文章编号:1000-1638(2026)05-0481-12 DOI:10.13484/j.nmgdxxbzk.20260504

具有饱和检测率的动物布病动力学模型分析*

白清梅,侯 强
(中北大学数学学院,太原 030051)

摘要:为分析动物检测对布鲁氏菌病传播动态的影响,考虑因检测信息聚集导致信息饱和这一因素,建立具有饱和检测率的多阶段布病传播模型。首先,通过计算给出基本再生数,分析模型和退化模型平衡点的存在性和稳定性;其次,分析后向分支出现的条件,运用反证法和比较原理证明模型的一致持续性;最后,通过数值模拟发现,模型会出现后向分支和Hopf分支等复杂的分支现象,验证并进一步拓展了理论结果。

关键词:布鲁氏菌病;饱和检测率;基本再生数;后向分支;稳定性
中图分类号:O175.1 **文献标志码**:A

布鲁氏菌病简称布病,其主要防控手段有疫苗接种、消毒和检测扑杀等。目前,针对这些防控手段开展的动力学模型研究已取得诸多进展。然而,关于动物检测对布病传播影响的相关研究仍需进一步完善[1-5]。冯建武等[6]以检测发现的染病动物作为检测信息,考虑布病潜伏期的特性,建立时滞动力学模型,研究发现当检测率达到某一临界阈值时,模型会发生Hopf分支并产生周期解。贺建花等[7]在已有确定模型基础上,考虑环境波动和检测力度变化的随机特性,构建随机模型分析噪声强度对模型的影响。王燕飞等[8]将动物布病检测中已发现但未及时处置、仍具有传染性的染病动物风险纳入动物布病传播动力学模型,使用最优控制策略,研究检测行为对布病传播的影响。Nie等[9]考虑到扑杀资源有限的实际情况,利用饱和扑杀函数来反映扑杀资源限制的影响,研究发现检测扑杀措施的实施会导致模型出现周期振荡、多稳态等复杂的传播动态。

已有研究分别从检测时滞、随机扰动、检测阳性动物的持续传播和扑杀资源限制等方面拓展了对布病传播的认识,但尚未考虑检测信息饱和的影响,特别是未考虑检测信息饱和与发现的染病动物管理共同作用的影响。从模型结构看,已有模型大多采用两类处理方式:一类令检测强度随有效信息量线性增加,另一类则将饱和机制设置在检测阳性动物的扑杀环节,用于反映阳性动物数量增加后扑杀资源受限的情形。与饱和扑杀机制不同,本文将饱和机制设置在检测发现环节,用于描述检测信息不断积累后,因重复信息增多而使检测作用逐渐减弱并最终趋于饱和的过程。因此,为分析检测-扑杀策略对布病传播的影响,基于布病的传播特点,将检测信息聚集导致的信息饱和影响,以及无临床症状的染病动物经检测被发现后仍可能造成二次传播的风险纳入模型,建立多阶段布病传播动力学模型。

* **收稿日期**:2026-03-10;**修回日期**:2026-06-23
基金项目:山西省基础研究计划资助项目(202103021231031,202203021211091)
作者简介:白清梅(2003—),女,山西吕梁人,2024级硕士研究生。E-mail:b15135467927@163.com
通信作者:侯 强(1981—),男,安徽淮北人,副教授,博士。主要从事动力系统及其应用研究。E-mail:houqiang200207@163.com

本文第一部分建立布病传播的动力学模型,给出其基本再生数R_0;第二部分讨论模型平衡点的个数和稳定性、后向分支产生的条件和模型的一致持续性;第三部分通过数值模拟进一步分析模型的动力学性质;最后为本文的总结。

1 模型和基本性质

将某一地区的动物种群$N(t)$分为4个仓室,$S(t)$表示易感类,$E(t)$表示潜伏类,$I(t)$表示无临床特征的染病类,$I_d(t)$表示在无临床特征的染病类中通过检测手段发现的动物,且满足$N(t)=S(t)+E(t)+I(t)+I_d(t)$。针对模型,提出以下假设:

① 重点关注动物检测对疫病传播的影响,因此暂不考虑环境传播这一风险因素;

② 假设潜伏期动物无法被检测手段识别,原因是该时期的动物很难被血清学检测发现;

③ 考虑到无临床症状的染病动物被检测发现后可能无法立即得到有效处置,因此假定这些被检出的染病动物仍具备传播疫病的能力;

④ 国家设置了布病常态化监测点,因此假设信息量具有固定的输入量B,并将检测发现的染病动物作为检测信息的主要来源;

⑤ 由于布病监测具有触发式特征,一旦发现阳性会立即启动全群筛查与处置,后续发现新增多为重复信息,因此检测率随有效信息量的增长先呈现增长趋势后增长逐渐缓慢最终趋于饱和。假定$M(t)$表示动物布病检测的有效信息量,ϕ表示单位信息下的检测率,α表示饱和常数,因此染病动物被检测发现的数量可以表示为$\phi N\frac{I}{N}\frac{M}{\alpha+M}=\phi\frac{M}{\alpha+M}I$。根据这些假设,建立动力学模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=A-\beta_1SI-\beta_2SI_d-\mu S\\ \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\beta_1SI+\beta_2SI_d-\sigma E-\mu E\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\sigma E-\phi\dfrac{M}{\alpha+M}I-\mu I\\ \dfrac{\mathrm{d}I_d}{\mathrm{d}t}=\phi\dfrac{M}{\alpha+M}I-cI_d-\mu I_d\\ \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=B+kI_d-dM\end{cases}\tag{1}$$

其中,A为易感类的补充速率,β_1和β_2分别为无临床特征和检测发现的染病类对易感类的感染率,σ为潜伏类到无临床特征染病类的转移率,μ为种群的自然死亡率,c为检测发现的染病类的扑杀强度,k为检测发现的染病类转化为有效信息的转移效率系数,d为有效信息的衰减比率。所有参数均为正。

通过计算,模型(1)的可行域为

$$\Omega=\left\{(S,E,I,I_d,M)\middle|S\geqslant 0,\ E\geqslant 0,I\geqslant 0,I_d\geqslant 0,0\leqslant S+E+I+I_d\leqslant\frac{A}{\mu},\ \frac{B}{d}\leqslant M\leqslant\frac{B}{d}+\frac{kA}{\mu d}\right\}$$

当$E=I=I_d=0$时,模型(1)处于无病状态,此时模型的无病平衡点为

$$P^0=(S^0,E^0,I^0,I_d^0,M^0)=(\frac{A}{\mu},0,0,0,\frac{B}{d})$$

通过下一代矩阵法[10],计算其基本再生数为

$$R_0=\frac{A\beta_1\sigma(\alpha d+B)}{\mu(\mu+\sigma)(\mu(\alpha d+B)+\phi B)}+\frac{A\beta_2\sigma\phi B}{\mu(\mu+\sigma)(\mu+c)(\mu(\alpha d+B)+\phi B)}=R_a+R_b$$

2　平衡点和一致持续性

2.1　地方病平衡点的存在性

假设$P^*=(S^*,E^*,I^*,I_d^*,M^*)$为模型(1)的地方病平衡点,令模型(1)右边为0,经过计算得出:

$$S^*=\frac{(\mu+\sigma)(\mu+c)(\mu(\alpha d+B+kI_d^*)+\phi(B+kI_d^*))}{\sigma(\beta_1(\mu+c)(\alpha d+B+kI_d^*)+\beta_2\phi(B+kI_d^*))}$$

$$E^*=\frac{(\mu+c)(\mu(\alpha d+B+kI_d^*)+\phi(B+kI_d^*))I_d^*}{\sigma\phi(B+kI_d^*)}$$

$$I^*=\frac{(\mu+c)(\alpha d+B+kI_d^*)I_d^*}{\phi(B+kI_d^*)}$$

$$M^*=\frac{B+kI_d^*}{d}$$

且I^*满足

$$f(I_d^*)=M_1I_d^{*3}+M_2I_d^{*2}+M_3I_d^*+M_4 \tag{2}$$

其中

$$M_1=-k^2(\mu+\sigma)(\mu+c)(\mu+\varphi)(\beta_1(\mu+c)+\beta_2\phi)<0$$

$$M_2=A\sigma\phi k^2(\beta_1(\mu+c)+\beta_2\phi)-k(\mu+\sigma)(\mu+c)[(\mu(\alpha d+B)+\phi B)(\beta_1(\mu+c)+\beta_2\phi)+(\mu+\phi)(\beta_1(\mu+c)(\alpha d+B)+\beta_2\phi B+\phi k\mu)]$$

$$M_3=A\sigma\phi k[\beta_1(\mu+c)(\alpha d+2B)+2\beta_2\phi B]-(\mu+\sigma)(\mu+c)[(\mu(\alpha d+B)+\phi B)(\beta_1(\mu+c)(\alpha d+B)+\beta_2\phi B+\phi k\mu)+B\phi k\mu(\mu+\phi)]$$

$$M_4=\phi B\mu(\mu+\sigma)(\mu+c)(\mu(\alpha d+B)+\phi B)(R_0-1)$$

对式(2)进行求导得到

$$f'(I_d^*)=3M_1I_d^{*2}+2M_2I_d^*+M_3 \tag{3}$$

则当$M_3>0,\Delta=M_2^2-3M_1M_3>0$时,方程(3)有一个正根$I_d^1$;当$M_2>0,M_3<0,\Delta=M_2^2-3M_1M_3>0$时,方程(3)有两个正根$I_d^2$、$I_d^3$。

定理1　通过分析得到

① 当$R_0>1$时,若$M_3>0$或$M_2>0,M_3<0,\Delta>0,f(I_d^2)f(I_d^3)>0$,则模型(1)有1个地方病平衡点;若$M_2>0,M_3<0,f(I_d^2)f(I_d^3)<0$,则模型(1)有3个地方病平衡点;

② 当$R_0<1$时,若$M_3>0,f(I_d^1)>0$或$M_2>0,M_3<0,\Delta>0,f(I_d^2)f(I_d^3)<0$,则模型(1)有2个地方病平衡点。

2.2　后向分支存在性分析

定理2　当$M_3>0,f(I_d^1)>0$时,模型(1)在$R_0=1$处发生后向分支。

证明　取分支参数$\phi=\phi^*$,因此,当$R_0=1$时,有

$$\phi^*=\frac{(\mu+c)(\alpha d+B)(\mu^2(\mu+\sigma)-A\beta_1\sigma)}{B(A\beta_2\sigma-\mu(\mu+\sigma)(\mu+c))}$$

令$S=x_1,E=x_2,I=x_3,I_d=x_4,M=x_5$,此时模型(1)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=A-\beta_1x_1x_3-\beta_2x_1x_4-\mu x_1\triangleq f_1\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\beta_1x_1x_3+\beta_2x_1x_4-\sigma x_2-\mu x_2\triangleq f_2\\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=\sigma x_2-\phi\dfrac{x_5}{\alpha+x_5}x_3-\mu x_3\triangleq f_3\\ \dfrac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}t}=\phi\dfrac{x_5}{\alpha+x_5}x_3-cx_4-\mu x_4\triangleq f_4\\ \dfrac{\mathrm{d}x_5}{\mathrm{d}t}=B+kx_4-dx_5\triangleq f_5\end{cases}$$

该模型在P^0处的雅可比矩阵为

$$J(P^0,\phi^*)=\begin{pmatrix}-\mu & 0 & -\beta_1\dfrac{A}{\mu} & -\beta_2\dfrac{A}{\mu} & 0\\ 0 & -(\mu+\sigma) & \beta_1\dfrac{A}{\mu} & \beta_2\dfrac{A}{\mu} & 0\\ 0 & \sigma & -(\mu+\phi^*\dfrac{B}{\alpha d+B}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \phi^*\dfrac{B}{\alpha d+B} & -(\mu+c) & 0\\ 0 & 0 & 0 & k & -d\end{pmatrix}$$

通过计算,得出其特征多项式为

$$\lambda(\lambda+\mu)(\lambda+d)(\lambda^2+n_1\lambda+n_2)=0 \tag{4}$$

式(4)中的n_1、n_2为

$$n_1=3\mu+\sigma+c+\phi^*\frac{B}{\alpha d+B}$$

$$n_2=(\mu+\sigma)(\mu+c)+(\mu+\sigma)(\mu+\phi^*\frac{B}{\alpha d+B})+(\mu+c)(\mu+\phi^*\frac{B}{\alpha d+B})-\beta_1\sigma\frac{A}{\mu}>0$$

由此可见,式(4)有一个零特征值,剩余特征值均为负,零特征值对应的左、右特征值向量为

$$\boldsymbol{v}=(0,v_2,\frac{\mu+\sigma}{\sigma}v_2,\frac{A\beta_2}{\mu(\mu+c)}v_2,0)$$

$$\boldsymbol{w}=(-\frac{\mu+\sigma}{\mu}w_2,w_2,\frac{\sigma(\alpha d+B)}{\mu(\alpha d+B)+\phi^*B}w_2,\frac{\sigma\phi^*B}{(\mu+c)(\mu(\alpha d+B)+\phi^*B)}w_2,\frac{\sigma\phi^*Bk}{d(\mu+c)(\mu(\alpha d+B)+\phi^*B)}w_2)^{\mathrm{T}}$$

其中$v_2>0,w_2>0$,则

$$a=v_kw_iw_j\frac{\partial^2f_k(0,0)}{\partial x_i\partial x_j}=2(\beta_1v_2w_1w_3+\beta_2v_2w_1w_4+\frac{\phi^*\alpha d^2}{(\alpha d+B)^2}(v_4-v_3)w_3w_5)$$

$$=\frac{2v_2w_2^2\sigma D^*}{\mu(\alpha d+B)(\mu+c)^2(\mu(\alpha d+B)+\phi B)^2}$$

$$b=\sum_{k,i=1}^{5}v_kw_i\frac{\partial^2f_k(0,0)}{\partial x_i\partial\phi^*}=\frac{B}{\alpha d+B}w_3(v_4-v_3)=\frac{B(A\sigma\beta_2-\mu(\mu+\sigma)(\mu+c))}{\mu(\mu+c)(\mu(\alpha d+B)+\phi^*B)}v_2w_2$$

其中

$$D^*=[\frac{(\mu+c)(\alpha d+B)}{B(A\beta_2\sigma-\mu(\mu+\sigma)(\mu+c))}]^2\times[\alpha dk(\mu^2(\mu+\sigma)-A\beta_1\sigma)^2(A\beta_2\sigma-\mu(\mu+\sigma)(\mu+c))$$
$$-AB\mu\sigma(\mu+\sigma)^2(\alpha d+B)(\mu\beta_2-\beta_1(\mu+c))]$$

当$R_0=1$时$M_3=D^*$。因此，当$M_3>0, f(I_d^1)>0$时，$a>0, b>0$。由文献[11]可知，模型发生后向分支。

2.3　无病平衡点的稳定性

定理3　当$R_0<1$时，无病平衡点$P^0=(\frac{A}{\mu},0,0,0,\frac{B}{d})$在$\Omega$内局部渐近稳定。

证明　模型(1)在P^0处的雅可比矩阵为

$$J(P^0)=\begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\beta_1\frac{A}{\mu} & -\beta_2\frac{A}{\mu} & 0 \\ 0 & -(\mu+\sigma) & \beta_1\frac{A}{\mu} & \beta_2\frac{A}{\mu} & 0 \\ 0 & \sigma & -(\mu+\phi\frac{B}{\alpha d+B}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi\frac{B}{\alpha d+B} & -(\mu+c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & -d \end{pmatrix}$$

它的特征多项式为

$$(\lambda+\mu)(\lambda+d)(\lambda^3+m_2\lambda^2+m_1\lambda+m_0)=0$$

其中

$$m_2=3\mu+\sigma+c+\phi\frac{B}{\alpha d+B}$$

$$m_1=(\mu+\sigma)(\mu+\phi\frac{B}{\alpha d+B})+(\mu+\sigma)(\mu+c)+(\mu+c)(\mu+\phi\frac{B}{\alpha d+B})-\beta_1\sigma\frac{A}{\mu}$$

$$m_0=(\mu+\sigma)(\mu+c)(\mu+\phi\frac{B}{\alpha d+B})-\beta_1\sigma(\mu+c)\frac{A}{\mu}-\beta_2\sigma\phi\frac{A}{\mu}\frac{B}{(\alpha d+B)}$$

当$R_0<1$时，有$R_a<1$，则

$$m_1=(\mu+\sigma)(\mu+c)+(\mu+c)(\mu+\phi\frac{B}{\alpha d+B})+\frac{(\mu+\sigma)(\mu(\alpha d+B)+\phi B)(1-R_a)}{\alpha d+B}>0$$

$$m_0=\frac{(\mu+\sigma)(\mu+c)(\mu(\alpha d+B)+\phi B)(1-R_0)}{\alpha d+B}>0$$

通过计算得到$m_1m_2-m_0>0$。因此，由Hurwitz判据得到，当$R_0<1$时，定理3得证。

2.4　一致持续性分析

定理4　当$R_0>1$时，模型(1)是一致持续的，即在Ω内存在正数ε使得

$$\liminf_{t\to\infty}(E(t),I(t),I_d(t))\geqslant(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon)$$

成立。

证明　令

$$K=\{(S,E,I,I_d,M)\in\Omega: E>0, I>0, I_d>0\}$$

$$\partial K=\Omega\backslash K=\{(S,E,I,I_d,M)\in\Omega: E=0\text{或}I=0\text{或}I_d=0\}$$

易知，K为正不变集，∂K为K中的相对闭集。

令

$$M_\partial=\{\varphi\in\partial K:\Phi(t)_\varphi\in\partial K,\forall t\geqslant 0\},\Phi(t)_\varphi=\Phi(t,\varphi(t))$$

将模型(1)在初始条件$\Phi(0,\varphi)=\varphi$下的唯一解记为$\Phi(t,\varphi)$，下面证明

$$M_\partial=\left\{(S,0,0,0,M): S\leqslant\frac{A}{\mu}, M\leqslant\frac{kA+\mu B}{\mu d}\right\}$$

只需证明对于所有$t\geqslant 0$,有$E(t)$、$I(t)$、$I_d(t)$恒为零。为此,采用反证法。假设存在$t_0\geqslant 0$,使得该结论不成立,进行分类讨论:

① 当$E(t_0)>0, I(t_0)=0, I_d(t_0)=0$时,有$I'(t_0)=\sigma E>0$,则存在$\delta>0$,使得当$t_0\leqslant t\leqslant t_0+\delta$时,有$I'(t)>0$且$I(t)>0$,则$(S(t),E(t),I(t),I_d(t),M(t))\notin M_\partial$,与$M_\partial$的定义矛盾;

② 当$E(t_0)=0, I(t_0)>0, I_d(t_0)=0$时,有$E'(t_0)=\beta_1 SI>0, I_d'(t_0)=\phi\dfrac{M}{\alpha+M}I>0$,则存在$\delta>0$,使得当$t_0\leqslant t\leqslant t_0+\delta$时,有$E'(t)>0, I_d'(t)>0$且$E(t)>0, I_d(t)>0$,则$(S(t),E(t),I(t),I_d(t),M(t))\notin M_\partial$,与$M_\partial$的定义矛盾;

③ 当$E(t_0)=0, I(t_0)=0, I_d(t_0)>0$时,有$E'(t_0)=\beta_2 SI_d>0$,则存在$\delta>0$,使得当$t_0\leqslant t\leqslant t_0+\delta$时,有$E'(t)>0$且$E(t)>0$, 则$(S(t),E(t),I(t),I_d(t),M(t))\notin M_\partial$,与$M_\partial$的定义矛盾。

因此,$M_\partial=\left\{(S,0,0,0,M):S\leqslant\dfrac{A}{\mu},M\leqslant\dfrac{kA+\mu B}{\mu d}\right\}$,且无病平衡点$P^0\in M_\partial$。

下面证明当$R_0>1$时,$W^s(P^0)\cap X=\varnothing$成立。

若$(S(t),E(t),I(t),I_d(t),M(t))\in M_\partial$,则对于任意的$\varepsilon>0$,存在$T>0$,使得当$t\geqslant T$时,有

$$\frac{A}{\mu}-\varepsilon<S(t)<\frac{A}{\mu}+\varepsilon,\quad \frac{B}{d}-\varepsilon<M(t)<\frac{B}{d}+\varepsilon \tag{5}$$

接下来需要验证对于任意$\varphi\in K$和上述ε,有$\eta=\eta(\varepsilon)>0$,则

$$\limsup_{t\to\infty}\left\|\Phi(t)_\varphi-P^0\right\|\geqslant\eta$$

采用反证法进行证明。设存在$\omega\in K$,有$\limsup\limits_{t\to\infty}\left\|\Phi(t)_\omega-P^0\right\|<\eta$,则存在$t_0\geqslant 0$,使得当$t>t_0+T$,有下述不等式成立:

$$\left|S(t,\omega)-\frac{A}{\mu}\right|<\eta, 0<E(t,\omega)<\eta,\ 0<I(t,\omega)<\eta,\ 0<I_d(t,\omega)<\eta,\ \left|M(t,\omega)-\frac{B}{d}\right|<\eta \tag{6}$$

则式(5)成立,从而可得不等式组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\geqslant\beta_1(\dfrac{A}{\mu}-\varepsilon)I+\beta_2(\dfrac{A}{\mu}-\varepsilon)I_d-(\mu+\sigma)E\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\geqslant\sigma E-\phi(\dfrac{\alpha d}{\alpha d+(B+\varepsilon d)}-1)I-\mu I\\ \dfrac{\mathrm{d}I_d}{\mathrm{d}t}\geqslant\phi(\dfrac{\alpha d}{\alpha d+(B-\varepsilon d)}-1)I-(\mu+c)I_d\end{cases}$$

因此,考虑下面系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\beta_1(\dfrac{A}{\mu}-\varepsilon)I+\beta_2(\dfrac{A}{\mu}-\varepsilon)I_d-(\mu+\sigma)E\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\sigma E-\phi(\dfrac{\alpha d}{\alpha d+(B+\varepsilon d)}-1)I-\mu I\\ \dfrac{\mathrm{d}I_d}{\mathrm{d}t}=\phi(\dfrac{\alpha d}{\alpha d+(B-\varepsilon d)}-1)I-(\mu+c)I_d\end{cases}$$

该系统的雅可比矩阵为

$$J=J_1-\varepsilon G=(F-V)-\varepsilon\begin{bmatrix}0&\beta_1&\beta_2\\0&a&0\\0&b&0\end{bmatrix}$$

上述矩阵中的a、b分别为

$$a=\frac{\phi\alpha}{(\alpha+\frac{B}{d})(\alpha+\frac{B}{d}+\varepsilon)},\ b=\frac{\phi\alpha}{(\alpha+\frac{B}{d})(\alpha+\frac{B}{d}-\varepsilon)}$$

由$R_0>1\Leftrightarrow s(J_1)>0$,这里$s(J_1)=\max\{\mathrm{Re}\,\lambda:\mathrm{Re}\,\lambda$是$F-V$特征值的实部$\}$,对于足够小的$\varepsilon>0$,有$J=J_1-\varepsilon G$,使得$s(J)>0$,则矩阵$J$存在正的特征值。因此,由比较原理得到,当$t\to\infty$时,$(E(t),I(t),I_d(t))\to\infty$,与式(6)矛盾,此时$\limsup_{t\to\infty}\|\Phi(t)_\varphi-P^0\|\geqslant\eta$成立,则当$R_0>1$时,$W^s(P^0)\cap X=\varnothing$成立。又由$M_\partial$的定义可知,$P^0$是孤立不变集和非周期的。

根据文献[12]得到,当$R_0>1$时,模型(1)在Ω内是一致持续的。

2.5　退化模型的稳定性

若检测出阳性的动物则会对其进行隔离或扑杀,信息量的产生主要由固定的监测单位提供,即$\beta_2=k=0$,模型(1)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=A-\beta_1SI-\mu S\\ \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\beta_1SI-\sigma E-\mu E\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\sigma E-\phi\dfrac{M}{\alpha+M}I-\mu I\\ \dfrac{\mathrm{d}I_d}{\mathrm{d}t}=\phi\dfrac{M}{\alpha+M}I-cI_d-\mu I_d\\ \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=B-dM\end{cases}\tag{7}$$

模型(7)的可行域为

$$\Omega^*=\left\{(S,E,I,I_d,M)|S\geqslant0,E\geqslant0,I\geqslant0,I_d\geqslant0,0\leqslant S+E+I+I_d\leqslant\frac{A}{\mu},0\leqslant M\leqslant\frac{B}{d}\right\}$$

计算得出模型(7)的基本再生数$R_a=\dfrac{A\beta_1\sigma(\alpha d+B)}{\mu(\mu+\sigma)(\mu(\alpha d+B)+\phi B)}$,当$R_a<1$时,模型(7)存在无病平衡点$P_1^0=(\dfrac{A}{\mu},0,0,0,\dfrac{B}{d})$;当$R_a>1$时,模型(7)存在唯一的地方病平衡点$P_1^*=(S^*,E^*,I^*,I_d^*,M^*)$,其中

$$S^*=\frac{(\mu+\sigma)(\mu(\alpha d+B)+\phi B)}{\beta_1\sigma(\alpha d+B)},\quad E^*=\frac{\mu(\mu(\alpha d+B)+\phi B)(R_a-1)}{\beta_1\sigma(\alpha d+B)}$$

$$I^*=\frac{\mu(R_a-1)}{\beta_1},\quad I_d^*=\frac{\mu\phi B(R_a-1)}{\beta_1(\mu+c)(\alpha d+B)},\quad M^*=\frac{B}{d}$$

定理5　当$R_a\leqslant1$时,无病平衡点$P_1^0=(\dfrac{A}{\mu},0,0,0,\dfrac{B}{d})$在$\Omega^*$内全局渐近稳定。

证明　令

$$L(t)=S-S^0-S^0\ln\frac{S}{S^0}+E+\frac{\mu+\sigma}{\sigma}I$$

则$L(t)$沿模型(7)解的轨线求导得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t}&=(1-\frac{S^0}{S})(A-\beta_1SI-\mu S)+(\beta_1SI-\sigma E-\mu E)+\frac{\mu+\sigma}{\sigma}(\sigma E-\phi\frac{M}{\alpha+M}I-\mu I)\\&\leqslant\mu S^0(2-\frac{S^0}{S}-\frac{S}{S^0})+\frac{(\mu+\sigma)(\mu(\alpha d+B)+\phi B)}{\sigma}(R_a-1)I\end{aligned}$$

当$R_a \leqslant 1$时,$\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t} \leqslant 0$成立,当且仅当$P_1^0=(\frac{A}{\mu},0,0,0,\frac{B}{d})$时,$\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t}=0$。因此,由Lasalle不变集原理可知,当$R_a \leqslant 1$时,定理5得证。

定理6 当$R_a > 1$时,地方病平衡点$P_1^*=(S^*,E^*,I^*,I_d^*,M^*)$在$\Omega^*$内全局渐近稳定。

证明 由于模型(7)的其余方程都不含I_d,则去掉其第4个方程后的模型的第三加性复合矩阵为

$$J^{[3]}=\begin{bmatrix} A & -\phi\frac{\alpha}{(\alpha+M)^2}I & 0 & 0 \\ 0 & B & \beta_1 S & \beta_1 S \\ 0 & \sigma & C & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 I & D \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} A&=-(3\mu+\sigma+\beta_1 I+\phi\frac{M}{\alpha+M}) \\ B&=-(2\mu+\sigma+d+\beta_1 I) \\ C&=-(2\mu+d+\beta_1 I+\phi\frac{M}{\alpha+M}) \\ D&=-(2\mu+\sigma+d+\phi\frac{M}{\alpha+M}) \end{aligned}$$

根据文献[13],有$Z'(t)=J^{[3]}Z(t)$,则$J^{[3]}$的线性复合模型为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}Z_1}{\mathrm{d}t}=-(3\mu+\sigma+\beta_1 I+\phi\frac{M}{\alpha+M})Z_1-\phi\frac{\alpha}{(\alpha+M)^2}IZ_2 \\ \frac{\mathrm{d}Z_2}{\mathrm{d}t}=-(2\mu+\sigma+d+\beta_1 I)Z_2+\beta_1 S(Z_3+Z_4) \\ \frac{\mathrm{d}Z_3}{\mathrm{d}t}=\sigma Z_2-(2\mu+\sigma+\beta_1 I+\phi\frac{M}{\alpha+M})Z_3 \\ \frac{\mathrm{d}Z_4}{\mathrm{d}t}=\beta_1 IZ_3-(2\mu+\sigma+d+\phi\frac{M}{\alpha+M})Z_4 \end{cases} \tag{8}$$

模型(8)的右导数为

$$\begin{cases} D_+|Z_1| \leqslant -(3\mu+\sigma+\beta_1 I+\phi\frac{M}{\alpha+M})|Z_1|-\phi\frac{\alpha}{(\alpha+M)^2}I|Z_2| \\ D_+|Z_2| \leqslant -(2\mu+\sigma+d+\beta_1 I)|Z_2|+\beta_1 S(|Z_3|+|Z_4|) \\ D_+|Z_3| \leqslant \sigma|Z_2|-(2\mu+\sigma+\beta_1 I+\phi\frac{M}{\alpha+M})|Z_3| \\ D_+|Z_4| \leqslant \beta_1 I|Z_3|-(2\mu+\sigma+d+\phi\frac{M}{\alpha+M})|Z_4| \end{cases}$$

通过计算可得

$$\begin{aligned} D_+(|Z_1|+|Z_2|) &\leqslant -(2\mu+\sigma+\beta_1 I)(|Z_1|+|Z_2|)+\beta_1 S(|Z_3|+|Z_4|) \\ D_+(|Z_3|+|Z_4|) &\leqslant \sigma|Z_2|-(2\mu+\sigma+\phi\frac{M}{\alpha+M})(|Z_3|+|Z_4|) \end{aligned}$$

构造Lyapunov函数

$$V(t,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4)=\max(V_1,V_2)$$

其中

$$V_1=\frac{1}{E}(|Z_1|+|Z_2|),\ V_2=\frac{1}{I}(|Z_3|+|Z_4|)$$

因此

$$D_+V_1\leqslant\frac{\beta_1SI}{E}V_2-(2\mu+\sigma+\beta_1I+\frac{E'}{E})V_1$$

$$D_+V_2\leqslant\frac{\sigma E}{I}V_1-(2\mu+\sigma+\phi\frac{M}{\alpha+M}+\frac{I'}{I})V_2$$

由于函数 V 取 V_1、V_2 二者的最大值，因此，分以下两种情况讨论：

① 若 $V_1\geqslant V_2$，则当 $V=V_1$ 时，有

$$D_+V\leqslant\frac{\beta_1SI}{E}V-(2\mu+\sigma+\beta_1I+\frac{E'}{E})V\leqslant-\mu V\leqslant0$$

② 若 $V_1<V_2$，则当 $V=V_2$ 时，有

$$D_+V\leqslant\frac{\sigma E}{I}V-(2\mu+\sigma+\phi\frac{M}{\alpha+M}+\frac{I'}{I})V\leqslant-\mu V\leqslant0$$

由定理 4 可知，模型(7)一致持续，且对于任意的 $t\geqslant0$，$S(t)$、$E(t)$、$I(t)$、$M(t)$ 是非负有界的，因此存在两个正数 p、q，有

$$p(|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|+|Z_4|)\leqslant|V|\leqslant q(|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|+|Z_4|)$$

根据文献[14]得到，在模型(7)的基础上去掉第 4 个方程的模型的正平衡点是全局渐近稳定的，且由模型(7)的第 4 个方程可知，当 $t\to\infty$ 时，有 $I_d\to\frac{\phi M^*I^*}{(\mu+c)(\alpha+M^*)}$。因此，当 $R_a>1$ 时，定理 6 得证。

3　数值模拟

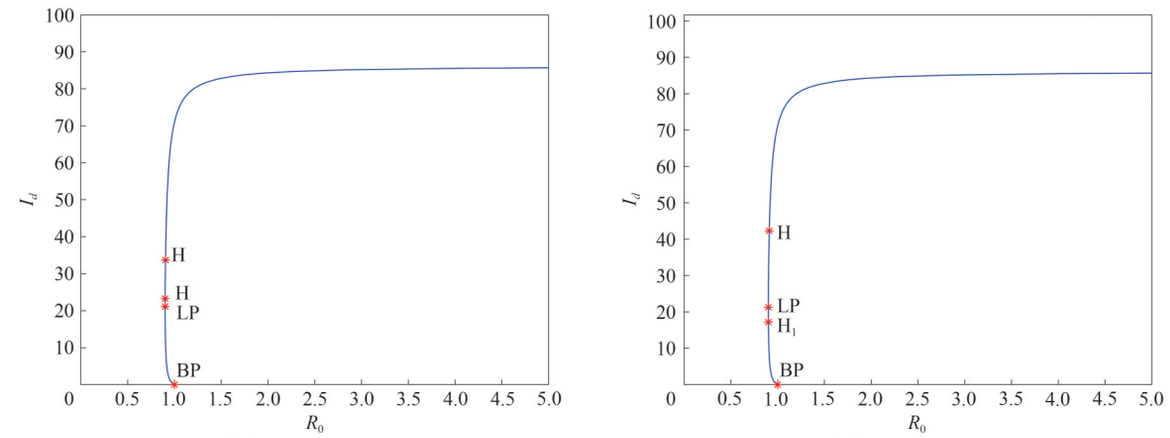
通过数值模拟对模型(1)正平衡点的个数予以验证，并分析其动力学特性。由于这部分主要研究模型的动力学性态，并不研究实际案例，因此参数选取主要参考已有布病的相关文献。根据文献[15]，将种群间的传播率 β_1 和 β_2 分别取为 2.46×10^{-5} 和 9.85×10^{-4}。根据文献[16]，将动物的自然死亡率 μ 取在 0.070 附近。根据文献[17]，将潜伏期的转移率 σ 取为 1。根据文献[18]，将染病动物的扑杀强度 c 取为 1.070。对于检测信息相关的参数 B、k、d，目前缺少实测数据，因此结合各参数的生物学意义，设定一组参数 $A=193$，$\beta_1=2.46\times10^{-5}$，$\beta_2=9.85\times10^{-4}$，$\sigma=1$，$\alpha=1$，$c=1.070$，$B=0.001$，$k=0.001$。将检测率 ϕ 作为分支参数，当 $\mu=0.072$，$d=0.800$ 时，绘制 I_d 随 R_0 变化的曲线图，结果如图 1(a)所示，当 $R_0<1$ 时，模型存在两个正平衡点，随着 R_0 的变化会出现两个 Hopf 分支点，这两个点的第一 Lyapunov 系数都为负，即周期轨道是稳定的。

当 $\mu=0.072$，$d=0.980$ 时，如图 1(b)所示，当 $0.9<R_0<1$ 时，模型存在两个正平衡点，发生后向分支，此时正平衡点和无病平衡点同时存在，模型会依次出现一个中性鞍点(H_1)和一个 Hopf 分支点，该分支点处的第一 Lyapunov 系数为正，即出现不稳定的周期轨道。

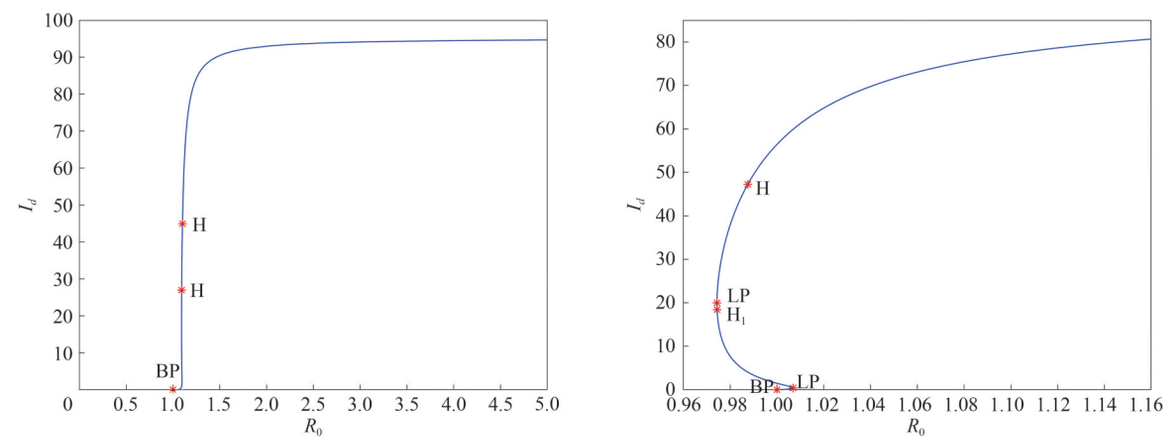
当 $\mu=0.065$，$d=0.800$ 时，如图 1(c)所示，当 $R_0>1$ 时，随着 R_0 的变化模型会出现两个 Hopf 分支点，这两个点处的第一 Lyapunov 系数为负，即周期轨道是稳定的。

当 $\mu=0.069$，$d=0.980$ 时，如图 1(d)所示，当 $R_0>1.007$ 时，模型存在 1 个地方病平衡点，当 $1<R_0<1.007$ 时，模型存在 3 个地方病平衡点，模型会出现一个中性鞍点(H_1)和一个 Hopf 分支点，该分支点的第一 Lyapunov 系数都为正，即周期轨道是不稳定的。

为进一步分析模型(1)的余维 2 分支，设定 A、β_1、β_2、σ、α、c、B、k 的取值不变，将 μ、ϕ 作为分支参数，当 $d=0.980$ 时，如图 2(a)所示，随着 μ、ϕ 的变化，模型会出现两个退化的 Hopf 分支 GH 点和 BT 分支点。图 2(b)为画圈区域的放大图。



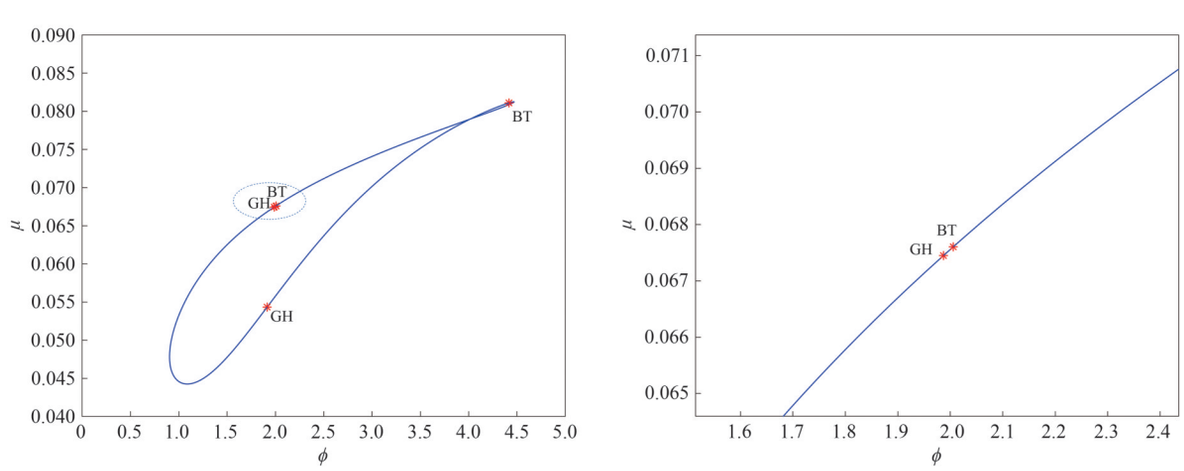
(a) μ=0.072, d=0.800　　(b) μ=0.072, d=0.980



(c) μ=0.065, d=0.800　　(d) μ=0.069, d=0.980

图1　不同μ、d值下的分支图

Fig. 1　Bifurcation diagrams for different values of μ and d



(a) BT分支和退化的Hopf分支　　(b) GH点和BT点放大图

图2　余维2分支图

Fig. 2　Two-codimension branching diagram

4　总结

本文考虑检测信息饱和对疾病传播的影响,提出将检测发现的染病种群所产生的信息作为有效信息,建立SEII$_d$M模型。首先给出模型的基本再生数R_0,并分析模型平衡点的存在性及其个数,然

后研究平衡点的稳定性和模型的分支现象以及持续性，最后通过数值模拟研究模型的性质。研究发现，当$R_0<1$时，模型出现两个地方病平衡点（后向分支），此时系统会出现双稳态，无病平衡态和疫病平衡态共存，且模型会产生Hopf分支，特别是出现超临界的Hopf分支，模型会发生稳定的周期振荡，这可能会导致当疫病处于振荡的最低点时，防控者会误认为布病开始消失，这会影响防控者对疫病真实流行水平的判断；当$R_0>1$时，模型出现1个或3个地方病平衡点，此时当模型出现亚临界Hopf分支时，疫病会出现不稳定的周期振荡，这不利于疫病的防控。此外，模型还会发生BT分支等复杂的动力学现象，这些现象说明检测措施会影响布病的传播动态，增加疫病防控的难度。若不考虑动物检测（$\phi=0$），此时模型仅有一个正平衡点和无病平衡点，且二者均全局渐近稳定，此时布病的传播动态不依赖初始状态，疫病的流行与否只取决于基本再生数R_0是否大于1。因此，相较于已有动物检测的研究，本文进一步揭示了检测信息饱和也是布病复杂传播的重要原因。结果表明，当重复信息增多，有效检测趋于饱和时，系统可能出现多稳态和周期振荡，且$R_0<1$也未必能够保证疫病消失。这说明布病防控不仅需要扩大检测范围，还应提高检测信息的有效利用率，并及时处置检测发现的染病动物。

参考文献：

[1] Zhang Z Z, Zhang J, Li L, et al. Quantifying the effectiveness of brucellosis control strategies in northern China using a mechanistic and data-driven model[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2024, 185: 115121.

[2] Wang X D, Wang K, Wang L, et al. Dynamics of a stochastic brucellosis model with vaccination and environmental pollution transmission[J]. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2024, 23(1): 299.

[3] Song C H, Song Z G. Global dynamics and optimal control strategies for the brucellosis model with environmental saturation infection: An assessment of severely affected provinces in China[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2025, 236: 379-410.

[4] Liu S J, Hu J J, Zhao Y F, et al. Prediction and control for the transmission of brucellosis in Inner Mongolia, China[J]. Scientific Reports, 2025, 15(1): 3532.

[5] Ni H, Dai H Y, Yang X W, et al. Effective intervention of brucellosis prevention in developing countries: A dynamic modelling study[J]. One Health, 2024, 19: 100840.

[6] 冯建武，侯强. 染病数量作为检测信息的布病动力学模型分析[J]. 云南大学学报（自然科学版），2020，42(5)：819-825.

[7] 贺建花，侯强. 基于动物疫病检测信息的随机模型分析[J]. 黑龙江大学自然科学学报，2022，39(1)：58-64.

[8] 王燕飞，侯强，胡红萍. 基于检测行为的动物布病模型的动力学分析[J]. 吉林大学学报（理学版），2023，61(6)：1251-1260.

[9] Nie Y B, Sun X D, Hu H P, et al. Bifurcation analysis of a sheep brucellosis model with testing and saturated culling rate[J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2023, 20(1): 1519-1537.

[10] 谢高燕，薛亚奎. 母婴抗体与疫苗保护的百日咳疾病模型分析[J]. 内蒙古大学学报（自然科学版），2026，57(3)：243-252.

[11] Castillo-Chavez C, Song B J. Dynamical models of tuberculosis and their applications[J]. Mathematical Biosciences

and Engineering,2004,1(2):361-404.

[12] Zhao X Q. Dynamical systems in population biology[M]. New York:Springer,2003:1-35.

[13] Driessche P V D,Li M,Muldowney J. Global stability of SEIRS models in epidemiology[J]. Canadian Applied Mathematics Quarterly,1999,7(4):409-425.

[14] Li M,Muldowney J S. A geometric approach to global-stability problems[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis,1996,27(4):1070-1083.

[15] Zhang J,Sun G Q,Sun X D,et al. Prediction and control of brucellosis transmission of dairy cattle in Zhejiang Province,China[J]. PLoS One,2014,9(11):e108592.

[16] Lolika P O,Modnak C,Mushayabasa S. On the dynamics of brucellosis infection in bison population with vertical transmission and culling[J]. Mathematical Biosciences,2018,305:42-54.

[17] Hou Q,Sun X D,Zhang J,et al. Modeling the transmission dynamics of sheep brucellosis in Inner Mongolia Autonomous Region,China[J]. Mathematical Biosciences,2013,242(1):51-58.

[18] Guo J M,Luo X F,Zhang J,et al. A mathematical model for ovine brucellosis during dynamic transportation of sheep,and its applications in Jalaid Banner and Ulanhot City[J]. Mathematics,2022,10(19):3436.

(责任编委 黄俊杰)

Dynamical Analysis of an Animal Brucellosis Model with Saturated Detection Rate

BAI Qingmei,HOU Qiang

(*School of Mathematics*, *North University of China*, *Taiyuan* 030051, *China*)

Abstract: To analyze the impact of animal detection on the transmission dynamics of brucellosis, considering information saturation caused by accumulated detection information, a multi-stage brucellosis transmission model with a saturated detection rate is established. First, the basic reproduction number is calculated, and the existence and stability of equilibria for the original model and its degenerate model are analyzed. Second, the conditions for the occurrence of backward bifurcation are analyzed, and the uniform persistence of the model is proved by contradiction and the comparison principle. Finally, we find from numerical simulations that the model produces complex bifurcation phenomena such as backward bifurcation and Hopf bifurcation, which verifies and further extends the theoretical results.

Key words: brucellosis; saturated detection rate; basic reproduction number; backward bifurcation; stability