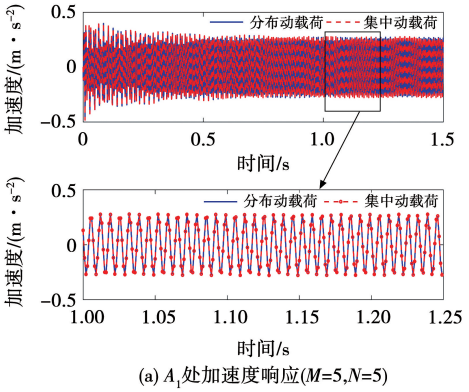


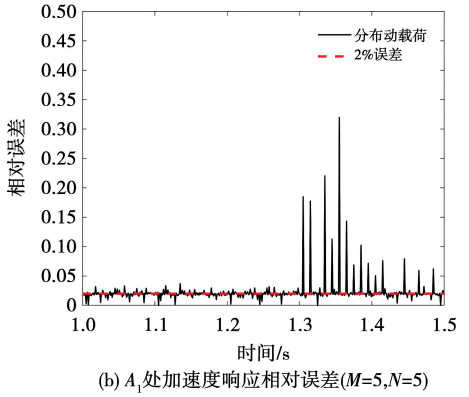
图 9 集中载荷加载示意图

Fig. 9 Schematic diagram of concentrated load application

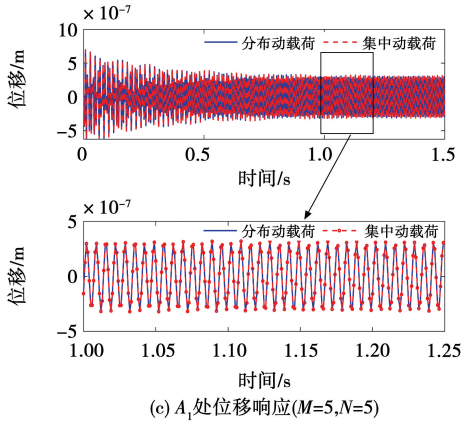
通过 Abaqus 建立板的有限元模型，为验证板所有点的等效结果都满足预期，随机选择板上的 2 个点 $A_1(0.5,0.5)$ 和 $A_2(0.416,0.083)$ 计算板在分布动载荷及等效集中动载荷作用下 A_1 和 A_2 点处 0 ~ 1.5 s 的加速度及位移响应，具体结果如下。



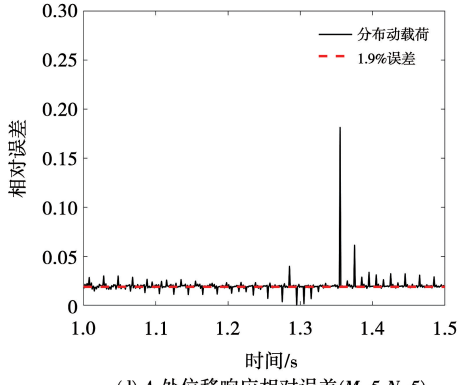
(a) A_1处加速度响应(M=5,N=5)



(b) A_1处加速度响应相对误差(M=5,N=5)



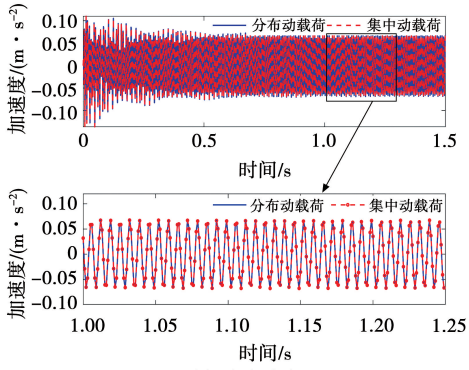
(c) A_1处位移响应(M=5,N=5)



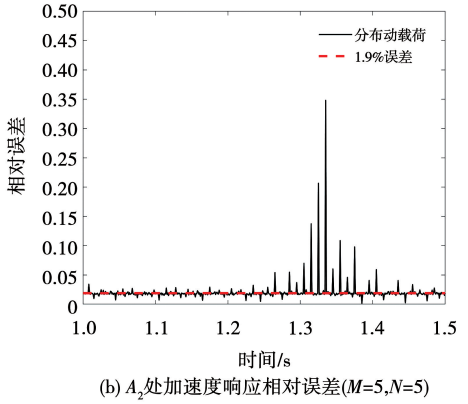
(d) A_1处位移响应相对误差(M=5,N=5)

图 10 A_1 处等效响应及误差

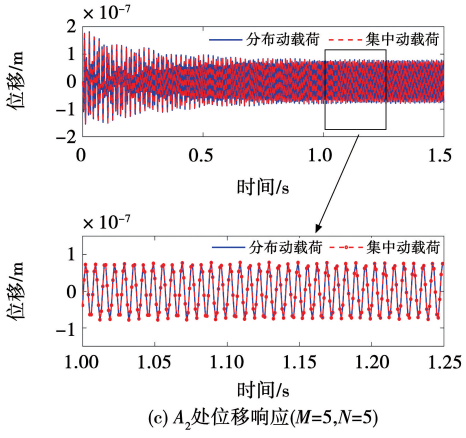
Fig. 10 Equivalent response and error at A_1



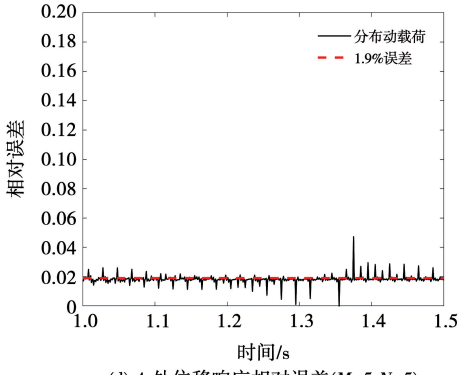
(a) A_2处加速度响应(M=5,N=5)



(b) A_2处加速度响应相对误差(M=5,N=5)



(c) A_2处位移响应(M=5,N=5)



(d) A_2处位移响应相对误差(M=5,N=5)

图 11　A_2 处等效响应及误差

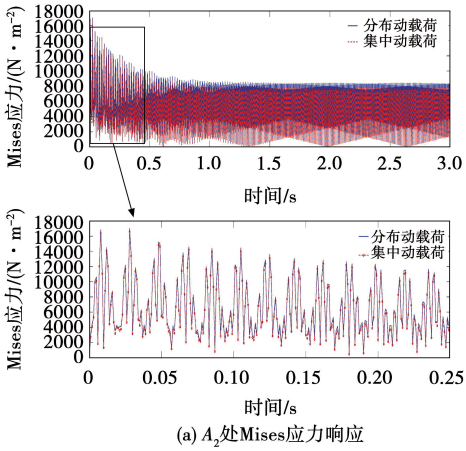
Fig. 11　Equivalent response and error at A_2

由图 10 ~ 11 可见,在不考虑加载过程中引入的噪声的情况下,两种加载方式四边简支板上随意选择的点 A_1 与 A_2 处的加速度响应与位移响应的绝对误差都较小。经计算可得,A_1 与 A_2 处的加速度响应绝对误差分别为 2.3% 和 2.0%,位移的相对误差为 2.25% 和 1.9%,加速度和位移响应的等效结果都较好。

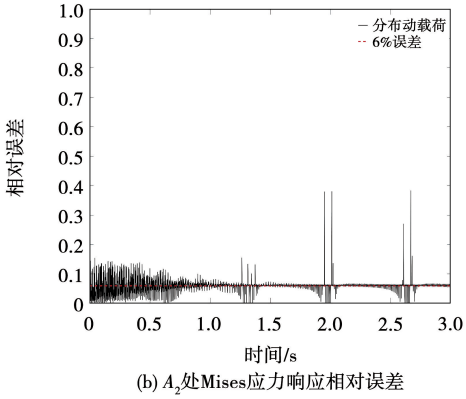
2.3.2　板应力响应及误差(高斯积分点取 $M=5$,$N=5$ 时)

为验证能否用等效集中动载荷作用下结构的应力应变等响应来判断分布动载荷作用下结构的破坏情况,计算 A_2 点的 Mises 应力变化情况,具体结果如图 12 所示。

由图可见,本文提出的方法在不考虑集中动载荷加载过程中激振器等引入的噪声的情况下,在两种加载方法下,A_2 处的 Mises 应力的绝对误差很小,应力的相对误差大约在 6% 以下。故可通过该等效加载方法核验分布动载荷作用下结构的强度。



(a) A_2处Mises应力响应



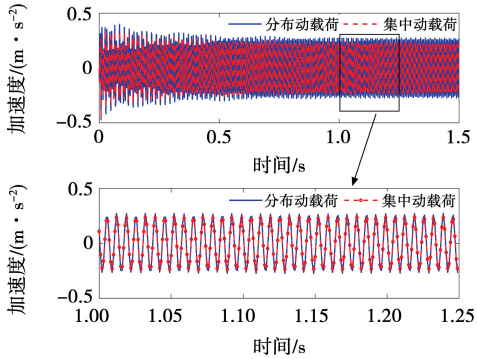
(b) A_2处Mises应力响应相对误差

图 12　A_2 处应力响应及误差

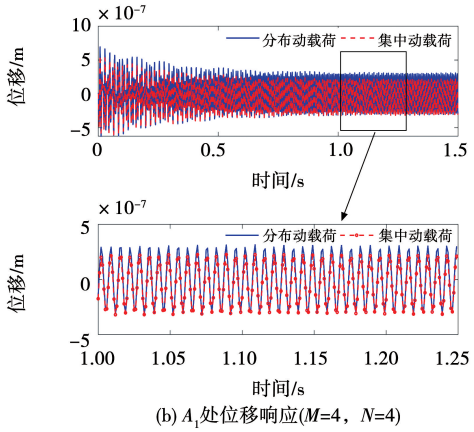
Fig. 12　Mises stress response and error at A_2

2.3.3　板响应及误差(高斯积分点 $M=4$,$N=4$ 时)

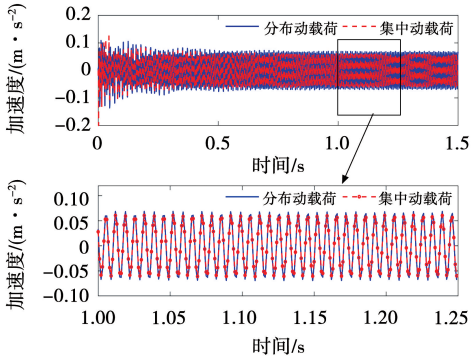
下面考虑在 x 和 y 两方向高斯点个数 $M=4$,$N=4$ 的载荷等效,计算出各高斯点的位置及其系数,并同样绘制出 A_1 与 A_2 处的加速度响应与位移响应,具体等效结果如图 13 所示。



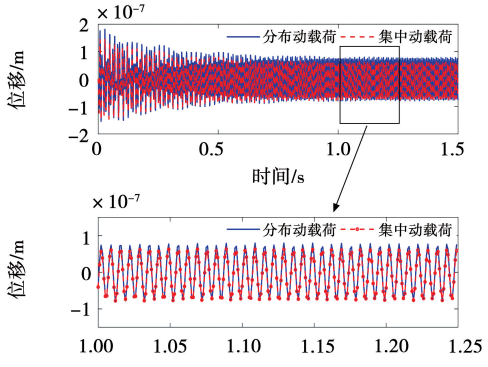
(a) A_1处加速度响应(M=4，N=4)



(b) A_1处位移响应(M=4，N=4)



(c) A_2处加速度响应(M=4，N=4)



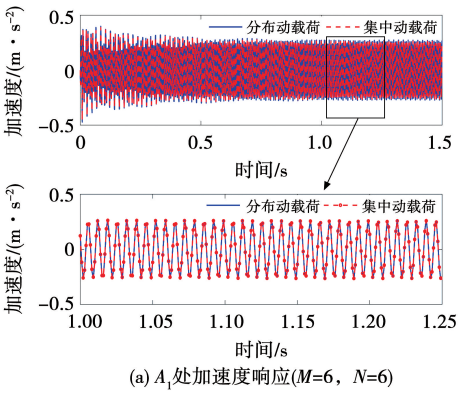
(d) A_2处位移响应(M=4，N=4)

图 13 当高斯积分点数目为 4×4 时的等效响应

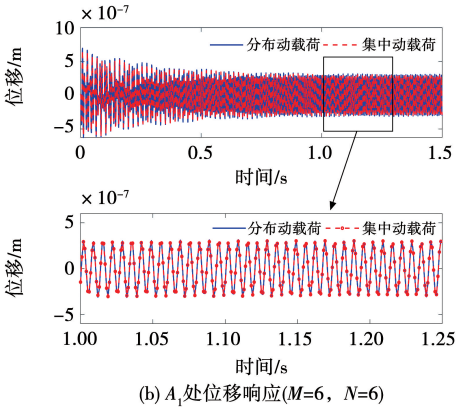
Fig. 13 Equivalent response when the Gaussian quadrature points are 4×4

2.3.4 板响应及误差(高斯积分点 $M=6$, $N=6$ 时)

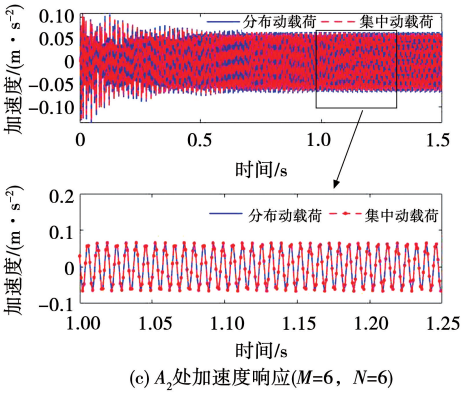
下面考虑在 x 和 y 两方向高斯点个数 $M=6$, $N=6$ 的载荷等效,计算出各高斯点的位置及其系数,并同样绘制出 A_1 与 A_2 处的加速度响应与位移响应,具体等效结果如图 14 所示。



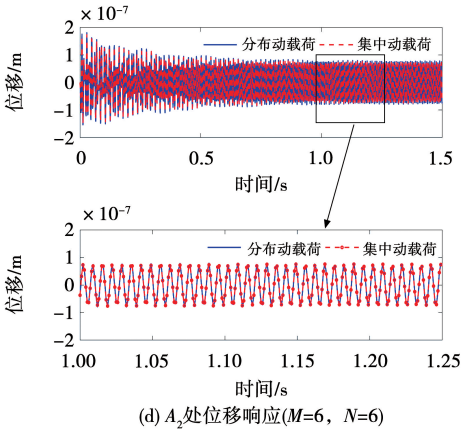
(a) A_1处加速度响应(M=6，N=6)



(b) A_1处位移响应(M=6，N=6)



(c) A_2处加速度响应(M=6，N=6)



(d) A_2处位移响应(M=6，N=6)

图 14 当高斯积分点数目为 6×6 时的等效响应

Fig. 14 Equivalent response when the Gaussian quadrature points are 6×6

由图 10 ~ 14 可以直观看出当增加简支板上高斯积分点的数目(集中载荷加载点数目)时,分布动载荷的等效效果有明显的上升。高斯积分点数目由 $M=5,N=5$ 上升到 $M=6,N=6$ 时,等效结果略有下降的原因,可能是随着等效点数的增加,结构整体误差分布发生改变,使得原本误差较小的区域误差水平升高。高斯积分点数目从 $M=4,N=4$ 上升到 $M=6,N=6$ 的具体等效结果变化如表 5 所示。

表 5　不同积分点数相对误差

Tab. 5　The relative error for different numbers of quadrature points

相对误差	$M=4$, $N=4$	$M=5$, $M=5$	$M=6$, $M=6$
A_1 加速度相对误差/%	13.5	2.3	4.4
A_1 位移相对误差/%	18.5	2.25	5.7
A_2 加速度相对误差/%	11.6	2.04	5.1
A_2 位移相对误差/%	9.6	1.9	5.9
A_2 应力相对误差/%	13.3	6.0	2.6

3　结　语

本文以悬臂梁及四边简支板为对象,在模态空间下,用模态力等效的方法实现一维分布动载荷和二维分布动载荷的离散等效。采用 Gauss-Legendre 积分的原理选择集中载荷加载点,并计算各集中动载荷的系数大小,避免矩阵求逆过程中的数值不稳定性问题。在对不受噪声干扰的悬臂梁上施加分布动载荷的仿真中,经过分析和等效处理后发现,在随机选取的测点处,加速度、位移及应力响应的等效精度表现优异。当在加载过程中引入 1% 的随机噪声时,系统的加速度响应误差变化不大,说明该等效方法具有一定的抗噪声能力。在对简支板的研究中,验证了分布动载荷的等效精度与高斯点数目成正相关。此外,在分布动载荷等效加载实验中,集中力之间的耦合干扰效应,以及等效方法在非均匀梁或板结构中的适用性问题将在后续研究中进行讨论。

参 考 文 献:

[1] 张桂玮, 刘召庆, 朱镭, 等. 地面颤振模拟试验技术研究进展[J]. 航空学报, 2024, 45(10): 029229.
ZHANG Guiwei, LIU Zhaoqing, ZHU Lei, et al. Research Progress of Ground Flutter Simulation Test Technology[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2024, 45(10): 029229.

[2] 潘树祥, 齐丕骞. 地面模拟热颤振试验研究[J]. 强度与环境, 1984, 11(2): 8.
PAN Shuxiang, QI Piqian. Experimental Study on Ground Simulated Thermal Flutter [J]. Structure & Environment Engineering, 1984, 11(2): 8.

[3] ZENG J, KINGSBURY D, RITZ E, et al. GVT-based Ground Flutter Test without Wind Tunnel [C]//52nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 2011:1942.

[4] 王俊蛟. 非定常气动铰链力矩理论分析与试验系统研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2018.

[5] 胡巍, 杨智春, 谷迎松. 带操纵面机翼气动弹性地面试验仿真系统中的气动力降阶方法[J]. 西北工业大学学报, 2013, 31(5): 810.
HU Wei, YANG Zhichun, GU Yingsong. A New and Effective Method for Reducing Order of Aerodynamics of a Wing with Control Surface for Ground Flutter Test [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2013, 31(5): 810.

[6] DHITAL K, HAN J H. Subsonic Flutter Emulation of Composite Laminate Using a Few Concentrated Forces [C]//21st International Conference on Composite Materials,2017:1.

[7] 高博. 地面颤振试验系统动力学建模与控制仿真技术研究[D]. 北京: 中国航天科技集团公司第一研究院, 2018.

[8] SMYSLOV V I. Tasks of the Modal Test and Reproduction of Forces by Means of Electromechanical Simulation [J]. TsAGI Science Journal, 2017, 48(8): 761.

[9] DHITAL K, HAN J H. Panel Flutter Emulation Using a few Concentrated Forces [J]. International Journal of Aeronautical and Space Sciences, 2018, 19(1): 80.

[10] ZHANG Z, GAO B, WANG J, et al. A Generalised Force Equivalence-based Modelling Method for a Dry Wind-tunnel Flutter Test System [J]. The Aeronautical Journal, 2021, 125(1286): 720.

[11] 宋巧治, 王彬文, 李晓东. 基于 CFD 的地面颤振模拟试验非定常气动力重构方法研究[J]. 振动与冲击, 2022, 41(10): 40.
SONG Qiaozhi, WANG Binwen, LI Xiaodong. Unsteady Aerodynamic Model Reproduction Method for Ground Flutter Simulation Test Based on CFD [J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(10): 40.

[12] 王彬文, 宋巧治, 陈浩宇. 高超声速飞行器地面颤振评估技术研究[J]. 南京航空航天大学学报, 2022, 54(5): 899.

WANG Binwen, SONG Qiaozhi, CHEN Haoyu. Study on Ground Flutter Test Method for Hyper-Sonic Vehicle[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2022, 54(5): 899.

[13] 陈奥辉, 姜金辉. 分布动载荷时域识别的动标定试验方法[J]. 南京航空航天大学学报, 2024, 56(3): 561.
CHEN Aohui, JIANG Jinhui. Research on Dynamic Calibration Experiment of Distributed Dynamic Load Identification in Time-domain[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2024, 56(3): 561.

[14] 张世基. 飞机地面共振试验的几个问题[J]. 北京航空学院学报, 1959(3): 79.
ZHANG Shiji. Several Problems of Aircraft Ground Resonance Test[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1959(3): 79.

[15] 赵新通, 管健晖, 胡涌鑫, 等. 正压呼吸防护面罩中无刷电机的模糊PID控制[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2024, 29(2): 61.
ZHAO Xintong, GUAN Jianhui, HU Yongxin, et al. Fuzzy PID Control of Brushless Motors in Positive Pressure Respiratory Protective Masks[J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2024, 29(2): 61.

[16] 朱博, 张钰朋, 徐攀腾, 等. 实现位置同步的双电机交叉耦合控制策略[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2022, 27(5): 114.
ZHU Bo, ZHANG Yupeng, XU Panteng, et al. Cross Coupling Control Strategy of Two Motors for Position Synchronization[J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2022, 27(5): 114.

[17] 刘中生, 陈塑寰, 赵又群. 模态截断与简谐载荷的响应[J]. 航空学报, 1993(9): 537.
LIU Zhongsheng, CHEN Suhuan, ZHAO Youqun. Modal Truncation and the Response to Harmonic Excitation[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1993(9): 537.

[18] JIANG J, DING M, LI J. A Novel Time-domain Dynamic Load Identification Numerical Algorithm for Continuous Systems[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 160: 107881.

(编辑:温泽宇)