

w -核 EP 逆在对合环上的新刻画

翟笃胜, 宋贤梅

(安徽师范大学 数学与统计学院, 安徽 芜湖 241002)

摘要: 考虑对合环上的 w -核 EP 逆, 从两个方面讨论其性质. 一方面, 定义 w -核 EP 分解, 通过该分解给出 w -核 EP 逆的新刻画, 并讨论 w -核 EP 可逆元的一些新性质. 另一方面, 通过引入 $e = a_w^{\circ}(aw)^{k+1}$, $f = wa_w^{\circ}(aw)^ka$ 以及投射元 $p = awa_w^{\circ}$, 利用 e, f 和投射元 p 对 w -核 EP 核逆进行等价刻画, 并由此定义 w -核 EP 序 $a \leq_w^{\circ} b$, 研究 w -核 EP 序的性质及其等价刻画.

关键词: w -核逆; w -核 EP 逆; w -核 EP 分解; w -核 EP 序

中图分类号: O153 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2026)03-0535-10

New Characterization of w -Core EP Inverse in Involutive Rings

ZHAI Dusheng, SONG Xianmei

(School of Mathematics and Statistics, Anhui Normal University, Wuhu 241002, Anhui Province, China)

Abstract: We considered the w -core EP inverse in involutive rings and discussed its properties from two aspects. On the one hand, the w -core EP decomposition was defined, and a new characterization of the w -core EP inverse was given through the w -core EP decomposition, and some new properties of the w -core EP invertible element were discussed. On the other hand, $e = a_w^{\circ}(aw)^{k+1}$, $f = wa_w^{\circ}(aw)^ka$ and the projection element $p = awa_w^{\circ}$ were introduced. The w -core EP core inverse was equivalently characterized by using e, f and the projection element p , and the w -core EP order $a \leq_w^{\circ} b$ was defined accordingly. The properties and its equivalent characterizations of the w -core EP order were studied.

Keywords: w -core inverse; w -core EP inverse; w -core EP decomposition; w -core EP order

1 引言与预备知识

本文中的 R 均指含有单位元的结合环且满足对合性, 通常称为对合环或者 $*$ -环. 这里对合是指环 R 上的一个自同构 $*$, 满足对任意的 $a, b \in R$, 有

$$(a^*)^* = a, \quad (a+b)^* = a^* + b^*, \quad (ab)^* = b^*a^*.$$

Baksalry 等^[1]通过引入复矩阵上的核逆和对偶核逆的概念, 给出了矩阵上的群逆和核逆是等价的; Rakić 等^[2]将核逆和对偶核逆的概念从矩阵推广到对合环上, 给出了对合环中群逆、Moore-Penrose 逆、核逆与对偶核逆的等价定义, 并从四者之间的等价定义中得出了核逆与对偶核逆是介于群逆和 Moore-Penrose 逆之间的广义逆; Manjunatha Prasad 等^[3]给出了复矩阵上核 EP 逆的概念, 并证明了核逆是核 EP 逆的一种特殊情况; Ferreyra 等^[4]推广了矩阵上的核 EP 逆, 引入了矩阵形式加权的核

收稿日期: 2025-11-04.

第一作者简介: 翟笃胜(2001—), 男, 汉族, 硕士研究生, 从事广义逆的研究, E-mail: 493728126@qq.com. **通信作者简介:** 宋贤梅(1977—), 女, 汉族, 博士, 副教授, 从事代数学和代数编码的研究, E-mail: xianmeisongahnu@163.com.

基金项目: 安徽省自然科学基金(批准号: 2008085MA06)和安徽省教育厅重点研究项目(批准号: KJ2019A0488).

EP 逆;在此基础上,Gao 等^[5]给出了对合环中的伪核逆概念,推广了核逆与核 EP 逆,并给出了伪核逆的等价刻画,研究了伪核逆的逆序律及加性;Zhu 等^[6]通过在对合环上引入 w -核逆的概念,刻画了 w -核逆与 Marry 逆之间的关系;Jin 等^[7]也研究了对合环上 w -核逆的新刻画,得到了 a 是 w -核可逆的当且仅当对于任意的正整数 n ,有 $w(aw)^{n-1}$ 是核可逆的;Zhang 等^[8]进一步研究了 w -核可逆元的性质;Mosić 等^[9]引入了 w -核 EP 逆定义,研究了 w -核 EP 逆的等价刻画及性质,并进一步研究了其与 Marry 逆、伪核逆及 Drazin 逆之间的关系;Wang^[10]引入了复矩阵的核-EP 分解,并利用核 EP 分解研究了核-EP 逆;Gao 等^[11]将复矩阵上的核 EP 分解推广到了对合环上的情形,并研究了对合环中元素的伪核分解;Zhu 等^[12]对对合环上的 w -核逆,引入了一种新的序关系 w -核序,研究了其等价刻画,并用 w -核序研究了 w -核逆的其他性质如逆序性等.

本文受文献[5-7,9-10,12]工作的启发,讨论 w -核 EP 分解和 w -核 EP 序. 首先,在对合环上对元素进行分解,定义 w -核 EP 分解,在此基础上证明 a 有 w -核 EP 分解的充要条件 a 是 w -核 EP 可逆的,并讨论 w -核 EP 可逆元的新性质;其次,引入 w -核 EP 序的定义,讨论 w -核 EP 序的性质与成立的等价条件,证明在 w -核 EP 序成立的条件下, awb 是 w -核 EP 可逆的且满足逆序性.

用 $\mathbb{N}^+$, $\mathbb{N}$ 分别表示正整数集和自然数集. 设 $a \in R$, 若 $a^* = a$, 则称 a 是 Hermite 的;若 $a^2 = a$, 则称 a 是幂等的. 记 $aR = \{ax : x \in R\}$, $Ra = \{xa : x \in R\}$, $a^\circ = \{x \in R : ax = 0\}$, $^\circ a = \{x \in R : xa = 0\}$.

定义 1^[13] 设 $a \in R$, 如果存在一个元素 $x \in R$, 使得:

- 1) $ax = xa$;
- 2) $xax = x$;
- 3) 对某个非负整数 k , 满足 $a^k = a^{k+1}x$.

则 a 称为 Drazin 可逆的, x 称为 a 的 Drazin 逆元. 如果存在这样的 x , 则它是唯一的, 记作 a^D . 满足条件 3) 的最小非负整数 k 称为 a 的 Drazin 指数, 记作 $\text{ind}(a)$. 特别地, 当 $k=1$ 时, a 是群可逆的, 记作 $a^\#$. 注意到如果存在 a 的群逆, 则满足 $a^\#aa^\# = a^\#$, $a^\#a = aa^\#$, $aa^\#a = a$. 分别用 $R^D, R^\#$ 表示 R 上的 Drazin 可逆元和群可逆元的集合.

定义 2^[14] 设 $a \in R$, 如果存在 $x \in R$ 满足 Penrose 方程:

- 1) $axa = a$;
- 2) $xax = x$;
- 3) $(ax)^* = ax$;
- 4) $(xa)^* = xa$.

则 a 称为 Moore-Penrose 可逆, x 称为 a 的 Moore-Penrose 逆. 如果存在这样的 x , 则它是唯一的, 记为 $a^\dagger$. 环 R 上所有 Moore-Penrose 逆元素的集合记为 $R^\dagger$. 如果 a 和 x 满足方程 $axa = a$ 和 $(ax)^* = ax$, 则 x 称为 a 的 $\{1,3\}$ -逆, 记为 $a^{\{1,3\}}$. 同理, 如果 a 和 x 满足方程 $axa = a$ 和 $(xa)^* = xa$, 则 x 称为 a 的 $\{1,4\}$ -逆, 记为 $a^{\{1,4\}}$. 通常用 $R^{\{1,3\}}$ 和 $R^{\{1,4\}}$ 分别表示环 R 中所有 $\{1,3\}$ -可逆和 $\{1,4\}$ -可逆元素的集合. 易知 $a \in R^\dagger$ 当且仅当 $a \in R^{\{1,3\}} \cap R^{\{1,4\}}$.

定义 3^[15] 设 S 是半群, $a, d \in S$. 如果 $x \in S$ 满足 $xad = d = dax$ 且 $x \in dS \cap Sd$, 则称 a 沿着 d 可逆, x 称为 a 沿 d 可逆元. 若存在这样的 x 则唯一, 记 $x = a^{\parallel d}$. 由文献[15]可知, $a \in R^\#$ 当且仅当 a 沿着 a 可逆; $a \in R^D$ 当且仅当存在正整数 k , 使得 a 沿着 a^k 可逆; $a \in R^\dagger$ 当且仅当 a 沿着 a^* 可逆.

定义 4^[2] 设 $a \in R$, 如果存在 $x \in R$, 使得:

- 1) $axa = a$;
- 2) $xR = aR(Rx = Ra)$;
- 3) $Rx = Ra^*(xR = a^*R)$.

则称 a 是核可逆(对偶核可逆)的. x 称为 a 的核逆(对偶核逆). 若存在 a 的核逆(对偶核逆)则唯一, 记 $x = a^\circ$. 文献[2]证明了每个核可逆元均是群可逆的, 且核可逆元有下列 5 个方程表示的等价刻画:

- 1) $axa = a$;
- 2) $xax = x$;

$$3) (ax)^* = ax;$$

$$4) xa^2 = a;$$

$$5) ax^2 = x.$$

定义 5^[5] 设 $a \in R$, 如果存在 $x \in R, k \in \mathbb{N}^+$, 使得:

$$1) xa^{k+1} = a^k;$$

$$2) ax^2 = x;$$

$$3) (ax)^* = ax.$$

则称 a 是伪核可逆的, x 称为 a 的伪核逆. 若存在 a 的伪核逆则唯一, 记为 $x = a^\oplus$. 满足条件的最小正整数 k 称为 a 的伪核逆指数, 记作 $I(a)$.

定义 6^[6] 设 $a, w \in R$, 如果存在 $x \in R$ 满足:

$$1) awx^2 = x;$$

$$2) xaw = a;$$

$$3) (awx)^* = awx.$$

则 a 称为 w -核可逆, x 称为 a 的 w -核逆. 若存在这样的 x 则唯一, 记为 $a_w^\oplus$. 用 $R_w^\oplus$ 表示所有的 w -核可逆元集合. 易知 $a \in R_w^\oplus$ 当且仅当 $w \in R^{\parallel a}$ 且 $a \in R^{\{1,3\}}$. 此外, $a_w^\oplus = w^{\parallel a} a^{\{1,3\}}$.

定义 7^[9] 设 $a, w \in R$. 如果存在 $x \in R$, 使得:

$$1) awx^2 = x;$$

$$2) \text{存在非负整数 } k, x(aw)^{k+1}a = (aw)^k;$$

$$3) (awx)^* = awx.$$

则称 a 是 w -核 EP 可逆, x 称为 a 的 w -核 EP 逆. 若存在这样的 x 则唯一, 记为 $a_w^\oplus$. 满足条件的最小正整数 k 称为 a 的 w -核 EP 逆指数, 记为 $i_w(a) = k$. 用 $R_w^\oplus$ 表示所有的 w -核 EP 可逆元集合.

定义 8^[12] 设 $a, b, w \in R, a \in R_w^\oplus$, 如果 $a_w^\oplus a = a_w^\oplus b, awa_w^\oplus = bwa_w^\oplus$, 则称 a, b 有 w -核序关系, 记作 $a \leq_w^\oplus b$.

引理 1^[9] 设 $a, w \in R$, 则下列命题等价:

1) a 是 w -核 EP 可逆;

2) 存在 $x \in R, k \in \mathbb{N}$, 使得

$$awx^2 = x, \quad x(aw)^{k+1}a = (aw)^ka, \quad xaw = x, \quad awx(aw)^ka = (aw)^ka, \quad (awx)^* = awx.$$

引理 2^[9] 设 $a, w \in R$, 则下列命题等价:

1) a 是 w -核 EP 可逆;

2) 存在非负整数 k , 使得 $w^{\parallel (aw)^ka}$ 存在, 且 $((aw)^ka)^{\{1,3\}} \in ((aw)^ka)\{1,3\}$;

3) 存在非负整数 k , 使得 $w^{\parallel (aw)^ka}$ 存在, 且 $((aw)^{k+1})^{\{1,2\}} \in ((aw)^{k+1})\{1,3\}$;

4) 存在非负整数 k , 使得 $w^{\parallel (aw)^ka}$ 存在, 且 $((aw)^{k+1}a)^{\{1,2\}} \in ((aw)^{k+1}a)\{1,3\}$.

此时, $a_w^\oplus = (aw)^kw^{\parallel (aw)^ka}((aw)^ka)^{\{1,3\}}$.

引理 3^[15] 设 S 是半群, $a, w \in S$, 如果 $w \in S^{\parallel a}$, 则 $w^{\parallel a} = a(wa)^\# = (aw)^\# a$.

引理 4^[9] 设 $a, w \in R$, 则下列命题等价:

1) a 是 w -核 EP 可逆;

2) 存在非负整数 k , 使得 $((aw)^{k+1})^\#$ 存在, $(aw)^ka \in (aw)^{k+1}R$ 且 $((aw)^ka)^{\{1,3\}} \in ((aw)^ka)\{1,3\}$;

3) 存在非负整数 k , 使得 $((wa)^{k+1})^\#$ 存在, $(aw)^ka \in R(wa)^{k+1}$ 且 $((aw)^ka)^{\{1,3\}} \in ((aw)^ka)\{1,3\}$;

4) 存在非负整数 k , 使得 $(aw)^ka \in (aw)^{2k+1}aR \cap R(aw)^{2k+1}a$ 且 $((aw)^ka)^{\{1,3\}} \in ((aw)^ka)\{1,3\}$.

引理 5^[16] 设 $a \in R$, 则 $a \in R^{\{1,3\}}$ 当且仅当 $a \in Ra^*a$. 特别地, 如果对于某个 $x \in R$ 满足 $xa^*a = a$, 则 x^* 是 a 的 $\{1,3\}$ 逆.

引理 6^[17] 设 $a, d \in R$, 则 $a \in R^{\parallel d}$ 当且仅当 $d \in dadR \cap Rdad$. 此时, $a^{\parallel d} = dt = sd$, 其中 $t, s \in R$ 满足 $d = dadt = sdad$.

引理 7^[5] 设 $a \in R$, 存在正整数 $k \geq m$, 则 $a \in R^\oplus$ 且 $I(a) = m$ 当且仅当 $a \in R^D$ 且 $\text{ind}(a) = m$ 且 $a^k \in R^{\{1,3\}}$. 此时, $a^\oplus = a^D a^k (a^k)^{\{1,3\}}$.

引理 8^[9] 设 $a, w \in R$, 则下列命题等价:

- 1) a 是 w -核-EP 可逆;
- 2) aw 是核-EP 可逆;
- 3) $(aw)^D$ 存在且对于 $k \geq \text{ind}(aw)$, 有 $((aw)^k a)^{\{1,3\}} \in ((aw)^k a)\{1,3\}$.

此时, $a_w^\oplus = (aw)^\oplus = (aw)^D (aw)^k a ((aw)^k a)^{\{1,3\}}$.

2 w -核 EP 逆分解及其相关刻画

定义 9 设 $a, w \in R$, 如果 $a = a_1 + a_2$, 使得下列条件成立:

- 1) a_1 是 w -核可逆的;
- 2) $a_2 w$ 是幂零的;
- 3) $(a_1)^* a_2 = a_2 w a_1 = 0$.

则称 $a = a_1 + a_2$ 是 a 的 w -核 EP 逆分解.

引理 9 设 $a, w \in R$, 如果存在 $x \in R, k \in \mathbb{N}$, 使得 $x(aw)^{k+1} a = (aw)^k a, awx^2 = x$, 则对任意正整数 $m \geq k+1$, 有:

- 1) $x(aw)^2 x = awx$;
- 2) $(aw)^m = x(aw)^{m+1}$;
- 3) $(aw)^m = (aw)^m x^m (aw)^m$.

证明: 1) 由已知条件 $x(aw)^{k+1} a = (aw)^k a, awx^2 = x$ 可得

$$\begin{aligned} (aw - x(aw)^2)x &= (aw - x(aw)^2)awx^2 = (aw - x(aw)^2)aw(awx^2)x = \\ &= (aw - x(aw)^2)(aw)^{k+1}x^{k+2} = ((aw)^k a - x(aw)^{k+1}a)wx^{k+2} = 0. \end{aligned}$$

因此 $x(aw)^2 x = awx$.

2) 对任意正整数 $m \geq k+1$, 由已知条件可得

$$(aw)^m = (aw)^k aw (aw)^{m-k-1} = x(aw)^{k+1} aw (aw)^{m-k-1} = x(aw)^{m+1}.$$

3) 对任意正整数 $m \geq k+1$, 由已知条件和 2) 可得

$$(aw)^m = awx^2 (aw)^{m+1} = (aw)^m x^{m+1} (aw)^{m+1} = (aw)^m x^m (aw)^m.$$

定理 1 设 $a, w \in R$, 则 a 是 w -核 EP 可逆的当且仅当 a 有 w -核 EP 逆分解.

证明: 充分性. 假设 $a_w^\oplus$ 存在, 且令 $a_1 = awa_w^\oplus a, a_2 = a - awa_w^\oplus a$. 则由引理 1 和引理 9 易知, 存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得

$$awa_w^\oplus = a_w^\oplus (aw)^2 a_w^\oplus, \quad a_w^\oplus awa_w^\oplus = a_w^\oplus, \quad awa_w^\oplus (aw)^k a = (aw)^k a.$$

进一步, 可得

$$a_1 w (a_w^\oplus)^2 = awa_w^\oplus a_w^\oplus = a_w^\oplus, \quad a_w^\oplus a_1 w a_1 = a_w^\oplus awa_w^\oplus a_w^\oplus a = a_1, \quad (a_1 w a_1^\oplus)^* = (awa_w^\oplus)^* = awa_w^\oplus = a_1 w a_1^\oplus.$$

因此 a_1 是 w -核可逆的且 $a_w^\oplus = a_w^\oplus$. 另一方面, 注意到 $a_2 w a_1 = (aw)^2 a_w^\oplus a - awa_w^\oplus (aw)^2 a_w^\oplus a = 0$, 于是

$$(a_2 w)^{k+1} = a_2 w [(a_2 w)^k + (a_1 w)^k] = (a - awa_w^\oplus a)w(aw)^k = (aw)^{k+1} - awa_w^\oplus (aw)^{k+1} = 0,$$

因此 $a_2 w$ 是幂零的. 最后, 验证 $(a_1)^* a_2 = 0$. 事实上,

$$(a_1)^* a_2 = (awa_w^\oplus a)^* a - (awa_w^\oplus a)^* awa_w^\oplus a = a^* awa_w^\oplus a - a^* awa_w^\oplus awa_w^\oplus a = 0.$$

综上, a 有 w -核-EP 逆分解.

必要性. 假设 $a = a_1 + a_2$ 是 a 的 w -核 EP 逆分解, 不妨设 $a_{1w}^\oplus$ 是 a_1 的 w -核可逆元, $(a_2 w)^k = 0, k \in \mathbb{N}$ 且 $(a_1)^* a_2 = a_2 w a_1 = 0$. 于是有等式

$$(aw)^k = \sum_{i=0}^k (a_1 w)^i (a_2 w)^{k-i} \tag{1}$$

成立. 从而可得

$$\begin{aligned}
 a_{1w}^{\oplus}(aw)^{k+1}a &= a_{1w}^{\oplus}aw \sum_{i=0}^k (a_1w)^i (a_2w)^{k-i}a = \\
 &= a_{1w}^{\oplus}a_1w \sum_{i=0}^k (a_1w)^i (a_2w)^{k-i}a + a_{1w}^{\oplus}a_2w \sum_{i=0}^k (a_1w)^i (a_2w)^{k-i}a = \\
 &= a_{1w}^{\oplus}a_1w \alpha_1 \left(\sum_{i=1}^k w(a_1w)^{i-1} (a_2w)^{k-i} \right) a = \sum_{i=0}^k (a_1w)^i (a_2w)^{k-i}a = (aw)^k a.
 \end{aligned}$$

此外,也可得

$$\begin{aligned}
 aw(a_{1w}^{\oplus})^2 &= a_1w(a_{1w}^{\oplus})^2 + a_2w\alpha_1w(a_{1w}^{\oplus})^2a_{1w}^{\oplus} = a_{1w}^{\oplus}, \\
 (awa_{1w}^{\oplus})^* &= (a_1w\alpha_{1w}^{\oplus} + a_2w\alpha_{1w}w(a_{1w}^{\oplus})^2)^* = (a_1w\alpha_{1w}^{\oplus})^* = a_1w\alpha_{1w}^{\oplus} = awa_{1w}^{\oplus}.
 \end{aligned}$$

因此 $a_{1w}^{\oplus} = a_w^{\oplus}$.

由文献[11]中定理 3.3 可知, $a = a_1 + a_2$ 是 a 的伪核逆分解且 a_1 也是核可逆的, 因此伪核逆分解是 w -核 EP 分解的一种特殊形式.

推论 1^[11] 设 $a \in R$, 则 a 是伪核可逆且 $I(a) = k$ 当且仅当 a 有伪核逆分解.

命题 1 设 $a, w \in R$, 如果 a 是 w -核 EP 可逆的, 且 $a = a_1 + a_2$ 是 a 的 w -核 EP 逆分解, 则 a_1w 是群可逆的, 且 $(a_1w)^{\#} = (a_w^{\oplus})^2aw$.

证明: 不妨设 $a_w^{\oplus}$ 是 a 的 w -核 EP 可逆元. 由引理 1 和引理 9 可知 $a_w^{\oplus}awa_w^{\oplus} = a_w^{\oplus}$, $a_w^{\oplus}(aw)^2a_w^{\oplus} = awa_w^{\oplus}$. 由定理 1 的证明过程可知 $a_1 = awa_w^{\oplus}a$. 下证 $(a_w^{\oplus})^2aw$ 是 a_1w 的群逆. 事实上,

$$\begin{aligned}
 a_1w((a_w^{\oplus})^2aw)^2 &= awa_w^{\oplus}a_w^{\oplus}a_w^{\oplus}aw = (a_w^{\oplus})^2aw, \\
 ((a_w^{\oplus})^2aw)(a_1w)^2 &= a_w^{\oplus}awa_w^{\oplus}(aw)^2a_w^{\oplus}aw = a_w^{\oplus}(aw)^2a_w^{\oplus}aw = a_1w,
 \end{aligned}$$

此外, 注意到

$$\begin{aligned}
 a_1w((a_w^{\oplus})^2aw) &= aw(a_w^{\oplus})^2aw = a_w^{\oplus}aw, \\
 ((a_w^{\oplus})^2aw)a_1w &= a_w^{\oplus}awa_w^{\oplus}aw = a_w^{\oplus}aw.
 \end{aligned}$$

故 $a_1w((a_w^{\oplus})^2aw) = ((a_w^{\oplus})^2aw)a_1w$. 所以 a_1w 是群可逆的且 $(a_w^{\oplus})^2aw$ 是其群逆.

定理 2 设 a, b 是 w -核 EP 可逆元, a_1, b_1 分别是 a, b 的 w -核 EP 分解中对应的分解元, $k = \max\{i_w(a), i_w(b)\}$. 则下列结论等价:

- 1) $awa_w^{\oplus} = bwa_w^{\oplus}$, $a_w^{\oplus}a = a_w^{\oplus}b$;
- 2) $(aw)^{k+1}a = bw(aw)^ka$, $a^*(aw)^{k+1} = b^*(aw)^{k+1}$;
- 3) $a_1wa_{1w}^{\oplus} = b_1wa_{1w}^{\oplus}$, $a_{1w}^{\oplus}a_1 = a_{1w}^{\oplus}b_1$.

证明: 1) $\Rightarrow$ 2). 对结论 1) 中第一个等式两边右乘 $(aw)^{k+1}a$, 可得 $(aw)^{k+1}a = bw(aw)^ka$. 对结论 1) 中第二个等式做 $*$ -对合再右乘 $(aw)^*(aw)^{k+1}$, 可得 $a^*(awa_w^{\oplus})^*(aw)^{k+1} = b^*(awa_w^{\oplus})^*(aw)^{k+1}$. 进一步, 化简可得 $a^*(aw)^{k+1} = b^*(aw)^{k+1}$.

2) $\Rightarrow$ 1). 对结论 2) 中第一个等式做 $*$ -对合再左乘 $a_w^{\oplus}((a_w^{\oplus})^{k+1})^*$, 可得

$$a_w^{\oplus}((aw)^{k+1}(a_w^{\oplus})^{k+1})^*a = a_w^{\oplus}((aw)^{k+1}(a_w^{\oplus})^{k+1})^*b.$$

利用引理 1, 化简可得 $a_w^{\oplus}a = a_w^{\oplus}b$. 对结论 2) 中第二个等式右乘 $w(a_w^{\oplus})^{k+2}$, 可得 $(aw)^{k+2}(a_w^{\oplus})^{k+2} = bw(aw)^{k+1}(a_w^{\oplus})^{k+2}$, 化简得 $awa_w^{\oplus} = bwa_w^{\oplus}$.

1) $\Rightarrow$ 3). 由定理 1 的证明及命题 1 可知, $a_1 = awa_w^{\oplus}a$, $b_1 = bw b_w^{\oplus}b$, 且 $a_{1w}^{\oplus} = a_w^{\oplus}$. 利用结论 1) 的第一个等式以及引理 1 和引理 9 可得,

$$\begin{aligned}
 a_1w\alpha_{1w}^{\oplus} &= awa_w^{\oplus} = bwa_w^{\oplus} = bwa_w^{\oplus}(a_w^{\oplus})^2 = (bw)^{k+1}(a_w^{\oplus})^{k+1} = \\
 &= (bw)^{k+1}(b_w^{\oplus})^{k+1}(bw)^{k+1}(a_w^{\oplus})^{k+1} = bw b_w^{\oplus}bw(a_w^{\oplus}) = b_1w\alpha_{1w}^{\oplus}.
 \end{aligned}$$

从而结论 3) 的第一个等式成立. 且

$$awa_w^{\oplus} = bwa_w^{\oplus}awa_w^{\oplus}. \quad (2)$$

进一步, 对式(2)做 $*$ -对合化简再左乘 $a_w^{\oplus}$, 则有 $a_w^{\oplus} = a_w^{\oplus}bw b_w^{\oplus}$. 由结论 1) 的第二个等式, 化简有

$$a_{1w}^{\oplus}a_1 = a_w^{\oplus}awa_w^{\oplus}a = a_w^{\oplus}a = a_w^{\oplus}b = a_w^{\oplus}bw b_w^{\oplus}b = a_{1w}^{\oplus}b_1.$$

3) $\Rightarrow$ 1). 由定理 1 的证明可知 $a_w^{\oplus} = a_{1w}^{\oplus}$, 于是 $awa_w^{\oplus} = a_1wa_{1w}^{\oplus} = b_1wa_{1w}^{\oplus} = bw b_w^{\oplus}bwa_w^{\oplus}$. 利用引理 1

可得

$$\begin{aligned} a\tau a_w^\circledast &= b\tau b_w^\circledast b\tau b_w^\circledast b\tau (a_w^\circledast)^2 = b\tau b_w^\circledast b\tau (b\tau)^k (b_w^\circledast)^k b\tau (a_w^\circledast)^2 = \\ &= (b\tau)^k b\tau (b_w^\circledast)^k b\tau (a_w^\circledast)^2 = (b\tau)^2 b_w^\circledast b\tau (a_w^\circledast)^2 = b\tau a\tau (a_w^\circledast)^2 = b\tau a_w^\circledast. \end{aligned}$$

从而结论 1) 中的第一个等式成立, 且 $a\tau a_w^\circledast = b\tau b_w^\circledast a\tau a_w^\circledast$. 进而得 $a\tau a_w^\circledast = a\tau a_w^\circledast b\tau b_w^\circledast$, 对其左乘 $a_w^\circledast$ 可得 $a_w^\circledast = a_w^\circledast b\tau b_w^\circledast$. 因此

$$a_w^\circledast b = a_w^\circledast b\tau b_w^\circledast b = a_{1\tau}^\circledast b_1 = a_{1\tau}^\circledast a_1 = a_w^\circledast a\tau a_w^\circledast a = a_w^\circledast a = a_{1\tau}^\circledast a.$$

证毕.

推论 2^[11] 当 $\tau=1$ 时, 令 $a, b \in R^\circledast$, $k = \max\{i(a), i(b)\}$ 且 a_1, b_1 分别对应 a, b 在伪核逆分解中的分解元, 则下列结论等价:

- 1) $a^\circledast a = a^\circledast b$, $aa^\circledast = ba^\circledast$;
- 2) $a^{k+1} = ba^k$, $a^* a^k = b^* a^k$, $a^{k+1} = ba^k$;
- 3) $a_1^\circledast a_1 = a_1^\circledast b_1$, $a_1 a_1^\circledast = b_1 a_1^\circledast$.

3 τ -核 EP 序关系及其相关刻画

下面通过研究 τ -核 EP 可逆的性质定义 τ -核 EP 逆上的一种序. 为此, 需要一些与 τ -核 EP 可逆元相关的等价性质.

引理 10 设 $a, \tau, p \in R$, a 是 τ -核 EP 可逆, $i_\tau(a) = k$, p 是投射元, 则下列结论等价:

- 1) $p = a\tau a_w^\circledast$;
- 2) $pR = (a\tau)^k aR$;
- 3) ${}^\circ p = {}^\circ (a\tau)^k a$;
- 4) $(a\tau)^k a = p(a\tau)^k a$, ${}^\circ (a\tau)^k a \subseteq {}^\circ p$.

证明: 2) $\Rightarrow$ 3) 显然.

1) $\Rightarrow$ 2). 由 a 是 τ -核 EP 可逆和条件 1) 有 $pR = (a\tau)^{k+1} (a_w^\circledast)^{k+1} R \subseteq (a\tau)^k aR$. 反之, 有 $(a\tau)^k aR = (a\tau a_w^\circledast) (a\tau)^k aR \subseteq pR$. 因此结论 2) 成立.

3) $\Rightarrow$ 4). 注意到 p 是投射元, 可得 $(1-p)p = 0$. 再利用结论 3) 有 $(1-p)(a\tau)^k a = 0$. 因此结论 4) 成立.

4) $\Rightarrow$ 1). 由引理 1 可得 $(1-a\tau a_w^\circledast)(a\tau)^k a = 0$. 利用结论 4) 中 ${}^\circ (a\tau)^k a \subseteq {}^\circ p$, 有 $(1-a\tau a_w^\circledast)p = 0$. 再结合 $(a\tau)^k a = p(a\tau)^k a$, 有

$$p = p\tau a\tau a_w^\circledast = p(a\tau)^{k+1} (a_w^\circledast)^{k+1} = (a\tau)^{k+1} (a_w^\circledast)^{k+1} = a\tau a_w^\circledast.$$

定理 3 设 $a, b, \tau \in R$, a 是 τ -核 EP 可逆, $i_\tau(a) = k$, 则下列结论等价:

- 1) $a_w^\circledast (a\tau)^k a = a_w^\circledast (b\tau)^k b$;
- 2) $(a\tau)^k \tau^{\parallel (a\tau)^k a} = (a\tau)^k \tau^{\parallel (a\tau)^k a} ((a\tau)^k a)^{\{1,3\}} (b\tau)^k b$;
- 3) $((a\tau)^k a)^* (a\tau)^k a = ((a\tau)^k a)^* (a\tau)^k b$;
- 4) $(a\tau)^k a = a\tau a_w^\circledast (b\tau)^k b$;
- 5) 存在投射元 $p \in R$, 使得 $(a\tau)^k aR = pR$, $p(a\tau)^k a = p(b\tau)^k b$;
- 6) 存在投射元 $p \in R$, 使得 ${}^\circ (a\tau)^k a \subseteq {}^\circ p$, $p(a\tau)^k a = p(b\tau)^k b$.

证明: 由引理 2 可知 $\tau^{\parallel (a\tau)^k a}$ 存在, 且 $a_w^\circledast = (a\tau)^k \tau^{\parallel (a\tau)^k a} ((a\tau)^k a)^{\{1,3\}}$. 而对于 $\tau^{\parallel (a\tau)^k a}$, 存在 $x \in R$, 使得 $\tau^{\parallel (a\tau)^k a} = x(a\tau)^k a$, 且 $(a\tau)^k a = (a\tau)^k a\tau \tau^{\parallel (a\tau)^k a}$.

1) $\Rightarrow$ 2). 根据结论 1), 有

$$(a\tau)^k \tau^{\parallel (a\tau)^k a} = (a\tau)^k x(a\tau)^k a ((a\tau)^k a)^{\{1,3\}} (a\tau)^k a = a_w^\circledast (a\tau)^k a =$$

$$a_w^\circledast (b\tau)^k b = (a\tau)^k \tau^{\parallel (a\tau)^k a} ((a\tau)^k a)^{\{1,3\}} (b\tau)^k b.$$

因此结论 2) 成立.

2) $\Rightarrow$ 3). 结合结论 2), 有

$$\begin{aligned}
 ((aw)^ka)^*(aw)^ka &= ((aw)^ka)^*((aw)^kaaww \parallel_{(aw)^ka}) = \\
 & ((aw)^ka)^*(aw)^ka((aw)^ka)^{\{1,3\}}(bw)^kb = \\
 & ((aw)^ka((aw)^ka)^{\{1,3\}}(aw)^ka)^*(bw)^kb = ((aw)^ka)^*(bw)^kb.
 \end{aligned}$$

因此结论 3) 成立.

3) $\Rightarrow$ 4). 由引理 1 可知 $(aw)^ka = awa_w^{\circledast}(aw)^ka$, 所以有

$$\begin{aligned}
 (aw)^ka &= ((aw)^kaw(a_w^{\circledast})^{k+1})^*(aw)^ka = (w(a_w^{\circledast})^{k+1})^*((aw)^ka)^*(bw)^kb = \\
 & (awa_w^{\circledast})^*(bw)^kb = awa_w^{\circledast}(bw)^kb.
 \end{aligned}$$

因此结论 4) 成立.

4) $\Rightarrow$ 5). 令 $p = awa_w^{\circledast}$, 则 $p^2 = p = p^*$, p 是投射元. 于是

$$pR = (aw)^{k+1}(a_w^{\circledast})^{k+1}R \subseteq (aw)^kaR = awa_w^{\circledast}(aw)^ka \subseteq pR.$$

进一步, 有 $p(bw)^kb = (aw)^ka = awa_w^{\circledast}(aw)^ka = p(aw)^ka$. 因此结论 5) 成立.

5) $\Rightarrow$ 6) 显然.

6) $\Rightarrow$ 1). 根据引理 10 和结论 6) 可得 $p = awa_w^{\circledast}$, 则

$$(aw)^ka = p(aw)^ka = p(bw)^kb = awa_w^{\circledast}(bw)^kb.$$

因此 $a_w^{\circledast}(aw)^ka = a_w^{\circledast}awa_w^{\circledast}(bw)^kb = a_w^{\circledast}(bw)^kb$.

给定 $a, w \in R$ 且 a 是 w -核 EP 可逆的, $i_w(a) = k$, 下面研究特殊元素 $e = a_w^{\circledast}(aw)^{k+1}$ 和 $f = wa_w^{\circledast}(aw)^ka$ 的一些等价刻画.

引理 11 设 $a, w, e \in R$, a 是 w -核 EP 可逆的, $i_w(a) = k$, 则下列结论等价:

- 1) $e = a_w^{\circledast}(aw)^{k+1}$;
- 2) $Re = R(aw)^{k+1}$, $ea = (aw)^ka$;
- 3) $e^{\circ} = ((aw)^{k+1})^{\circ}$, $ea = (aw)^ka$;
- 4) $((aw)^{k+1})^{\circ} \subseteq e^{\circ}$, $ea = (aw)^ka$.

证明: 2) $\Rightarrow$ 3) 和 3) $\Rightarrow$ 4) 显然.

1) $\Rightarrow$ 2). 由条件 $a \in R_w^{\circ}$ 和结论 1) 易得 $ea = (aw)^ka$. 利用引理 1 可知, $Re \subseteq R(aw)^kaw = Rawe \subseteq Re$. 因此结论 2) 成立.

4) $\Rightarrow$ 1). 对结论 4) 中的 $ea = (aw)^ka$ 右乘 $w(a_w^{\circledast})^2$ 可得 $ea_w^{\circledast} = (aw)^ka_w^{\circledast}$. 由引理 9 知, $(aw)^{k+1} \times (1 - (a_w^{\circledast})^{k+1}(aw)^{k+1}) = 0$ 成立. 注意到结论 4) 中的 $((aw)^{k+1})^{\circ} \subseteq e^{\circ}$, 于是 $e(1 - (a_w^{\circledast})^{k+1}(aw)^{k+1}) = 0$. 因此

$$e = ea_w^{\circledast}(a_w^{\circledast})^k(aw)^{k+1} = (aw)^ka_w^{\circledast}(a_w^{\circledast})^k(aw)^{k+1} = aw(a_w^{\circledast})^2(aw)^{k+1} = a_w^{\circledast}(aw)^{k+1}.$$

类似引理 11 的证明方法可得以下引理.

引理 12 设 $a, w, f \in R$, a 是 w -核 EP 可逆的, $i_w(a) = k$, 则下列结论等价:

- 1) $f = wa_w^{\circledast}(aw)^ka$;
- 2) $Rf = R(aw)^ka$, $fwa = w(aw)^ka$;
- 3) $f^{\circ} = ((aw)^ka)^{\circ}$, $fwa = w(aw)^ka$;
- 4) $((aw)^ka)^{\circ} \subseteq f^{\circ}$, $fwa = w(aw)^ka$.

定理 4 设 $a, b, w \in R$, a 是 w -核 EP 可逆的, $i_w(a) = k$, 则下列结论等价:

- 1) $awa_w^{\circledast} = bwa_w^{\circledast}$;
- 2) $(aw)^ka = bw(aw)^ka \parallel_{(aw)^ka}$;
- 3) $a(wa)^{2k+1} = b(wa)^{2k+1}$;
- 4) $a(wa)^k((wa)^{k+1})^{\#} = b(wa)^k((wa)^{k+1})^{\#}$;
- 5) $(aw)^ka = bwa_w^{\circledast}(aw)^ka$;
- 6) 存在 $e \in R$, 使得 $Re = R(aw)^{k+1}$, $ea = (aw)^ka$, $awe = bwe$;
- 7) 存在 $e \in R$, 使得 $e^{\circ} = ((aw)^{k+1})^{\circ}$, $ea = (aw)^ka$, $awe = bwe$;

- 8) 存在 $e \in R$, 使得 $((aw)^{k+1})^\circ \subseteq e^\circ$, $ea = (aw)^k a$, $awe = bwe$;
 9) 存在 $f \in R$, 使得 $Rf = R(aw)^k a$, $af = bf$, $fwa = w(aw)^k a$;
 10) 存在 $f \in R$, 使得 $f^\circ = ((aw)^k a)^\circ$, $af = bf$, $fwa = w(aw)^k a$;
 11) 存在 $f \in R$, 使得 $((aw)^k a)^\circ \subseteq f^\circ$, $af = bf$, $fwa = w(aw)^k a$.

证明: 6) $\Rightarrow$ 7), 7) $\Rightarrow$ 8), 9) $\Rightarrow$ 10), 10) $\Rightarrow$ 11) 显然. 注意到 a 是 w -核 EP 可逆的, 故由引理 1 和引理 2 可知 $awa_w^\circ (aw)^k a = (aw)^k a$, $w^{\parallel (aw)^k a}$ 存在, 且 $a_w^\circ = (aw)^k w^{\parallel (aw)^k a} ((aw)^k a)^{\{1,3\}}$.

1) $\Rightarrow$ 2). 由 $w^{\parallel (aw)^k a}$ 存在知, 存在 $s \in R$ 使得 $w^{\parallel (aw)^k a} = s(aw)^k a$. 利用结论 1), 有

$$(aw)^k a = bwa_w^\circ (aw)^k a = bw(aw)^k w^{\parallel (aw)^k a} ((aw)^k a)^{\{1,3\}} (aw)^k a =$$

$$bw(aw)^k s(aw)^k a ((aw)^k a)^{\{1,3\}} (aw)^k a = bw(aw)^k s(aw)^k a = bw(aw)^k w^{\parallel (aw)^k a}.$$

2) $\Rightarrow$ 3). 利用结论 2) 可得

$$a(wa)^{2k+1} = bw(aw)^k w^{\parallel (aw)^k a} w(aw)^k a = bw(aw)^k (aw)^k a = b(wa)^{2k+1}.$$

3) $\Rightarrow$ 4). 根据 a 是 w -核 EP 可逆的, 利用引理 2 和引理 3 易知 $((wa)^{k+1})^\#$ 存在. 由结论 3), 有

$$a(wa)^k ((wa)^{k+1})^\# = a(wa)^{2k+1} ((wa)^{k+1})^\# ((wa)^{k+1})^\# =$$

$$b(wa)^{2k+1} ((wa)^{k+1})^\# ((wa)^{k+1})^\# = b(wa)^k ((wa)^{k+1})^\#.$$

4) $\Rightarrow$ 5). 根据 a 是 w -核 EP 可逆的, 利用引理 2 和引理 3 可知

$$a_w^\circ (aw)^k a = (aw)^k w^{\parallel (aw)^k a} ((aw)^k a)^{\{1,3\}} (aw)^k a = (aw)^k w^{\parallel (aw)^k a}.$$

于是

$$(aw)^k a = w^{\parallel (aw)^k a} w(aw)^k a = (aw)^k a ((wa)^{k+1})^\# (wa)^{k+1} = a(wa)^k ((wa)^{k+1})^\# (wa)^{k+1} =$$

$$b(wa)^k w(aw)^k a ((wa)^{k+1})^\# = bw(aw)^k w^{\parallel (aw)^k a} = bwa_w^\circ (aw)^k a.$$

5) $\Rightarrow$ 6). 令 $e = a_w^\circ (aw)^{k+1}$, 则 $ea = a_w^\circ (aw)^{k+1} a = (aw)^k a$. 利用引理 1 可得 $Re \subseteq R(aw)^k aw = Rawa \subseteq Re$, 即 $Re = R(aw)^{k+1}$. 同时 $awe = (aw)^k aw = bwa_w^\circ (aw)^k aw = bwe$.

8) $\Rightarrow$ 1). 根据 $a \in R_w^\circ$ 及结论 8), 利用引理 11 可知 $e = a_w^\circ (aw)^{k+1}$, 从而

$$e(a_w^\circ)^{k+1} = a_w^\circ (aw)^{k+1} (a_w^\circ)^{k+1} = a_w^\circ.$$

因此

$$awa_w^\circ = awa_w^\circ (aw)^k aw(a_w^\circ)^{k+1} = awe(a_w^\circ)^{k+1} = bwa_w^\circ.$$

1) $\Rightarrow$ 9). 令 $f = wa_w^\circ (aw)^k a$, 则 $af = bwa_w^\circ (aw)^k a = bf$, $fwa = w(aw)^k a$. 利用引理 1 可得 $Rf \subseteq R(aw)^k a = Rawa_w^\circ (aw)^k a \subseteq Rf$.

11) $\Rightarrow$ 1). 根据 $a \in R_w^\circ$ 和结论 11) 有 $((aw)^k a)^\circ \subseteq f^\circ$, $fwa = w(aw)^k a$. 利用引理 12 可知 $f = wa_w^\circ (aw)^k a$. 于是

$$fwa_w^\circ = fwa_w(a_w^\circ)^2 = w(aw)^k aw(a_w^\circ)^2 = w(aw)^k a_w^\circ,$$

因此

$$awa_w^\circ = aw(aw)^k a_w^\circ (a_w^\circ)^k = afwa_w^\circ (a_w^\circ)^k = bfwa_w^\circ (a_w^\circ)^k =$$

$$bwa_w^\circ (aw)^{k+1} (a_w^\circ)^{k+1} = bwa_w^\circ.$$

引理 13 设 $a, b, w \in R$, a, b 是 w -核 EP 可逆的, $k = \max\{i_w(a), i_w(b)\}$. 如果 $awa_w^\circ = bwa_w^\circ$, 则下列结论成立:

- 1) $b_w^\circ (aw)^k a = a_w^\circ (aw)^k a$;
 2) $b_w^\circ a_w^\circ = (a_w^\circ)^2$.

证明: 1) 根据 a 是 w -核 EP 可逆的, 由引理 1 可得 $(aw)^k a = awa_w^\circ (aw)^k a$, $a_w^\circ = aw(a_w^\circ)^2$. 再结合 $awa_w^\circ = bwa_w^\circ$, 有

$$b_w^\circ (aw)^k a = b_w^\circ bwa_w^\circ (aw)^k a = b_w^\circ (bw)^{k+2} (a_w^\circ)^{k+2} (aw)^k a =$$

$$(bw)^{k+1} (a_w^\circ)^{k+2} (aw)^k a = bwa_w^\circ a_w^\circ (aw)^k a = a_w^\circ (aw)^k a.$$

2) 由结论 1) 可知 $b_w^\circ (aw)^k a = a_w^\circ (aw)^k a$, 则

$$b_w^\circ a_w^\circ = b_w^\circ (aw)^{k+1} (a_w^\circ)^{k+2} = a_w^\circ (aw)^{k+1} (a_w^\circ)^{k+2} = (a_w^\circ)^2.$$

定义 10 设 $a, b, w \in R$, a 是 w -核 EP 可逆, $i_w(a) = k$, 如果 $awa_w^{\circ} = bwa_w^{\circ}$, $a_w^{\circ}(aw)^ka = a_w^{\circ}(bw)^kb$, 则称 a, b 有 w -核 EP 序关系, 记为 $a \leq_w^{\circ} b$.

定理 5 w -核 EP 序关系是前序.

证明: 1) 反身性显然成立.

2) 传递性. 设 a, b, c 是 w -核 EP 可逆的, 且 $a \leq_w^{\circ} b$, $b \leq_w^{\circ} c$. 下面证明 $a \leq_w^{\circ} c$. 假设 $k = \max\{i_w(a), i_w(b)\}$, 由 $bwb_w^{\circ} = cwb_w^{\circ}$ 和 $awa_w^{\circ} = bwa_w^{\circ}$ 可得

$$\begin{aligned} awa_w^{\circ} &= bwa_w^{\circ} = (bw)^k (bw)^2 (a_w^{\circ})^{k+2} = bwb_w^{\circ} (bw)^k (bw)^2 (a_w^{\circ})^{k+2} = cwb_w^{\circ} (bw)^k (bw)^2 (a_w^{\circ})^{k+2} = \\ &= cw (bw)^{k+1} (a_w^{\circ})^{k+2} = cw (bw) (a_w^{\circ})^2 = cwa_w^{\circ} = cwa_w^{\circ}. \end{aligned}$$

结合引理 1, 有

$$\begin{aligned} a_w^{\circ} &= a_w^{\circ} (awa_w^{\circ})^* = a_w^{\circ} ((bw)^{k+1} (a_w^{\circ})^{k+1})^* = \\ &= a_w^{\circ} (bwb_w^{\circ} (bw)^k bw (a_w^{\circ})^{k+1})^* = a_w^{\circ} ((bw)^{k+1} (a_w^{\circ})^{k+1})^* bwb_w^{\circ}. \end{aligned}$$

注意到 $a_w^{\circ}(aw)^ka = a_w^{\circ}(bw)^kb$, $b_w^{\circ}(bw)^kb = b_w^{\circ}(cw)^kc$, 则

$$\begin{aligned} a_w^{\circ}(aw)^ka &= a_w^{\circ}(bw)^kb = a_w^{\circ} ((bw)^{k+1} (a_w^{\circ})^{k+1})^* bwb_w^{\circ} (bw)^kb = \\ &= a_w^{\circ} ((bw)^{k+1} (a_w^{\circ})^{k+1})^* bwb_w^{\circ} (cw)^kc = a_w^{\circ} (cw)^kc. \end{aligned}$$

因此有 $a \leq_w^{\circ} c$.

定理 6 设 $a, b, w \in R$ 且 a 是 w -核 EP 可逆的, $i_w(a) = k$, 则下列结论等价:

- 1) $a \leq_w^{\circ} b$;
- 2) $(aw)^k w^{\parallel (aw)^ka} = (aw)^k w^{\parallel (aw)^ka} ((aw)^ka)^{(1,2)} (bw)^kb$, $(aw)^ka = bw(aw)^k w^{\parallel (aw)^ka}$;
- 3) $((aw)^ka)^*(aw)^ka = ((aw)^ka)^*(aw)^kb$, $a(wa)^{2k+1} = b(wa)^{2k+1}$;
- 4) $((aw)^ka)^*(aw)^ka = ((aw)^ka)^*(aw)^kb$, $a(wa)^k((wa)^{k+1})^{\#} = b(wa)^k((wa)^{k+1})^{\#}$;
- 5) $(aw)^ka = awa_w^{\circ}(bw)^kb = bwa_w^{\circ}(aw)^ka$;
- 6) 存在投射元 $p \in R$ 和某个 $e \in R$, 使得 $(aw)^kaR = pR$, $p(aw)^ka = p(bw)^kb$, $Re = R(aw)^{k+1}$, $ea = (aw)^ka$, $awe = bwe$;
- 7) 存在投射元 $p \in R$ 和某个 $e \in R$, 使得 ${}^{\circ}(aw)^ka \subseteq {}^{\circ}p$, $p(aw)^ka = p(bw)^kb$, $e^{\circ} = ((aw)^{k+1})^{\circ}$, $ea = (aw)^ka$, $awe = bwe$;
- 8) 存在投射元 $p \in R$ 和某个 $f \in R$, 使得 $(aw)^kaR = pR$, $p(aw)^ka = p(bw)^kb$, $Rf = R(aw)^ka$, $af = bf$, $fwa = w(aw)^ka$;
- 9) 存在投射元 $p \in R$ 和某个 $f \in R$, 使得 ${}^{\circ}(aw)^ka \subseteq {}^{\circ}p$, $p(aw)^ka = p(bw)^kb$, $f^{\circ} = ((aw)^ka)^{\circ}$, $af = bf$, $fwa = w(aw)^ka$;
- 10) 存在投射元 $p \in R$ 和某个 $f \in R$, 使得 ${}^{\circ}(aw)^ka \subseteq {}^{\circ}p$, $p(aw)^ka = p(bw)^kb$, $((aw)^ka)^{\circ} \subseteq f^{\circ}$, $af = bf$, $fwa = w(aw)^ka$;
- 11) 存在投射元 $p \in R$ 和某个 $e \in R$, 使得 $p(bw)^kb = (aw)^ka = ea$, $bwe = (aw)^{k+1}$;
- 12) 存在投射元 $p \in R$ 和某个 $e \in R$, 使得 $p(bw)^kb = (aw)^ka = ea$, $bwe = awe$.

证明: 结论 1)~10) 的等价性由定理 3 和定理 4 可得, 而 11) $\Rightarrow$ 12) 显然. 因此下面只需证明 1) $\Rightarrow$ 11), 12) $\Rightarrow$ 3).

1) $\Rightarrow$ 11). 令 $p = awa_w^{\circ}$, $e = a_w^{\circ}(aw)^{k+1}$, 则 $p^2 = p = p^*$, 由引理 1 可得

$$\begin{aligned} ea &= (aw)^ka = awa_w^{\circ}(bw)^kb = p(bw)^kb, \\ bwe &= awa_w^{\circ}(aw)^{k+1} = (aw)^{k+1} = awe. \end{aligned}$$

12) $\Rightarrow$ 3). 根据结论 12), 存在投射元 p 及 $e \in R$, 使得 $p(bw)^kb = (aw)^ka = ea$, $bwea = awea$, 于是

$$p(aw)^ka = (aw)^ka, \quad bw(aw)^ka = aw(aw)^ka = (aw)^{k+1}a.$$

因此

$$((aw)^ka)^*(bw)^kb = (p(aw)^ka)^*(bw)^kb = ((aw)^ka)^*(aw)^ka,$$

$$b(wa)^{2k+1} = a(wa)^{2k+1}.$$

定理 7 设 $a, b, w \in R$, a, b 是 w -核 EP 可逆. 如果 $a \leq_w^{\oplus} b$, $awbw = bwa$, 则 awb 是 w -核 EP 可逆, 此时 $(awb)_{\oplus}^{\oplus} = b_{\oplus}^{\oplus} a_{\oplus}^{\oplus}$.

证明: 由引理 13 可得 $b_{\oplus}^{\oplus} a_{\oplus}^{\oplus} = (a_{\oplus}^{\oplus})^2$. 下证 $(a_{\oplus}^{\oplus})^2$ 是 awb 的 w -核 EP 逆. 令 $k = \max\{i_w(a), i_w(b)\}$, 由定理 6 可得 $b(wa)^{2k+1} = a(wa)^{2k+1}$, 于是有

$$\begin{aligned} (a_{\oplus}^{\oplus})^2 (awbw)^{2k+1} (awb) &= (a_{\oplus}^{\oplus})^2 b(wa)^{2k+1} w(bw)^{2k} awb = (a_{\oplus}^{\oplus})^2 (aw)^{k+1} aw (aw)^k (bw)^{2k} awb = \\ &= (aw)^k (aw)^k (bw)^{2k} awb = (awbw)^{2k} awb, \\ (awb) w (a_{\oplus}^{\oplus})^2 &= awaw (a_{\oplus}^{\oplus})^2 = (awa_{\oplus}^{\oplus})^* = ((awb) wa_{\oplus}^{\oplus})^*, \\ (awb) w ((a_{\oplus}^{\oplus})^2)^2 &= (awa_{\oplus}^{\oplus}) (a_{\oplus}^{\oplus})^2 = (a_{\oplus}^{\oplus})^2. \end{aligned}$$

证毕.

参 考 文 献

- [1] BAKSALRY O M, TRENKLER G. Core Inverse of Matrices [J]. Linear and Multilinear Algebra, 2010, 58(6): 681-697.
- [2] RAKIĆ D S, DINČIĆ N Ć, DJORDJEVIĆ D S. Group, Moore-Penrose, Core and Dual Core Inverse in Rings with Involution [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2014, 463: 115-133.
- [3] MANJUNATHA PRASAD K, MOHANA K S. Core-EP Inverse [J]. Linear and Multilinear Algebra, 2014, 62(6): 792-802.
- [4] FERREYRA D E, LEVIS F E, THOME N. Revisiting the Core EP Inverse and Its Extension to Rectangular Matrices [J]. Quaestiones Mathematicae, 2018, 41(2): 265-281.
- [5] GAO Y F, CHEN J L. Pseudo Core Inverses in Rings with Involution [J]. Communications in Algebra, 2018, 46(1): 38-50.
- [6] ZHU H H, WU L Y, CHEN J L. A New Class of Generalized Inverses in Semigroups and Rings with Involution [J]. Communications in Algebra, 2023, 51(5): 2098-2113.
- [7] JIN T H, ZHU H H, WU L Y. New Characterizations for w -Core Inverses in Rings with Involution [J]. Filomat, 2023, 37(7): 2131-2139.
- [8] ZHANG Q, WANG C C, ZHU H H. Characterizations and Representations of w -Core Inverses in Rings [J]. Filomat, 2023, 37(10): 3183-3190.
- [9] MOSIĆ D, ZHU H H, WU L Y. The w -Core-EP Inverse in Rings with Involution [J]. Revista de la Unión Matemática Argentina, 2024, 67(2): 545-565.
- [10] WANG H X. Core-EP Decomposition and Its Applications [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2016, 508: 289-300.
- [11] GAO Y F, CHEN J L, KE Y Y. $*$ -DMP Elements in $*$ -Semigroups and $*$ -Rings [J]. Filomat, 2018, 32(9): 3073-3085.
- [12] ZHU H H, WU L Y. A New Class of Partial Orders [J]. Algebra Colloquium, 2023, 30(4): 585-598.
- [13] DRAZIN M P. Pseudo-inverses in Associative Rings and Semigroups [J]. The American Mathematical Monthly, 1958, 65(7): 506-514.
- [14] PENROSE R. A Generalized Inverse for Matrices [J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1955, 51(3): 406-413.
- [15] MARY X. On Generalized Inverses and Green's Relations [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2011, 434: 1836-1844.
- [16] ZHU H H, ZHANG X X, CHEN J L. Generalized Inverses of a Factorization in a Ring with Involution [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2015, 472: 142-150.
- [17] MARY X, PATRICIO P. Generalized Inverses Modulo $\mathcal{H}$ in Semigroups and Rings [J]. Linear and Multilinear Algebra, 2013, 61(8): 1130-1135.