文章编号:1674-2974(2025)09-0163-11 DOI:10.16339/j.cnki.hdxbzkb.2025096

多跨连续桥面板横向弯矩分析的等效单跨梁法

夏桂云†,刘洪
(长沙理工大学 土木与环境工程学院,湖南 长沙 410114)

摘 要:基于有效工作宽度概念,将桥面板简化成多跨连续梁,主梁对桥面板的约束等效成抗弯弹簧;分析桥面板内某跨的受力性能时,将此跨结构等效成单跨梁,其两侧桥面板对其弯曲约束也等效成抗弯弹簧,建立了主梁扭转和桥面板边跨对等效单跨梁约束的综合等效刚度系数递推公式.分析了综合等效刚度系数随主梁抗扭刚度与桥面板横向抗弯刚度比的变化规律,导出了两侧抗弯弹簧约束下等效单跨梁在均布荷载、集中荷载和区间均布荷载作用下的支点和跨中的转角、弯矩计算公式,为多跨连续桥面板横向弯矩计算提供了一种简化理论.结合预应力混凝土工形组合梁为工程背景,分析了模拟自重均布荷载作用、汽车区间均布荷载作用下的桥面板横向弯矩和横向弯矩修正系数,研究了梁高、桥面板厚度、主梁片数和荷载等参数对横向弯矩修正系数的影响.计算结果表明,横向弯矩的本文理论结果与杆系有限元完全一致,等效单跨梁的简化方法可行;桥面板支点横向弯矩修正系数最大值为0.666 7,小于《公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范》(JTG 3362—2018,简称《公预规》)的规定值0.7.当t/h(桥面板厚度t与主梁高度h之比)<1/4时,横向弯矩修正系数最大值为0.670 3,大于《公预规》的规定值0.5,规范结果偏不安全;当t/h>1/4时,横向弯矩修正系数最大值为0.679 4,小于《公预规》的规定值0.7.为确保桥面板设计安全,提出了《公预规》关于多跨连续桥面板横向弯矩修正方法应进行深入研究的建议.

关键词:桥面板;等效梁模型;修正系数;抗弯弹簧;理论公式
中图分类号:U448.216 **文献标志码**:A

Equivalent Single-span Beam Method for Transverse Bending Moment Analysis of Multi-span Continuous Bridge Decks

XIA Guiyun†,LIU Hong
(School of Civil and Environmental Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, China)

Abstract: Based on the concept of effective working width, the bridge deck is simplified as a multi-span continuous beam. The constraints of the main beam on the bridge deck are equivalent to anti-bending springs. When the stress mechanics of the deck between two main girders is analyzed, this deck is equivalent to a single-span beam. The anti-bending capacities from side spans are also simplified into anti-bending springs. A series of comprehensive equivalent stiffness parameters from the anti-torsion of the main girders and the anti-bending of the

* **收稿日期**:2024-09-09
基金项目:国家自然科学基金资助项目(51278072), National Natural Science Foundation of China(51278072);湖南省教育厅重点项目(22A0223), Key Project of Education Department of Hunan Province(22A0223)
作者简介:夏桂云(1972—),男,湖南湘阴人,长沙理工大学教授,博士
† 通信联系人,E-mail: xiagy72@163.com

side spans are derived recursively. The variations of comprehensive equivalent stiffness parameters against the stiffness ratio of the anti-torsion stiffness from the main girder to the anti-bending transverse stiffness from the bridge deck are studied. The formulae of slopes and moments at endpoint and middle-span point are formulated for the deck constrained by the main girders and side spans under distributing load, concentrated load and partially distributed load, which provides a simplified theory for transverse bending moment calculation of multi-span continuous bridge decks. A background bridge consisting of prestressed-concrete I-type girders and reinforced-concrete bridge decks is studied. The transverse bending moment distributions and transverse bending moment modification factors of different-span bridge decks under model self-weight and automobile section distributing loads are analyzed, and the effect of beam height, deck thickness, beam number and load on transverse bending moment modification factors is investigated. The results demonstrate that: the analytical transverse bending moment from the present theoretical formulae agrees with the finite element, and the equivalent single-span beam method is feasible to simplify the multi-span continuous deck. The maximum result of the transverse bending moment modification factors is 0.666 7 at the supporting point, which is less than the value of 0.7 specified by the Specifications for Design of Highway Reinforced Concrete and Prestressed Concrete Bridges and Culverts (JTG 3362—2018). When $t/h<1/4$ (the ratio of the bridge deck thickness t to the main girder height h), the maximum value of the transverse bending moment modification factors is 0.670 3, which is larger than the value 0.5 specified by JTG 3362—2018. The calculating results based on the specification JTG 3362—2018 are unsafe for the design practice. When $t/h>1/4$, the maximum value of the transverse bending moment modification factors is 0.679 4, which is less than the value of 0.7 specified by JTG 3362—2018. To ensure the design of the bridge deck safe, further investigation into the transverse bending moment prescribed in JTG 3362—2018 is recommended.

Key words: bridge decks; equivalent beam model; modification factor; anti-bending spring; theoretical formula

在土木工程领域,通常将相邻两边长之比大于或等于2的周边支承矩形板称为单向板[1],其短边传递绝大部分荷载.对于多梁式主梁的桥面板横向受弯问题,《公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范》(JTG 3362—2018,以下简称《公预规》)通过引入有效工作宽度和横向弯矩修正系数方法[2],简化设计计算过程.其核心思想是:针对多跨连续桥面板的某跨,取单位宽度的板条,将其简化成简支梁,得到永久作用和可变作用下跨中最大弯矩的不同组合值,然后考虑主梁对其约束效应,引入横向弯矩修正系数对边界条件的影响进行修正.此方法计算简单、概念清晰,得到了桥梁设计人员的广泛认可.《公预规》方法适用于工字型组合梁的桥面板分析.如果主梁抗扭刚度较大,对桥面板的约束较强,桥面板的受力接近于支承边固支;如果主梁抗扭刚度较小,或者主梁与桥面板的连接不牢固,主梁对桥面板的约束较弱,桥面板的受力接近于铰支承;实际结构中,主梁对桥面板的支承既不是固支,也不是铰支,而是一种介于两者之间的弹性约束.

由于主梁对桥面板的约束程度不易确定,因此目前各国规范关于桥面板横向弯矩修正系数并不一致.《公预规》考虑主梁对桥面板的弹性约束特征,将桥面板厚度 t 与主梁高度 h 之比分为 $t/h<1/4$ 和 $t/h\geqslant 1/4$ 两种情况,引入桥面板横向弯矩修正系数,提出桥面板跨中截面弯矩、支点截面弯矩由相应简支板跨中弯矩修正得到.当 $t/h<1/4$ 时(即主梁抗扭能力大者),桥面板跨中截面弯矩和支点截面弯矩修正系数分别取0.5和-0.7;当 $t/h\geqslant 1/4$ 时(即主梁抗扭能力小者),桥面板跨中截面弯矩和支点截面弯矩修正系数分别取0.7和-0.7.《公预规》此种修正方法非常简略,仅根据 t/h 的大小来考虑主梁对桥面板边界约束的强弱,没有考虑多跨连续桥面板横桥向自身边跨约束效应,没有考虑荷载作用形式,修正系数取值大小是否合理以及有无理论根据,目前尚缺乏充分的研究成果来支撑.

对于桥面板横向弯矩问题,美国AASHTO规范[3]建议对钢结构桥梁的桥面板采用等效板条法进行横向设计计算,并规定支点弯矩和跨中弯矩分别取相应简支板跨中弯矩的-80%和80%,此修正系数明显高于《公预规》的取值,且被业界广泛接受[4].

AASHTO规范还针对主梁间距为1.22~4.57 m的组合板,给出了单宽桥面板汽车荷载作用下跨中截面正弯矩及距主梁中心线不同位置的负弯矩经验表格值,方便设计计算[5-6]. 日本通常将钢梁支承的桥面板设计为纵向或横向承重的单向受力板,并简化为简支板、连续板和悬臂板 3 种计算图式.JRA规范[7]规定了这3种桥面板在各荷载种类、承重方向及车道方向下的计算跨径、单宽桥面板的设计弯矩计算公式、承重方向与车道方向垂直时在受力方向设计弯矩的放大系数[6-8]. JRA规范适用于主梁间距L为0~6 m的情况. 随着济祁高速公路淮南至合肥段淮河特大桥引桥第一次采用双工字钢板组合梁[9],此种结构由于主梁间距较大,汽车荷载作用下桥面板横向弯曲效应不可忽略,其横向受力设计受到重视,《公预规》是否适应双工字钢板梁结构的设计计算存疑. 为此刘永健教授团队[6,10-13]进行了深入研究,得出现行《公预规》的有效工作宽度和横向弯矩计算方法不适用于双工字钢组合梁桥面板;双工字钢组合梁桥面板跨中和支承处有效工作宽度均小于《公预规》计算值;当t/h<1/4时桥面板跨中横向弯矩结果偏小,不安全,建议提高双工字钢组合梁桥面板跨中横向弯矩修正系数. 吴浩伟[6]根据中、美、日三国规范,计算了简支工字钢-混凝土组合桥梁桥面板的横向弯矩,得到日本规范的结果最大,美国规范的结果次之,中国规范结果最小的结论;将根据各国规范计算的横向弯矩结果与有限元结果进行对比发现,当车轮荷载作用位置有横联时,得到弯矩结果都偏于安全;但当车轮荷载作用位置无横联时,根据中国规范计算的跨中截面弯矩偏于不安全,建议对t/h<1/4的双工字钢板组合梁桥面板的横向弯矩修正系数取0.6. 范泉锋[13]的研究指出,双工字钢组合梁的桥面板横向弯矩明显受横截面框架效应的影响,沿纵桥向布置有横梁的截面、设置有横向加劲肋的截面,其构造细节改变了框架刚度,进而影响桥面板横向弯矩分布. 按《公预规》方法计算双工字钢组合梁桥面板的有效工作宽度和跨中横向弯矩偏不安全,但钢梁支承处计算的桥面板负弯矩较为安全. 对波形钢腹板箱梁的桥面板横向弯矩也有比较深入的研究,贾慧娟等[14]通过试验和理论研究,对4座已建成的波形钢腹板箱梁桥桥面板横向跨中弯矩进行分析,得出波形钢腹板箱梁桥桥面板横向跨中弯矩与简支板横向跨中弯矩比值均大于0.5,提出对t/h<1/4的波形钢腹板箱梁桥桥面板横向弯矩修正系数取0.6的建议. 赵品等[15]利用框架分析方法,建立了波形钢腹板箱梁的桥面板横向内力计算模型,该模型能够反映横向框架作用和箱梁畸变效应对桥面板横向内力的影响,认为波形钢腹板与混凝土顶板的线刚度比是影响桥面板横向内力的重要因素. 赵品等[16]通过静力试验,对单箱双室波形钢腹板缩尺试验梁的桥面板横向受力和箱梁框架变形进行分析,提出了一种刚架模型,通过算例对比,该模型计算结果与箱梁框架模型结果及试验结果吻合较好,并且小于《公预规》、JRA和AASHTO的规范值,此结论与上述研究结论[6,10-14]相反.

鉴于《公预规》关于桥面板横向弯矩修正系数的计算理论存在未考虑多跨连续桥面板边跨约束效应,对主梁的抗扭约束考虑得非常简略,没有考虑荷载作用形式和修正系数取值是否安全等问题,本文针对主梁(预应力混凝土工字梁)-桥面板组合结构中桥面板横向弯矩问题进行了研究,基于有效工作宽度的概念,将桥面板简化为多跨连续梁,主梁抗扭刚度对其边界约束的影响等效为抗弯弹簧. 多跨连续桥面板中某跨结构的两侧边跨约束也等效为抗弯弹簧,提出一种等效单跨梁方法,分析桥面板跨中正弯矩和靠近主梁支承处的负弯矩,研究横向弯矩修正系数取值问题.

本文的等效单跨梁简化方法借鉴了拱桥的连拱计算[17]和子结构[18-20]法;同时注意到薄板结构可用交叉梁系进行比拟,板系和比拟交叉梁系两种结构在静力、动力分析中的相容性和互异性已得到充分论证和验证[21-22]. 多跨连续梁裁剪为单跨结构,用等效弹簧进行边界约束已在静力[23]、动力[24]分析中得到验证. 将等效单跨梁方法应用于桥面板横向弯矩计算有较好的理论基础.

1　主梁对桥面板的横向弯曲约束

主梁具有较大的抗扭刚度,其对桥面板横向挠曲来说有显著的弹性约束作用. 鉴于主梁两端受端横梁的刚性约束和支座对每片主梁竖向变形的约束,主梁可视为两端固结的扭杆,考虑截面的翘曲和约束扭转,利用乌曼斯基第二约束扭转理论,可得到主梁跨内任意截面的扭矩M与扭角θ之间的关系为[25]:

$$M=\frac{GI_{\mathrm{d}}}{abl}\cdot\frac{\theta}{1-\dfrac{\mu\cdot\sinh(kal)\sinh(kbl)}{ab\cdot kl\cdot\sinh(kl)}}=K\cdot\theta \tag{1}$$

式中:G为主梁材料的剪切模量;I_{d}为主梁截面的抗扭惯矩;a、b分别为主梁计算截面与两端支点截面的

距离与主梁计算跨径l之比;$k=\sqrt{\mu GI_{\mathrm{d}}/(E_1 I_{\varpi})}$为约束扭转计算参数,$E_1$为主梁材料的折算弹性模量,$\mu=1-I_{\mathrm{d}}/I_{\rho}$,$I_{\rho}$为主梁截面的极惯性矩,$I_{\varpi}$为主梁截面的扇性惯性矩;$K$为主梁的抗扭刚度.

将主梁、桥面板系统简化成交叉梁系,主梁的抗扭刚度对桥面板横向弯曲的约束作用简化成抗扭弹簧.主梁任意截面位置的抗扭刚度大小按式(1)的K取值.当μ=1时,为开口截面约束扭转理论;当μ=0时,为圣维南自由扭转理论.

2 多跨连续桥面板边跨约束的等效

为分析多跨连续桥面板边跨的约束作用,本文引入如下假定:1)基于有效工作宽度概念,将桥面板简化成多跨连续梁,取单位宽度桥面板进行简化分析;2)只考虑主梁对桥面板的抗扭约束,不考虑主梁竖向变形的影响,将桥面板支承于刚性主梁上;3)基于乌曼斯基第二约束扭转理论计算主梁的抗扭刚度,考虑其翘曲效应和约束扭转;4)分析多跨连续桥面板中的某跨时,将其两侧边跨的约束等效成抗弯弹簧.

多跨连续桥面板简化成多跨连续梁后,定义其抗弯刚度为:

$$i=\frac{EI}{L} \tag{2}$$

式中:E为桥面板材料的弹性模量;I为单位宽度的桥面板截面抗弯惯性矩;L为桥面板的计算路径(《公预规》建议:当梁肋宽度较小时,取梁肋中心距;当梁肋宽度较大时,取梁肋间净距与桥面板厚之和).

定义主梁抗扭刚度与桥面板横向弯曲刚度比α为:

$$\alpha=K/i \tag{3}$$

如图1所示,主梁对桥面板的抗扭约束等效弹簧刚度为αi,左侧多跨桥面板和主梁对此跨左端约束的综合等效抗弯刚度为$R_j i$.

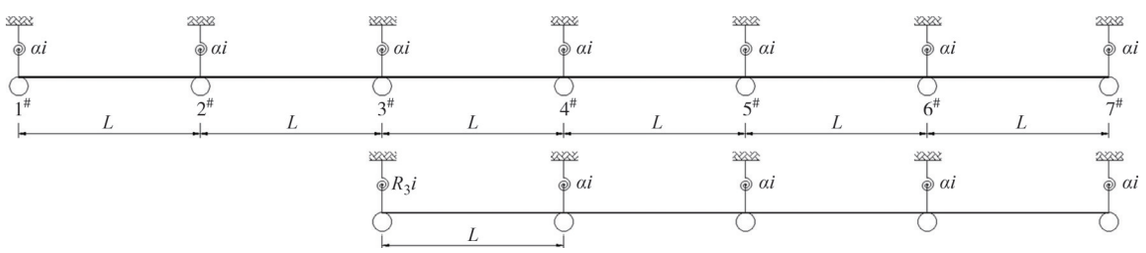


图1 主梁对桥面板的抗扭约束等效和左侧边跨的抗弯约束等效

Fig.1 The equivalences of anti-torsion constraints from main girder and anti-bending constraints from side-spans on bridge deck

由连续梁弯矩-转角方程,可知:

$$\begin{bmatrix}(4+R_j)i & 2i\\ 2i & (4+R_{j+1})i\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_j\\ \theta_{j+1}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ M_{j+1}\end{Bmatrix} \tag{4}$$

解得:

$$M_{j+1}=\frac{4(3+R_j)i}{4+R_j}\theta_{j+1} \tag{5}$$

因此,在j+1点支承处,主梁抗扭约束和左侧所有桥面板边跨对等效跨左侧综合等效刚度系数为:

$$R_{j+1}=\frac{4(3+R_j)}{4+R_j}+\alpha \tag{6}$$

式(6)具有递推性质,如将其写成显式,则左侧前7个支承处的综合等效刚度系数表达式如下:

$$R_1=\alpha \tag{7}$$

$$R_2=\frac{4(3+\alpha)}{4+\alpha}+\alpha \tag{8}$$

$$R_3=\frac{4\alpha^2+44\alpha+96}{\alpha^2+12\alpha+28}+\alpha \tag{9}$$

$$R_4=\frac{4\alpha^3+76\alpha^2+432\alpha+720}{\alpha^3+20\alpha^2+120\alpha+208}+\alpha \tag{10}$$

$$R_5=\frac{4\alpha^4+108\alpha^3+1\,024\alpha^2+4\,000\alpha+5\,376}{\alpha^4+28\alpha^3+276\alpha^2+1\,120\alpha+1\,552}+\alpha \tag{11}$$

$$R_6=\frac{4\alpha^5+140\alpha^4+1\,872\alpha^3+11\,888\alpha^2+35\,648\alpha+40\,128}{\alpha^5+36\alpha^4+496\alpha^3+3\,248\alpha^2+10\,032\alpha+11\,584}+\alpha \tag{12}$$

$$R_7=\frac{4\alpha^6+172\alpha^5+2\,976\alpha^4+26\,432\alpha^3+126\,656\alpha^2+309\,312\alpha+299\,520}{\alpha^6+44\alpha^5+780\alpha^4+7\,104\alpha^3+34\,912\alpha^2+87\,360\alpha+86\,464}+\alpha \tag{13}$$

可以看出,综合等效刚度系数主要与主梁抗扭刚度与桥面板横向弯曲刚度比α、计算截面位置(或者边跨跨数+1)有关.对于不同的刚度比α,综合等效刚度系数R随约束位置的变化如图2所示.

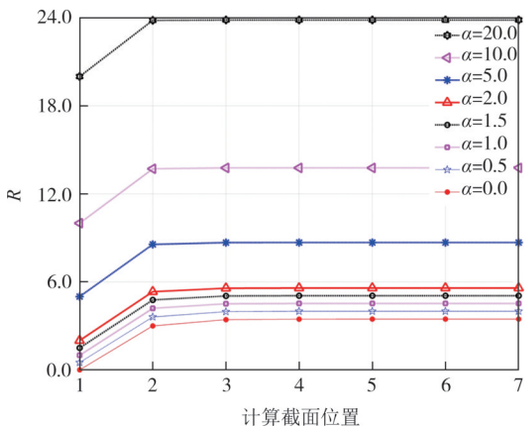


图 2　综合等效刚度系数 R 随计算截面位置变化

Fig.2　The variation of comprehensive equivalent stiffness parameter R against the calculating cross-section position

从图 2 可以看出,随着边跨跨数增加,边跨对等效跨的边界约束增强而趋于稳定,当边跨跨数达到 2 跨时,R 值基本接近于上限,即多跨连续梁的边跨效应对第一跨有显著影响,而对中间跨影响较小.主梁抗扭刚度越大,综合等效刚度系数越大;边跨约束效应体现在综合等效刚度系数中的最大值为 4,相当于固结.

3　等效单跨梁的内力计算

3.1　均布荷载作用

如图 3 所示,等效单跨梁受均布荷载作用.

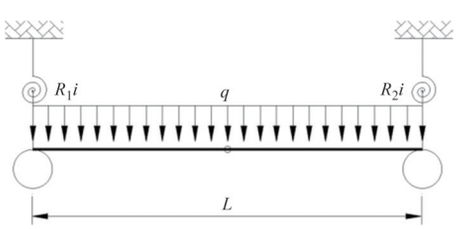


图 3　受均布荷载作用的等效单跨梁

Fig.3　Equivalent single-span beam subjected to uniformly distributed load

根据有限元理论,其弯矩-转角方程为:

$$\begin{bmatrix}(4+R_1)i & 2i\\ 2i & (4+R_2)i\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{ql^2}{12}\\ -\dfrac{ql^2}{12}\end{Bmatrix} \tag{14}$$

求得 θ_1、θ_2 如下:

$$\begin{cases}\theta_1=\dfrac{qL^2}{12i}\cdot\dfrac{6+R_2}{12+4(R_1+R_2)+R_1\cdot R_2}\\ \theta_2=-\dfrac{qL^2}{12i}\cdot\dfrac{6+R_1}{12+4(R_1+R_2)+R_1\cdot R_2}\end{cases} \tag{15}$$

支点弯矩可根据等效弹簧的刚度计算,故有:

$$\begin{cases}M_1=-\dfrac{qL^2}{12}\cdot\dfrac{R_1(6+R_2)}{12+4(R_1+R_2)+R_1\cdot R_2}\\ M_2=-\dfrac{qL^2}{12}\cdot\dfrac{R_2(6+R_1)}{12+4(R_1+R_2)+R_1\cdot R_2}\end{cases} \tag{16}$$

式(16)的第 1 式所表示的左支点弯矩已根据正、负弯矩方向定义进行了符号更改.

相应跨中截面弯矩 M_c 为:

$$M_c=\frac{ql^2}{8}-\frac{M_1+M_2}{2}=\frac{qL^2}{8}-\frac{qL^2}{12}\cdot\frac{3R_1+3R_2+R_1\cdot R_2}{12+4(R_1+R_2)+R_1\cdot R_2} \tag{17}$$

3.2　集中荷载作用

如图 4 所示,等效单跨梁受集中荷载作用.

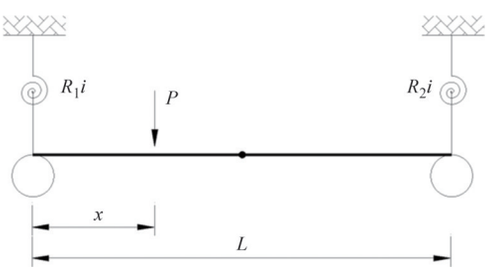


图 4　受集中荷载作用的等效单跨梁

Fig.4　Equivalent single-span beam subjected to concentrated load

与前类似,可推导出等效单跨梁在跨内集中荷载 P 作用下的端部转角、支点弯矩解析公式.

$$\begin{cases}\theta_1=\dfrac{P}{i}\left[\dfrac{2\left(\dfrac{x}{L}\right)^2(L-x)+(4+R_2)x\left(1-\dfrac{x}{L}\right)^2}{12+4(R_1+R_2)+R_1\cdot R_2}\right]\\ \theta_2=-\dfrac{P}{i}\left[\dfrac{(4+R_1)\left(\dfrac{x}{L}\right)^2(L-x)+2x\left(1-\dfrac{x}{L}\right)^2}{12+4(R_1+R_2)+R_1\cdot R_2}\right]\end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases}M_1=-PR_1\left[\dfrac{2\left(\dfrac{x}{L}\right)^2(L-x)+(4+R_2)x\left(1-\dfrac{x}{L}\right)^2}{12+4(R_1+R_2)+R_1\cdot R_2}\right]\\ M_2=-PR_2\left[\dfrac{(4+R_1)\left(\dfrac{x}{L}\right)^2(L-x)+2x\left(1-\dfrac{x}{L}\right)^2}{12+4(R_1+R_2)+R_1\cdot R_2}\right]\end{cases} \tag{19}$$

跨中截面的弯矩应注意集中荷载作用位置的影响,具体公式为:

$$\begin{cases} M_c = \dfrac{Px}{2} - \dfrac{PL}{2}\dfrac{\left(2R_1+4R_2+R_1R_2\right)\left(\dfrac{x}{L}\right)^2\left(1-\dfrac{x}{L}\right)+\left(4R_1+2R_2+R_1R_2\right)\left(\dfrac{x}{L}\right)\left(1-\dfrac{x}{L}\right)^2}{12+4\left(R_1+R_2\right)+R_1\cdot R_2}, x \leqslant \dfrac{L}{2} \\ M_c = \dfrac{P(L-x)}{2} - \dfrac{PL}{2}\dfrac{\left(2R_1+4R_2+R_1R_2\right)\left(\dfrac{x}{L}\right)^2\left(1-\dfrac{x}{L}\right)+\left(4R_1+2R_2+R_1R_2\right)\left(\dfrac{x}{L}\right)\left(1-\dfrac{x}{L}\right)^2}{12+4\left(R_1+R_2\right)+R_1\cdot R_2}, x > \dfrac{L}{2} \end{cases} \tag{20}$$

3.3 区间均布荷载作用

如图5所示,等效单跨梁受区间$[\xi_1,\xi_2]$均布荷载($q=\dfrac{P}{2ab_1}$)作用.与前类似,支点截面转角、支点和跨中截面弯矩解析公式为:

$$\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{qL^2}{12i}\left[2\cdot\dfrac{4\left(\xi_2^3-\xi_1^3\right)-3\left(\xi_2^4-\xi_1^4\right)}{12+4\left(R_1+R_2\right)+R_1\cdot R_2}+\left(4+R_2\right)\cdot\dfrac{6\left(\xi_2^2-\xi_1^2\right)-8\left(\xi_2^3-\xi_1^3\right)+3\left(\xi_2^4-\xi_1^4\right)}{12+4\left(R_1+R_2\right)+R_1\cdot R_2}\right] \\ \theta_2 = -\dfrac{qL^2}{12i}\left[\left(4+R_1\right)\cdot\dfrac{4\left(\xi_2^3-\xi_1^3\right)-3\left(\xi_2^4-\xi_1^4\right)}{12+4\left(R_1+R_2\right)+R_1\cdot R_2}+2\cdot\dfrac{6\left(\xi_2^2-\xi_1^2\right)-8\left(\xi_2^3-\xi_1^3\right)+3\left(\xi_2^4-\xi_1^4\right)}{12+4\left(R_1+R_2\right)+R_1\cdot R_2}\right] \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} M_1 = -\dfrac{qL^2R_1}{12}\left[2\cdot\dfrac{4\left(\xi_2^3-\xi_1^3\right)-3\left(\xi_2^4-\xi_1^4\right)}{12+4\left(R_1+R_2\right)+R_1\cdot R_2}+\left(4+R_2\right)\cdot\dfrac{6\left(\xi_2^2-\xi_1^2\right)-8\left(\xi_2^3-\xi_1^3\right)+3\left(\xi_2^4-\xi_1^4\right)}{12+4\left(R_1+R_2\right)+R_1\cdot R_2}\right] \\ M_2 = -\dfrac{qL^2R_2}{12}\left[\left(4+R_1\right)\cdot\dfrac{4\left(\xi_2^3-\xi_1^3\right)-3\left(\xi_2^4-\xi_1^4\right)}{12+4\left(R_1+R_2\right)+R_1\cdot R_2}+2\cdot\dfrac{6\left(\xi_2^2-\xi_1^2\right)-8\left(\xi_2^3-\xi_1^3\right)+3\left(\xi_2^4-\xi_1^4\right)}{12+4\left(R_1+R_2\right)+R_1\cdot R_2}\right] \end{cases} \tag{22}$$

$$M_c = \frac{qL^2}{8}\left(4\xi_2-2\xi_2^2-2\xi_1^2-1\right)-\frac{qL^2}{24}\left[\left(4R_2+2R_1+R_1R_2\right)\cdot\frac{4\left(\xi_2^3-\xi_1^3\right)-3\left(\xi_2^4-\xi_1^4\right)}{12+4\left(R_1+R_2\right)+R_1\cdot R_2}+\left(4R_1+2R_2+R_1R_2\right)\cdot\frac{6\left(\xi_2^2-\xi_1^2\right)-8\left(\xi_2^3-\xi_1^3\right)+3\left(\xi_2^4-\xi_1^4\right)}{12+4\left(R_1+R_2\right)+R_1\cdot R_2}\right] \tag{23}$$

式中:均布荷载作用区间$\left[\dfrac{x_1}{L},\dfrac{x_2}{L}\right]=[\xi_1,\xi_2]$,并约定$\xi_1<\dfrac{1}{2},\xi_2>\dfrac{1}{2}$.

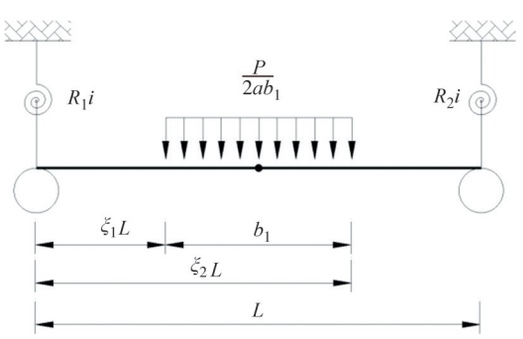


图5 受区间均布荷载作用的等效单跨梁

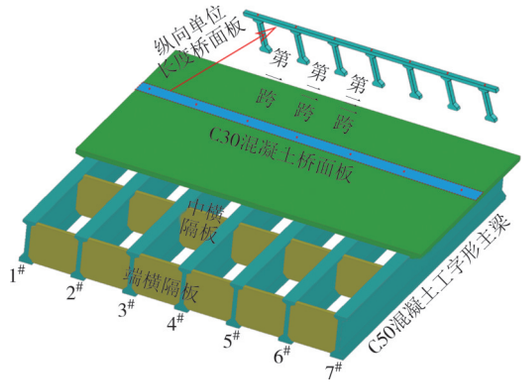
Fig.5 Equivalent single-span beam subjected to partially uniformly distributed load

4 算例分析

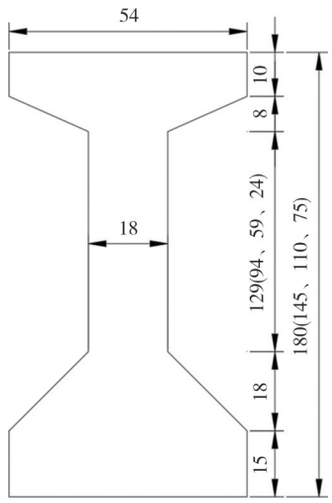
图6为我国标准跨径30 m工字梁的通用设计结构图.上部结构为预应力混凝土工字梁、钢筋混凝土桥面板的组合结构.工字梁计算跨径L=28.86 m;材料为C50混凝土,剪切模量G=13.8 GPa,截面抗扭惯矩I_d=6.553×10^{-3} m^4;间距L=2.15 m,梁肋宽b=0.18 m,主梁高h=1.80 m;桥面板材料为C30混凝土,弹性模量E=30.0 GPa,桥面板厚度t=0.20 m,单宽截面抗弯惯性矩I=6.666 7×10^{-4} m^4. 桥跨设置5道横隔板,板厚0.15 m. 主梁横截面如图6(b)所示. 主梁抗扭刚度按圣维南自由扭转理论取值.

4.1 自重内布荷载作用下桥面板的内力和横向弯矩修正系数

选取主梁跨中截面位置的桥面板进行分析,1#~2#主梁间桥面板为第一跨桥面板,2#~3#主梁间桥面板为第二跨桥面板,3#~4#主梁间桥面板为第三跨桥面板. 模拟桥面板自重,取均布荷载q=8.8 kN/m作用,其等效单跨梁受力图如图3所示,跨中截面的主梁抗扭刚度与桥面板横向抗弯刚度系数比取α=1.347 4. 第一、二、三跨桥面板的综合等效刚度系数R_1和R_2、相应简支梁跨中截面的弯矩M_0、两边支点截面的弯矩M_1和M_2、跨中截面的弯矩M_c、左右支点截面的横向弯矩修正系数、跨中截面的横向弯矩修正



(a)上部结构的空间布置



(b)主梁截面尺寸

图 6　上部结构布置图及主梁结构尺寸(单位:cm)

Fig.6　Layout of superstructure and dimensions of main girder (unit:cm)

系数如表 1 所示.

从表 1 可以看出,桥面板支点截面横向弯矩修正系数最大值为 0.550 5(第一跨右支点截面处)、最小值为 0.224 6(第一跨左支点截面处),均低于《公预规》的规定值 0.7. 跨中截面横向弯矩修正系数最大值为 0.612 4、最小值为 0.526 9,均高于《公预规》的规定值 0.5(t/h<1/4),表明《公预规》的取值偏小,给设计带来不安全的风险.

为校对本文的计算公式,将桥面板简化成 6 跨连续梁,主梁对桥面板的转动弹性约束采用等效弹簧进行模拟,采用杆系有限元进行分析. 根据有限元理论,弹性约束只需在总刚度中的对应主自由度的位置输入等效弹簧刚度即可. 将桥面板结构自重荷载分别作用于第一跨、第二跨、第三跨,各荷载作用跨内的横向弯矩分布图及本文理论值如图 7 所示.

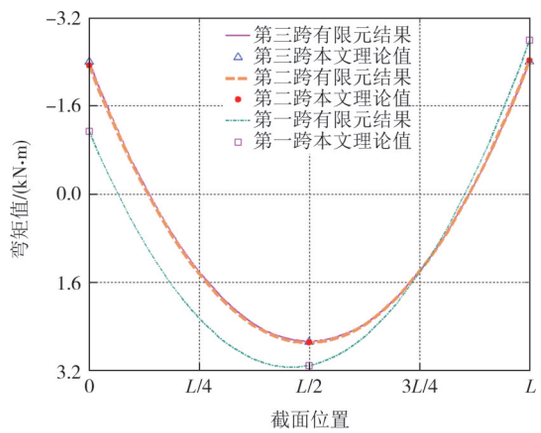


图 7　主梁跨中截面处第一跨、第二跨、第三跨桥面板的横向弯矩分布图

Fig.7　Transverse bending moment distributions of the No.1 span, No.2 span, No.3 span bridge deck at the middle-span of main girder

从图 7 可以看出,本文理论值与杆系有限元结果完全一致,表明将多跨连续桥面板等效成单跨梁方法可行,本文所推导的理论公式无误.

4.2　汽车区间均布荷载作用下桥面板内力和横向弯矩修正系数

为考察桥面板在桥纵向不同位置,主梁抗扭刚度变化带来的影响,分别取主梁支点截面、1/4 截面和跨中截面的桥面板进行分析. 在计算中模拟车辆荷载作用时,考虑桥面板铺装层的扩散效应和有效工作宽度,将车轮荷载作为区间均布荷载对称作用于跨中,荷载集度取 q=54.902 6 kN/m. 计算简图如图 5 所示.

主梁的支点截面、1/4 截面、跨中截面处,第一跨桥面板的综合等效刚度系数 R_1 和 R_2、相应简支梁跨中截面弯矩 M_0、桥面板支点截面弯矩 M_1 和 M_2、跨中截面弯矩 M_c、支点截面横向弯矩修正系数、跨中截面横向弯矩修正系数如表 2 所示.

表 1　第一跨、第二跨、第三跨桥面板的计算结果

Tab.1　Results of No.1 span, No.2 span, No.3 span bridge decks

计算位置	R_1	R_2	M_0	M_1	M_2	M_c	左支点截面横向弯矩修正系数($\lvert M_1/M_0\rvert$)	右支点截面横向弯矩修正系数($\lvert M_2/M_0\rvert$)	跨中截面横向弯矩修正系数($\lvert M_c/M_0\rvert$)
第一跨	1.347 4	4.897 8	5.084 8	−1.142 1	−2.799 2	3.114 1	0.224 6	0.550 5	0.612 4
第二跨	4.599 4	4.897 8	5.084 8	−2.343 1	−2.426 8	2.699 8	0.460 8	0.477 3	0.531 0
第三跨	4.882 2	4.897 0	5.084 8	−2.403 8	−2.407 8	2.679 0	0.472 7	0.473 5	0.526 9

表 2 主梁支点、1/4、跨中截面处第一跨桥面板的计算结果

Tab.2 Results of No.1 span bridge deck at the end-support, quarter-span and middle-span of main girder

计算截面	R_1	R_2	M_0	M_1	M_2	M_c	左支点截面横向弯矩修正系数($\lvert M_1/M_0\rvert$)	右支点截面横向弯矩修正系数($\lvert M_2/M_0\rvert$)	跨中截面横向弯矩修正系数($\lvert M_c/M_0\rvert$)
支点截面	∞	∞	21.000 1	−12.503 9	−12.503 8	8.496 3	0.595 4	0.595 4	0.404 6
1/4 截面	1.796 5	5.369 6	21.000 1	−5.076 4	−10.404 5	13.259 7	0.241 7	0.495 5	0.631 4
跨中截面	1.347 4	4.897 8	21.000 1	−4.213 0	−10.325 0	13.731 2	0.200 6	0.491 7	0.653 9

从表 2 可以看出,模拟汽车荷载作用下,桥面板支点截面横向弯矩修正系数最大值为 0.595 4(支点截面的右支点截面处)、最小值为 0.200 6(跨中截面的左支点截面处),均低于《公预规》的规定值 0.7. 跨中截面横向弯矩修正系数最大值为 0.653 9,高于《公预规》的规定值 0.5(t/h<1/4),表明《公预规》取值偏小,给设计带来不安全的风险.

与前类似,采用杆系有限元对主梁支点截面、1/4 截面、跨中截面处第一跨桥面板内的弯矩分布进行分析,结果如图 8 所示,同时给出了本文的理论值.

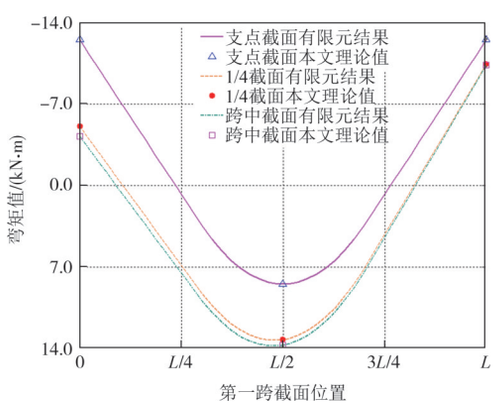


图 8 主梁支点、1/4 和跨中截面处第一跨桥面板弯矩分布

Fig.8 Transverse bending moment distributions of No.1-span bridge deck at the end-support, quarter-span and middle-span of the main girder

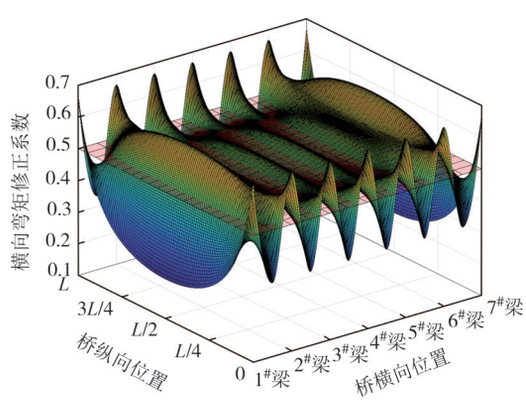
从图 8 可以看出,本文理论值与杆系有限元结果完全一致.

综合桥面板在自重均布荷载、汽车区间均布荷载作用下的内力和横向弯矩修正系数分析结果(如表 1 和表 2、图 7 和图 8 所示)可以看出,横向弯矩修正系数不仅与主梁对桥面板的约束扭转强度、桥面板的边跨约束效应、计算截面位置有关,也与作用荷载形式有关.《公预规》仅考虑桥面板厚度与主梁高度的比值,提出了修正系数,方法过于简略,缺乏理论基础,且修正系数的取值大小仍有待深入研究.

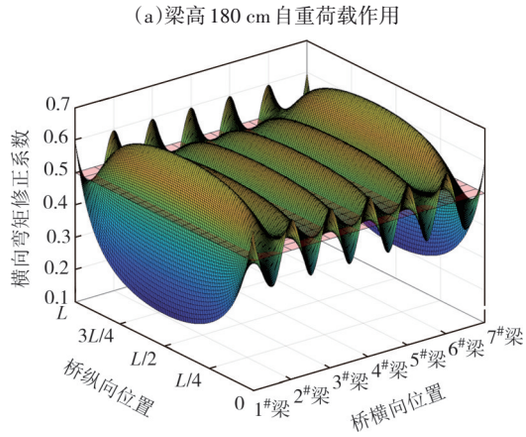
4.3 桥面板横向弯矩修正系数的分布

由算例可知,受主梁抗扭约束和桥面板边跨约束的影响,桥面板在主梁的支承位置处,由其左跨的右支点横向弯矩修正系数或者由其右跨的左支点横向弯矩修正系数不同. 为方便计算,取其最大的横向弯矩修正系数作为最终横向弯矩修正系数. 在桥面板自重和汽车荷载作用下,整跨结构桥面板横向弯矩修正系数分布图如图 9 所示. 在桥面板内,位于支点和跨中截面之间的横向弯矩修正系数由支点和跨中截面横向弯矩修正系数按 3 次曲线进行拟合加密形成,其在设计过程中一般不是主要关注对象,也非控制设计截面,可以采用近似的拟合值. 为方便与规范值比较,将桥面板跨中截面横向弯矩修正系数的规范值 0.5 示于图中(红色平面).

将图 9 所示结果的最大值、最小值和规范规定值汇总于表 3.



(a)梁高 180 cm 自重荷载作用



(b)梁高 180 cm 汽车荷载作用

图 9 桥面板横向弯矩修正系数分布图

Fig.9 Distributions of the transverse bending moment modification parameter for the bridge deck

从表3可以看出,标准跨径为30 m的预应力混凝土工字形组合梁通用设计结构中,桥面板支点截面的横向弯矩修正系数最大值为0.666 7,小于《公预规》规定值0.7. 跨中截面有相当多位置的横向弯矩修正系数大于规范值0.5,最大值达0.653 9(汽车荷载作用下),建议将跨中截面横向弯矩修正系数的规范值由0.5提高至0.7.

表3　桥面板横向弯矩修正系数最值

Tab.3　Extreme results of the transverse bending moment modification parameter of the bridge deck

荷载	支点截面横向弯矩修正系数			跨中截面横向弯矩修正系数		
工况	最大值	最小值	规范值	最大值	最小值	规范值
自重	0.666 7	0.224 6	0.7	0.612 4	0.333 3	0.5
汽车	0.595 4	0.200 6	0.7	0.653 9	0.404 6	0.5

5　参数分析

为分析主梁抗扭刚度、桥面板抗弯刚度、桥面板边跨约束效应、荷载作用形式等对横向弯矩修正系数的影响,对主梁高度、桥面板厚度、主梁片数和荷载4种因素进行参数分析,扩大本文理论的实例验证数目,从多角度考察《公预规》关于桥面板横向弯矩修正系数取值的合理性.

5.1　梁高对横向弯矩修正系数的影响

保持桥面板厚度t=0.2 m不变,改变梁腹高度,选取梁高h为1.45、1.10、0.75 m[主梁横截面具体尺寸如图6(b)所示],对结构进行对比分析. 此时主梁抗扭惯性矩分别取5.873 0×10^{-3}、5.182 0×10^{-3}、4.513 1×10^{-3} m^4. 主梁跨中截面抗扭刚度与桥面板横向抗弯刚度系数比分别取1.207 6(主梁高1.45 m)、1.067 5(主梁高1.10 m)、0.927 9(主梁高0.75 m). 均布荷载作用下,桥面板横向弯矩修正系数计算结果如表4所示.

对于桥面板支点截面,从表4可以看出,横向弯矩修正系数最大值为0.549 1,最小值为0.171 7,均小于规定值0.7. 对于桥面板跨中截面,当t/h<1/4时(主梁梁高h分别为1.45、1.10 m),横向弯矩修正系数最大值为0.630 9、最小值为0.531 1,均高于《公预规》的规定值0.5(t/h <1/4),表明《公预规》取值偏小,给设计带来不安全的风险;当t/h>1/4时(主梁梁高取0.75 m),横向弯矩修正系数最大值为0.641 0,最小值为0.540 2,低于《公预规》的规定值0.7(t/h >1/4),表明《公预规》取值合理.

表4　主梁跨中截面处第一跨、第二跨、第三跨桥面板的计算结果

Tab.4　Results of No.1 span, No.2 span, No. 3 span bridge decks at the middle-span of main girder

主梁梁高h/m	计算位置	左支点截面横向弯矩修正系数	右支点截面横向弯矩修正系数	跨中截面横向弯矩修正系数
1.45 (t/h=1/7.25)	第一跨	0.208 2	0.549 1	0.621 3
	第二跨	0.455 5	0.473 3	0.535 6
	第三跨	0.468 4	0.469 3	0.531 1
1.10 (t/h=1/5.5)	第一跨	0.190 6	0.547 7	0.630 9
	第二跨	0.449 9	0.469 2	0.540 4
	第三跨	0.463 9	0.464 9	0.535 6
0.75 (t/h=1/3.75)	第一跨	0.171 7	0.546 3	0.641 0
	第二跨	0.444 0	0.464 9	0.545 6
	第三跨	0.459 2	0.460 3	0.540 2

5.2　桥面板厚度对横向弯矩修正系数的影响

保持主梁梁高h=1.8 m以及均布荷载工况不变,改变桥面板厚度t,t分别取0.15、0.20、0.25 m. 主梁跨中截面处第一跨、第二跨、第三跨桥面板的横向弯矩修正系数计算结果如表5所示.

表5　主梁跨中截面处第一跨、第二跨、第三跨桥面板的计算结果

Tab.5　Results of No.1 span, No. 2 span, No. 3 span bridge decks at the middle-span of main girder

桥面板厚度t/m	计算位置	左支点截面横向弯矩修正系数	右支点截面横向弯矩修正系数	跨中截面横向弯矩修正系数
0.15 (t/h=1/12)	第一跨	0.368 7	0.566 2	0.532 0
	第二跨	0.510 6	0.517 3	0.486 1
	第三跨	0.515 4	0.515 6	0.484 5
0.20 (t/h=1/9)	第一跨	0.224 6	0.550 5	0.612 4
	第二跨	0.460 8	0.477 3	0.531 0
	第三跨	0.472 7	0.473 5	0.526 9
0.25 (t/h=1/7.2)	第一跨	0.136 1	0.543 7	0.660 1
	第二跨	0.432 9	0.457 2	0.555 0
	第三跨	0.450 6	0.451 9	0.548 7

对于桥面板支点截面,从表5可以看出,横向弯矩修正系数最大值为0.566 2、最小值为0.136 1,均小于《公预规》的规定值0.7. 对于桥面板跨中截面,3种桥面板厚度条件下的横向弯矩修正系数均有超过《公预规》规定值0.5(t/h <1/4)的情况,最大值为0.660 1,表明《公预规》取值偏小,给设计带来不安全的风险.

5.3　主梁片数对横向弯矩修正系数的影响

由图2可知,多跨连续梁的边跨效应对第一跨

有显著影响,而对中间跨影响较弱.在算例的基础上改变主梁片数,选取三片主梁,即两跨桥面板结构进行分析,保持桥面板厚度t=0.2 m,改变主梁的高度h,其横向弯矩修正系数的计算结果如表6所示.

表6 主梁跨中截面处第一跨桥面板的计算结果

Tab.6 Results of No.1 span bridge decks at the middle-span of main girder

主梁梁高h/m	计算位置	左支点截面横向弯矩修正系数	右支点截面横向弯矩修正系数	跨中截面横向弯矩修正系数
1.80(t/h=1/9)	第一跨	0.226 8	0.536 6	0.618 3
1.45(t/h=1/7.25)	第一跨	0.210 4	0.534 0	0.627 8
1.10(t/h=1/5.5)	第一跨	0.192 8	0.531 2	0.638 0
0.75(t/h=1/3.75)	第一跨	0.173 9	0.528 1	0.649 0

对于桥面板支点截面,从表6可以看出,横向弯矩修正系数低于《公预规》的规定值0.7.对于桥面板跨中截面,当t/h<1/4时(梁高分别取1.80、1.45、1.10 m),横向弯矩修正系数均高于《公预规》的规定值0.5(t/h <1/4),表明《公预规》取值偏小,给设计带来不安全风险.当t/h>1/4时(梁高取0.75 m),横向弯矩修正系数值为0.649 0,低于《公预规》的规定值0.7(t/h>1/4),表明《公预规》的取值合理.

表6相较于表4而言,其区别主要在于3片主梁的边跨效应比7片主梁的边跨效应更加显著,相对应的横向弯矩修正系数也得到了提高.

5.4 荷载对横向弯矩修正系数的影响

与前类似,将汽车荷载作为区间均布荷载对称作用于跨中,保持主梁片数(7片)及桥面板厚度t=0.2 m不变的条件下,改变主梁高度h,横向弯矩修正系数计算结果如表7所示.

对于桥面板支点截面,从表7可以看出,横向弯矩修正系数均小于《公预规》的规范值0.7,符合规范要求.对于桥面板跨中截面,当t/h <1/4时,横向弯矩修正系数最大值为0.670 3,高于《公预规》的规范值0.5(t/h <1/4),偏不安全;当t/h>1/4时,横向弯矩修正系数最大值为0.679 4,小于规定值0.7,《公预规》的取值合理.

对比自重作用下的横向弯矩修正系数结果(表4)与汽车作用下的横向弯矩修正系数结果(表7),可以看出,不同荷载作用下的桥面板横向弯矩修正系数结果不同.

表7 主梁支点、1/4、跨中截面处第一跨桥面板计算结果

Tab.7 Results of No.1 span bridge deck at end-support, quarter-span and middle-span of main girder

主梁梁高h/m	计算截面	左支点截面横向弯矩修正系数	右支点截面横向弯矩修正系数	跨中截面横向弯矩修正系数
1.45(t/h=1/7.25)	支点截面	0.595 4	0.595 4	0.404 6
	1/4截面	0.225 7	0.493 9	0.640 2
	跨中截面	0.185 9	0.490 4	0.661 8
1.10(t/h=1/5.5)	支点截面	0.595 4	0.595 4	0.404 6
	1/4截面	0.208 2	0.492 3	0.649 7
	跨中截面	0.170 2	0.489 2	0.670 3
0.75(t/h=1/3.75)	支点截面	0.595 4	0.595 4	0.404 6
	1/4截面	0.189 1	0.490 7	0.660 1
	跨中截面	0.153 4	0.487 9	0.679 4

6 结 论

1)《公预规》关于多跨连续桥面板横向弯矩修正系数仅考虑桥面板厚度与主梁高度比(t/h)的影响,方法过于简略,缺少理论基础.本文考虑主梁对桥面板的扭转约束效应、多跨连续桥面板的边跨约束效应、计算截面位置和荷载形式的影响而提出的等效单跨梁法,为多跨连续桥面板横向弯矩修正系数取值提供了理论支持.

2)多跨连续桥面板支点和跨中截面的横向弯矩理论值与杆系有限元结果一致,证明本文所推导的计算公式正确,简化方法可行、有效.

3)算例结果和参数分析表明,对于桥面板支点截面,无论t/h<1/4还是t/h>1/4,其横向弯矩修正系数最大值为0.666 7,均小于《公预规》的规定值0.7.对于桥面板跨中截面,当t/h<1/4时,横向弯矩修正系数最大值为0.670 3,大于《公预规》的规定值0.5,《公预规》的取值偏不安全;当t/h>1/4时,横向弯矩修正系数最大值为0.679 4,小于《公预规》的规定值0.7.建议《公预规》对桥面板横向弯矩修正系数的计算理论、影响因素、系数大小等进行深入研究.

4)本文提出的等效单跨梁模型基于有效工作宽度的概念建立,将桥面板等效为多跨连续梁.该模型继承了《公预规》的规范方法,并在此基础上进行了拓展.然而,该模型未考虑主梁竖向变形的影响,因此它是一种近似方法,适用于工字形组合梁等结构.

参考文献

[1] 邵旭东. 桥梁工程[M]. 6版. 北京:人民交通出版社股份有限公司, 2023.
SHAO X D. Bridge engineering [M]. 6th ed. Beijing: China Communications Press Co., Ltd., 2023.(in Chinese)

[2] 公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范:JTG 3362—2018[S]. 北京:人民交通出版社,2018.
Specifications for design of highway reinforced concrete and prestressed concrete bridges and culverts: JTG 3362—2018[S]. Beijing:China Communications Press, 2018.(in Chinese)

[3] AASHTO LRFD Bridge design specifications (8th edition): LRFDUS-2017[S]. Washington D C:AASHTO,2017.

[4] XIANG D, LIU Y Q, YANG F. Numerical and theoretical analysis of slab transverse-moment distributions in twin-girder crossbeam composite bridges[J]. Journal of Bridge Engineering, 2020, 25(3): 04020004.

[5] 席荔.公路桥梁桥面系设计方法及技术经济性分析[D].西安:长安大学,2014.
XI L. Design method for highway bridge deck and analysis of economics and technology [D]. Xi'an: Chang'an University, 2014.(in Chinese)

[6] 吴浩伟. 轮载作用下双工字钢板组合梁桥面板横向弯曲效应研究[D]. 西安:长安大学,2020.
WU H W. Research on transverse bending effect of deck in twin-I girder composite bridges under wheel load [D]. Xi'an: Chang'an University,2020.(in Chinese)

[7] Specifications for highway bridges, part Ⅱ: steel bridge:JRA2012 [S]. Tokyo: Japan Road Association, 2012.

[8] 刘玉擎. 组合结构桥梁[M]. 北京:人民交通出版社,2005.
LIU Y Q. Steel-concrete composite bridge[M]. Beijing: China Communications Press,2005.(in Chinese)

[9] 石雪飞,马海英,刘琛. 双工字钢组合梁桥钢梁设计参数敏感性分析与优化[J]. 同济大学学报(自然科学版),2018,46(4):444-451.
SHI X F, MA H Y, LIU C. Parametric study and optimization on behavior of twin-I girder composite bridges [J]. Journal of Tongji University (Natural Science),2018,46(4):444-451.(in Chinese)

[10] 刘永健,范泉锋,封博文,等. 双工字钢-混凝土组合梁桥桥面板横向弯矩[J]. 长安大学学报(自然科学版),2022,42(6):1-11.
LIU Y J, FAN Q F, FENG B W, et al. Transverse moment of steel-concrete composite twin I-girder bridge deck[J]. Journal of Chang'an University (Natural Science Edition),2022,42(6):1-11.(in Chinese)

[11] 刘永健,吴浩伟,封博文,等. 车轮荷载作用下双工字钢组合梁桥横桥向焊钉拉拔效应[J]. 建筑科学与工程学报, 2020, 37(2): 1-10.
LIU Y J, WU H W, FENG B W, et al. Tensile effect of welding studs in transverse direction of twin-I steel composite girder bridge under wheel load[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering,2020,37(2):1-10.(in Chinese)

[12] 张轩瑜. 双工字形钢-预制混凝土板组合梁桥静力性能研究[D]. 西安:长安大学,2019.
ZHANG X Y. Research on the static performance of twin-I steel-composite girder bridges with precast concrete deck panel [D]. Xi'an: Chang'an University,2019.(in Chinese)

[13] 范泉锋. 双工字钢组合梁组合桥面板横向弯曲效应研究[D]. 西安: 长安大学, 2022.
FAN Q F. Research on transverse bending effect of composite slab of twin-I-girder composite bridges [D]. Xi'an: Chang'an University, 2022.(in Chinese)

[14] 贾慧娟,戴航,张建东. 波形钢腹板组合梁桥横向受力研究[J]. 工程力学, 2014, 31(12): 76-82.
JIA H J, DAI H, ZHANG J D. Research on transverse internal forces in box-girder bridges with corrugated steel webs [J]. Engineering Mechanics,2014,31(12): 76-82.(in Chinese)

[15] 赵品, 叶见曙. 波形钢腹板箱梁桥面板横向内力计算的框架分析法[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2012, 42(5): 940-944.
ZHAO P, YE J S. Frame analysis method of transverse internal force in bridge deck of box girders with corrugated steel webs[J]. Journal of Southeast University(Natural Science Edition), 2012, 42(5): 940-944.(in Chinese)

[16] 赵品, 荣学亮, 叶见曙. 波形钢腹板箱梁桥面板横向内力计算方法[J]. 同济大学学报(自然科学版),2019,47(4):467-474.
ZHAO P, RONG X L, YE J S. Calculation method of transverse internal force in bridge deck of box girder with corrugated steel webs[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2019, 47(4): 467-474.(in Chinese)

[17] 范立础.桥梁工程[M].2版.北京:人民交通出版社,1980.
FAN L C. Bridge engineering [M]. 2nd ed. Beijing: China Communications Press,1980.(in Chinese)

[18] DE SALVO V, MUSCOLINO G, PALMERI A. A substructure approach tailored to the dynamic analysis of multi-span continuous beams under moving loads[J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329(15): 3101-3120.

[19] 潘权, 易壮鹏, 杨胜江, 等. 悬浮隧道子结构简化模型与动力响应分析[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2022, 53(10): 4132-4141.
PAN Q, YI Z P, YANG S J, et al. A simplified substructure model and dynamic response analysis of the submerged floating tunnel [J]. Journal of Central South University (Science and Technology),2022,53(10):4132-4141.(in Chinese)

[20] BIONDI B, MUSCOLINO G, SOFI A. A substructure approach for the dynamic analysis of train-track-bridge system [J]. Computers & Structures, 2005, 83(28/29/30): 2271-2281.

[21] 袁驷, 袁全. 交叉梁系比拟求解薄板弯曲问题的相容性及其计算[J]. 土木工程学报, 2023, 56(3): 1-8.
YUAN S, YUAN Q. Compatibility in analogy of gridworks to thin plate bending and its numerical solution [J]. China Civil Engineering Journal, 2023, 56(3): 1-8.(in Chinese)

[22] 张玉敏,鲍鹏,崔奕. 板与交叉梁系的相似性及其简化计算[J]. 河南大学学报(自然科学版),2002,32(1):83-86.
ZHANG Y M, BAO P, CUI Y. The theoretical similarity between a plate and a grillage beam [J]. Journal of Henan University (Natural Science), 2002, 32(1): 83-86.(in Chinese)

[23] 张进国, 崔淑萍, 孙可梅. 连续梁求解的等效刚度转角叠加法[J]. 建筑结构,1995,25(10): 16-17.
ZHANG J G, CUI S P, SUN K M. Equivalent stiffness angle superposition method for continuous beam solution [J]. Building Structure, 1995, 25(10): 16-17.(in Chinese)

[24] 黄树熙. 计算连续梁和无侧移单层刚架的固有频率的等效梁方法[J]. 华南工学院学报,1981,9(4):105-120.
HUANG S X. Equivalent beam method for determining tne natural frequencies of continuous beams or one-story rigid frames without sideway[J]. Journal of South China Institute of Technology,1981, 9(4): 105-120.(in Chinese)

[25] 夏桂云, 李传习. 考虑剪切变形影响的杆系结构理论与应用[M]. 北京:人民交通出版社,2008.
XIA G Y, LI C X. Theory and application of bar structures considering the shear deformation effect [M]. Beijing: China Communications Press,2008.(in Chinese)