文章编号:1674-2974(2026)02-0078-10 DOI:10.16339/j.cnki.hdxbzkb.2026158

# 基于非线性饱和控制器的悬臂梁主动振动控制研究

张博†,姚嘉晖,戴铮,陈丽
(长安大学 理学院,陕西 西安710064)

**摘 要**:基于饱和现象提出了一种基于2:1内共振的减小悬臂梁非线性振动的方法.以二阶主共振下悬臂梁与利用饱和现象设计的非线性饱和控制器所组成的内共振系统为研究对象,采用多尺度法分析得到闭环受控系统动力学方程的一阶近似解析解.采用龙格-库塔法得到了系统的数值解,使用李雅普诺夫稳定性理论判断解的稳定性,利用MATLAB程序对受控前后的悬臂梁系统响应进行对比,模拟了系统各参数以及时间延迟对饱和控制器性能与受控系统响应的影响情况.结果显示,该系统成功建立了基于内共振的振动能量传递通道,在取得合适的参数情况下,通过该通道,振动能量可以传递到饱和控制器,大幅降低悬臂梁系统响应.悬臂梁振幅不会随着外激力的增大而增大,很好地与饱和现象相吻合,验证了饱和控制器对于主动振动控制的有效性.讨论了解谐参数与时间延迟对悬臂梁受控系统稳定区域的影响.设计了悬臂梁饱和控制器实验平台,开展了控制实验,证明了饱和控制器的有效性.

**关键词**:多尺度法;内共振;非线性饱和控制器;时间延迟
**中图分类号**:O322;TB123 **文献标志码**:A

# Research on active vibration control of cantilever beam based on nonlinear saturation controller

ZHANG Bo†, YAO Jiahui, DAI Zheng, CHEN Li
(School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

**Abstract**: Based on the saturation phenomenon, a method for reducing the nonlinear vibration of a cantilever beam based on 2∶1 internal resonance is proposed. An internal resonance system consisting of a cantilever beam under the second-order main resonance and a nonlinear saturation controller designed with the saturation phenomenon is studied. The first-order approximate analytical solution of the closed-loop controlled system dynamics is obtained by multi-scale analysis. The numerical solution of the system is obtained through the Runge-Kutta method, its stability is evaluated using Lyapunov stability theory, and the response of the cantilever beam system before and after control is compared using the MATLAB program. The influence of system parameters and

* **收稿日期**:2024-09-26
**基金项目**:国家自然科学基金资助项目(11702033,52078419,12302110), National Natural Science Foundation of China(11702033, 52078419,12302110);陕西省自然科学基金资助项目(2022JQ-019), Natural Science Foundation of Shaanxi Province (2022JQ-019);中央高校基本科研业务费专项基金资助项目(300102123201,300102124818), Central University Basic Scientific Research Business Expenses (300102123201300021481);陕西省国家级大学生创新创业训练计划(X202410710603), Shaanxi Provincial College Students Innovation and Entrepreneurship Training Program (X202410710603)
**作者简介**:张博(1989—),男,陕西商洛人,长安大学副教授,博士
† 通信联系人,E-mail: zhang_bo@chd.edu.cn

time delay on the performance of the saturation controller and the response of the controlled system is simulated. A vibration energy transfer channel based on internal resonance is successfully established in this system. With appropriate parameter tuning, the vibration energy can be transferred to the saturation controller through this channel, and the response of the cantilever beam system can be greatly reduced. The vibration amplitude of the cantilever beam does not increase with the increase of the external excitation force, which is in good agreement with the saturation phenomenon and verifies the effectiveness of the proposed controller for active vibration control. Furthermore, the influence of harmonic parameters and time delay on the stability region of a cantilever beam-controlled system is discussed. A cantilever saturation controller experiment platform is designed, and a control experiment is carried out to confirm the effectiveness of the saturation controller.

**Key words**: multi-scale method; internal resonance; nonlinear saturation controller; time delay

饱和现象在非线性振动领域中具有重要的研究意义,尤其在振动控制系统中,饱和现象通过将能量从高阶模态转移至低阶模态,从而抑制系统的过度响应.这一现象表现为,在一定输入范围内,输出不会随输入变化而显著增大,而是趋于饱和状态.饱和现象的应用不仅能够有效减少系统的振动响应,还为非线性振动控制提供了重要的理论依据和技术手段.近年来,饱和现象的研究[1-4]不断深入,尤其是在内共振条件下,系统内各模态之间的能量交换和饱和现象的结合使用,已成为非线性振动控制领域中的重要研究方向.

Nayfeh 等[5]对船舶的俯仰和横摇运动进行了详细分析,发现当船体的俯仰频率约为滚转频率的2倍时,会发生一种特殊的内共振现象.在波浪频率接近俯仰频率的情况下,船体发生激烈的滚转振动.这一现象表明,在内共振条件下,系统的高阶模态和低阶模态之间存在能量交换机制,即能量桥.随着激励的增加,高阶模态的响应不会无限增大,而是通过能量桥将能量转移至低阶模态,从而有效抑制系统的过振响应.这个能量传递机制为如何在内共振条件下发挥饱和现象的作用提供了重要的参考.Sethna[6]是最早研究非线性饱和现象的学者之一,他通过对双自由度系统的研究,分析了在内共振和外部激励条件下,弱二次非线性对系统动态的影响.张新华等[7]进一步深入探讨了非线性振动系统中共振现象与能量传递的关系,揭示了在内共振状态下,能量通过不同模态之间的耦合进行传递,从而实现振动能量的抑制.王则等[8]研究了超临界输流管道的强迫振动情况,发现内共振条件下,系统会发生跳跃现象,并且在不同模态之间能量转移的现象也会随之出现.这种能量交换机制对于非线性振动系统的稳定性和控制具有重要意义.陈振藩[9]介绍了密集模态耦合的内共振饱和问题,进一步揭示了在多模态系统中,内共振和饱和现象结合使用的振动控制效应.Zhang 等[10]对 2∶1 内部谐振的 T 形梁微型陀螺仪的非线性振动性能进行了分析.郭翔鹰等[11]对压电纤维复合材料悬臂板在横向激励下的内共振特性进行了研究,发现内共振条件下的能量传递显著影响了系统的响应特性.Zhang 等[12-16]和顾伟等[17]用多尺度法得到了考虑预变形的旋转叶片在内共振条件下的演化方程,得到了系统的稳态响应,验证了响应的正确性,探究了各系统参数变化对系统响应的影响.陈柯帆等[18]对考虑模态振型影响的斜拉桥非线性内共振能量转换进行了研究.李晶等[19]研究了 1∶3 内共振条件下矩形薄板发生超谐波共振时的动力学响应.上述研究为饱和现象在非线性振动控制中的应用提供了理论支持,尤其在复杂系统中,内共振与饱和现象的结合使用显著提高了系统的稳定性.

近年来,基于饱和现象的控制策略得到了广泛的应用,如果能将两个单独的系统进行耦合,使其固有频率的比值为 2∶1,使得能量从需要控制的系统中流向可以人为设置参数的控制器系统中,就能将饱和现象应用于振动控制中,开发非线性饱和控制器.Golnaraghi[20]是最早使用内共振来控制系统中的瞬态振动的作者之一,她提出了一种用于悬臂梁的主动/被动振动控制器,当滑块的固有频率是基波束频率的 2 倍时,振动能量在波束和滑块之间来回传递.一旦光束的振动被滑块吸收并通过滑块阻尼消散,

即可实现控制.Kandil[21]采用非线性饱和控制策略,有效抑制了非恒定转速的旋转叶片系统的振动响应.随着对非线性振动控制方法的不断研究,Pai 等[22]进行了利用高阶内共振引起的饱和现象控制悬臂斜铝板稳态振动的研究,基于饱和现象设计了几种非线性减振器,并对其进行了分析,以证明其可行性和有效性,Ashour 和 Nayfeh[23]使用基于饱和现象的控制器来减轻模型的振动.采用高效的频率测量技术,Li 等[24]提出了一种非线性饱和控制器,该控制技术是通过一组特定的二次非线性减振器与被控对象耦合来实现的,利用控制器控制激励下的振动.这些研究表明,在非线性振动控制中使用基于饱和现象开发的控制器可以有效抑制系统振动.

在实际应用中,时间延迟对系统的稳定性影响是一个不可忽视的问题.宋洋等[25]研究了内共振条件下具有时间延迟的旋转叶片的振动控制器稳定性,发现在接近临界时滞的过程中控制效果逐渐减弱,超过临界时滞后系统发散.彭剑等[26]研究了带有时滞动力系统的响应情况与时滞存在时其他参数变化可能会导致的混沌运动,提出在设计饱和控制器时必须充分考虑时间延迟对控制效果的影响.

长期以来,对饱和控制器的研究主要侧重于对主系统与控制器非线性动力学响应进行分析,对饱和控制器参数与时间延迟对系统稳定性研究较少,本文以由悬臂梁与饱和控制器固有频率2∶1组成的内共振系统为研究对象,利用MATLAB程序对受控前后的悬臂梁的响应进行分析,验证了饱和控制器的有效性,研究了饱和控制器以及悬臂梁各参数变化以及时间延迟等因素对控制器性能和系统稳定性的影响情况,并探索了最佳控制参数范围,以确保系统的最佳稳定性和控制效果.设计并开展了饱和控制器实验,实现了较好的控制效果.

## 1 受控系统模型与运动微分方程

本文研究的基于非线性饱和控制器的悬臂梁振动控制系统如图1所示.

在悬臂梁两侧安装传感器和作动器.传感器测量位移信号并传输至计算机,经分析生成控制信号,输出至MFC控制器,通过其响应实现对悬臂梁振动的控制.

悬臂梁受控系统的非线性动力学模型由悬臂梁动力学方程与控制器动力学方程组成.

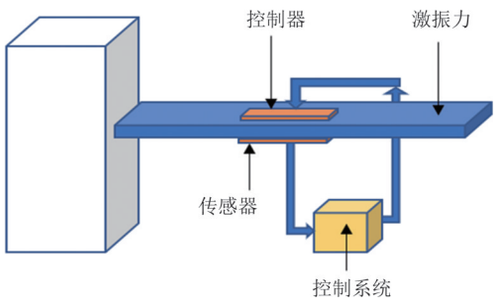



图1 包含传感器和控制器的悬臂梁示意图

Fig.1 Schematic of the cantilever beam containing sensors and controllers

在悬臂梁动力学方程之外列出假设的控制器方程:

$$\begin{aligned}&\ddot{u}_p + C_1{}^*\dot{u}_p + \omega_p^2 u_p = \gamma_1{}^*\dot{u}_p\dot{u}_s\\&\ddot{u}_s + C_2{}^*\dot{u}_s + \omega_s^2 u_s = F^*\cos\left((\omega_s + \varepsilon\sigma_2)t\right)\end{aligned} \tag{1}$$

在悬臂梁方程中加入控制项$-\varepsilon\gamma_2{}^*\dot{u}_p^2$,依据多尺度分析方法,对系统参数进行重刻度,$\varepsilon$为无量纲的小参数,在多尺度法中,进行重刻度可以将系统的行为分解为慢尺度(低频行为)和快尺度(高频行为).这样就可以从不同时间尺度上观察动力系统的演变规律,从而对复杂非线性系统做出更清晰的描述.

$$C_1{}^* = \varepsilon C_1, C_2{}^* = \varepsilon C_2, F^* = \varepsilon F, \gamma_1{}^* = \varepsilon\gamma_1, \gamma_2{}^* = \varepsilon\gamma_2 \tag{2}$$

得到修改后的方程组:

$$\begin{aligned}&\ddot{u}_p + \varepsilon C_1\dot{u}_p + \omega_p^2 u_p = \varepsilon\gamma_1\dot{u}_p\dot{u}_s\\&\ddot{u}_s + \varepsilon C_2\dot{u}_s + \omega_s^2 u_s = -\varepsilon\gamma_2\dot{u}_p^2 + \varepsilon F\cos\left[(\omega_s + \varepsilon\sigma_2)t\right]\end{aligned} \tag{3}$$

式中:$\omega_p$和$\omega_s$分别是控制器和悬臂梁的固有频率;$C_1$和$C_2$分别是控制器和悬臂梁的阻尼系数;$F$是悬臂梁所受外激力;$\sigma_2$为外激力固有频率与悬臂梁固有频率之间的解谐参数;$\gamma_1$为控制信号增益;$\gamma_2$为反馈信号增益.

图2用框图表示了控制器与悬臂梁的连接:

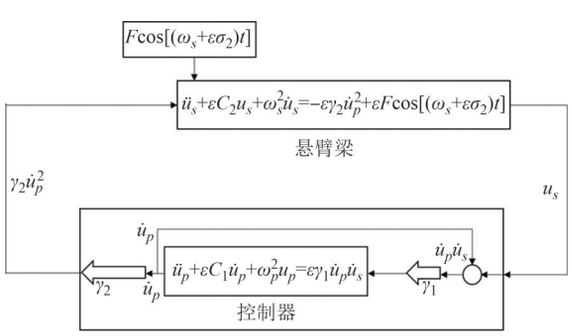



图2 受控系统框图示意图

Fig.2 Control process block diagram

## 2　多尺度法摄动分析

使用多尺度法,引入新的自变量,进行重刻度,其形式为:

$$T_0 = t,\quad T_1 = \varepsilon t,\quad T_2 = \varepsilon^2 t,\cdots \tag{4}$$

式中:$T$为拉伸的时间尺度;$t$为实时变量.式(3)的时间导数可以用两个时间尺度表示:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + O(\varepsilon^2)\\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1} + O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{5}$$

假设解采用形式:

$$\begin{aligned}u_p &= u_{p0}(T_0,T_1) + \varepsilon u_{p1}(T_0,T_1) + \cdots\\ u_s &= u_{s0}(T_0,T_1) + \varepsilon u_{s1}(T_0,T_1) + \cdots\end{aligned} \tag{6}$$

将假设的解(6)代入系统方程(3),并从$\varepsilon$的最低阶项开始收集相同阶的项,得到:

$$\frac{\partial^2 u_{p0}}{\partial t^2} + \omega_p^2 u_{p0} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 u_{s0}}{\partial t^2} + \omega_s^2 u_{s0} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 u_{p1}}{\partial t^2} + \omega_p^2 u_{p1} = -C_1\frac{\partial u_{p0}}{\partial t} + \gamma_1\frac{\partial u_{p0}}{\partial t}\frac{\partial u_{s0}}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u_{p0}}{\partial t\partial t\varepsilon} \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 u_{s1}}{\partial t^2} + \omega_s^2 u_{s1} = F\cos\left((\omega_s + \varepsilon\sigma_2)t\right) - C_2\frac{\partial u_{s0}}{\partial t} - \gamma_2\frac{\partial u_{p0}}{\partial t}\frac{\partial u_{p0}}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u_{s0}}{\partial t\partial t\varepsilon} \tag{10}$$

$u_{p0}$,$u_{s0}$可以设为:

$$u_{p0} = A_1(T_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_p T_0} + B_1(T_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p T_0} \tag{11}$$

$$u_{s0} = A_2(T_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_s T_0} + B_2(T_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_s T_0} \tag{12}$$

将式(11)、式(12)代入式(9)、式(10):

$$\begin{aligned}-\frac{\partial^2 u_{p1}}{\partial t^2} - \omega_p^2 u_{p1} =& -\mathrm{i}C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}T_0\omega_p}\omega_p A_1 + \mathrm{i}C_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T_0\omega_p}\omega_p B_1 -\\ & \mathrm{e}^{\mathrm{i}T_0\omega_p + \mathrm{i}T_0\omega_s}\gamma_1\omega_p\omega_s A_1A_2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}T_0\omega_p + \mathrm{i}T_0\omega_s}\gamma_1\omega_p\omega_s B_1A_2 +\\ & \mathrm{e}^{\mathrm{i}T_0\omega_p - \mathrm{i}T_0\omega_s}\gamma_1\omega_p\omega_s A_1B_2 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}T_0\omega_p - \mathrm{i}T_0\omega_s}\gamma_1\omega_p\omega_s B_1B_2 -\\ & 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T_0\omega_p}\omega_p A_1' + 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}D_0\omega_p}\omega_p B_1'\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}-\omega_s^2 u_{s1} - \frac{\partial^2 u_{s1}}{\partial t^2} =& \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T_0(\omega_s + \varepsilon\sigma_2)}F + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T_0(\omega_s + \varepsilon\sigma_2)}F +\\ & \mathrm{e}^{2\mathrm{i}T_0\omega_p}\gamma_2\omega_p^2 A_1^2 - 2\gamma_2\omega_p^2 A_1B_1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}T_0\omega_p}\gamma_2\omega_p^2 B_1^2 -\\ & \mathrm{i}C_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}T_0\omega_s}\omega_s A_2 + \mathrm{i}C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T_0\omega_s}\omega_s B_2 - 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T_0\omega_s}\omega_s A_2' +\\ & 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T_0\omega_s}\omega_s B_2'\end{aligned} \tag{14}$$

在式(13)(14)中引入解谐参数$\sigma_1$:

$$\omega_s = 2\omega_p + \sigma_1\varepsilon \tag{15}$$

代入变换公式:

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{1}{2}a_1(T_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1(T_1)},\ A_2 = \frac{1}{2}a_2(T_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2(T_1)}\\ B_1 &= \frac{1}{2}a_1(T_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_1(T_1)},\ B_2 = \frac{1}{2}a_2(T_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_2(T_1)}\end{aligned} \tag{16}$$

为了去除长期项的影响,避免共振导致系统的响应偏离正常行为,取得$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_p T_0}$和$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_s T_0}$系数项,使其等于0,可得:

$$-\mathrm{i}C_1\omega_p A_1 - 2\mathrm{i}\omega_p A_1' + \mathrm{e}^{\mathrm{i}T_1\sigma_1}\gamma_1\omega_p\omega_s B_1A_2 = 0 \tag{17}$$

$$-\mathrm{i}C_2\omega_s A_2 - 2\mathrm{i}\omega_s A_2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}T_1\sigma_1}\gamma_2\omega_p^2 A_1^2 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T_1\sigma_2}F = 0 \tag{18}$$

将式(16)代入式(17)(18)得到式(19)(20):

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\mathrm{i}C_1\omega_p a_1\cos\varphi_1 + \frac{1}{4}\gamma_1\omega_p\omega_s a_1a_2 +\\ &\cos(T_1\sigma_1 - \varphi_1 + \varphi_2) + \frac{1}{2}C_1\omega_P a_1\sin\varphi_1 +\\ &\frac{1}{4}\gamma_1\omega_p\omega_s a_1a_2\sin(T_1\sigma_1 - \varphi_1 + \varphi_2) -\\ &\mathrm{i}\omega_p\cos\varphi_1 a_1' + \omega_p\sin\varphi_1 a_1' + \omega_p a_1\cos\varphi_1\varphi_1' +\\ &\mathrm{i}\omega_p a_1\sin\varphi_1\varphi_1' = 0\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}F\cos(T_1\sigma_2) + \frac{1}{4}\gamma_2\omega_p^2\alpha_1^2\cos(T_1\sigma_1 - \varphi_1 + \varphi_2) -\\ &\frac{1}{2}\mathrm{i}C_1\omega_s a_2\cos\varphi_2 + \frac{1}{2}\mathrm{i}F\sin(T_1\sigma_2) -\\ &\frac{1}{4}\mathrm{i}\gamma_2\omega_p^2\alpha_1^2\sin(T_1\sigma_1 - 2\varphi_1) +\\ &\frac{1}{2}C_2\omega_s a_2\sin\varphi_2 - \mathrm{i}\omega_s\cos\varphi_2 a_2' + \omega_s\sin\varphi_2 a_2' +\\ &\omega_s a_2\cos\varphi_2\varphi_2' + \mathrm{i}\,\omega_s a_2\sin\varphi_2\varphi_2' = 0\end{aligned} \tag{20}$$

对式(19)(20)进行实、虚部分离得到:

$$\varphi_1'\omega_p a_1\cos\varphi_1 + \frac{1}{4}\gamma_1\omega_p\omega_s a_1a_2\cos(T_1\sigma_1 - \varphi_1 + \varphi_2) + a_1'\omega_p\sin\varphi_1 + \frac{1}{2}C_1\omega_P a_1\sin\varphi_1 = 0 \tag{21}$$

$$\frac{1}{2}F\cos(T_1\sigma_2) + \frac{1}{4}\gamma_2\omega_P^2 a_1^2\cos(T_1\sigma_1 - \varphi_1) + \varphi_2'\omega_S a_2\cos\varphi_2 + a_2'\omega_s\sin\varphi_2 + \frac{1}{2}C_2\omega_s a_2\sin\varphi_2 = 0 \tag{22}$$

$$-a_1'\omega_p\cos\varphi_1 - \frac{1}{2}C_1\omega_p a_1\cos\varphi_1 + \varphi_1'\omega_p a_1\sin\varphi_1 + \frac{1}{4}\gamma_1\omega_p\omega_s a_1a_2\sin(T_1\sigma_1 - \varphi_1 + \varphi_2) = 0 \tag{23}$$

$$-a_2'\omega_s\cos\varphi_2-\frac{1}{2}C_2\omega_s a_2\cos\varphi_2+\frac{1}{2}F\sin(T_1\sigma_2)-\frac{1}{4}\gamma_2\omega_p^2a_1^2\sin(T_1\sigma_1-2\varphi_1)+\varphi_2'\omega_s a_2\sin\varphi_2=0 \tag{24}$$

从而得到关于$a_1',a_2',\varphi_1',\varphi_2'$的解析式,最终得到受控系统的演化方程:

$$\begin{aligned}a_1'&=-\frac{1}{2}C_1a_1+\frac{1}{4}\gamma_1\omega_s a_1a_2\sin\phi_1\\ a_2'&=-\frac{1}{2}C_2a_2+\frac{F\sin\phi_2}{2\omega_s}-\frac{\gamma_2\omega_p^2a_1^2\sin\phi_1}{4\omega_s}\\ \phi_1'&=\sigma_1-\frac{F\cos\phi_2}{2\omega_s a_2}-\frac{\gamma_2\omega_p^2a_1^2\cos\phi_1}{4\omega_s a_2}+\frac{1}{2}\gamma_1\omega_s a_2\cos\phi_1\\ \phi_2'&=\sigma_2+\frac{F\cos\phi_2}{2\omega_s a_2}+\frac{\gamma_2\omega_p^2a_1^2\cos\phi_1}{4\omega_s a_2}\end{aligned} \tag{25}$$

其中$\phi_1'=\sigma_1+\varphi_2'-2\varphi_1',\phi_2'=\sigma_2-\varphi_2'$

令方程(25)的左侧等于0.采用Mathematica进行演化方程的求解和分析.研究该受控系统的稳态响应情况.

2∶1内共振时的解析解分为单模态解和双模态解.

1)单模态解:

$$a_1=0,a_2=\frac{F}{\sqrt{C_2^2+4\sigma_2^2\omega_s}} \tag{26}$$

单模态解对应悬臂梁的线性响应.其中$a_1$为饱和控制器响应,$a_2$为悬臂梁响应.

2)双模态解:

消除$a_2,\phi_1,\phi_2$得到关于$a_1$的响应方程:

$$\Lambda_1a_1^4+\Lambda_2a_1^2+\Lambda_3=0 \tag{27}$$

其中:

$$\Lambda_1=\frac{\gamma_1^2\gamma_2^2\omega_p^4}{64} \tag{28}$$

$$\Lambda_2=-(\sigma_2^2+\sigma_1\sigma_2)\frac{\gamma_2\omega_p^2\gamma_1\omega_s}{4\omega_s}+\frac{\gamma_2\omega_p^2\gamma_1\omega_sC_2C_1}{8\omega_s} \tag{29}$$

$$\Lambda_3=\frac{C_1^2C_2^2}{4}+C_1^2\sigma_2^2-\gamma_1^2\frac{F^2}{16} \tag{30}$$

最终得到:

$$\begin{aligned}a_1&=\sqrt{\frac{-\Lambda_2\pm\sqrt{\Lambda_2{}^2-4\Lambda_1\Lambda_3}}{2\Lambda_1}}\\ a_2&=\frac{2\sqrt{C_1^2+(\sigma_1+\sigma_2)^2}}{\gamma_1\omega_s}\end{aligned} \tag{31}$$

双模态解对应系统的受控响应.

在考虑时间延迟效应下,非线性控制项会发生变化,系统原方程调整为:

$$\begin{aligned}&\ddot{u}_p+\varepsilon C_1\dot{u}_p+\omega_p^2u_p=\varepsilon\gamma_1\dot{u}_p\dot{u}_s\\ &\ddot{u}_s+\varepsilon C_2\dot{u}_s+\omega_s^2u_s=-\varepsilon\gamma_2\dot{u}_p^2(t-\tau)+\varepsilon F\cos[(\omega_s+\varepsilon\sigma_2)t]\end{aligned} \tag{32}$$

最终得到考虑时间延迟的受控系统的演化方程:

$$\begin{aligned}a_1'&=-\frac{1}{2}C_1a_1+\frac{1}{4}\gamma_1\omega_s a_1a_2\sin\phi_1\\ a_2'&=-\frac{1}{2}C_2a_2+\frac{F\sin\phi_2}{2\omega_s}-\frac{\gamma_2\omega_p^2a_1^2\sin(\phi_1+2\tau\omega_p)}{4\omega_s}\\ \phi_1'&=\sigma_1-\frac{F\cos\phi_2}{2\omega_s a_2}-\frac{\gamma_2\omega_p^2a_1^2\cos(\phi_1+2\tau\omega_p)}{4\omega_s a_2}+\frac{1}{2}\gamma_1\omega_s a_2\cos\phi_1\\ \phi_2'&=\sigma_2+\frac{F\cos\phi_2}{2\omega_s a_2}+\frac{\gamma_2\omega_p^2a_1^2\cos(\phi_1+2\tau\omega_p)}{4\omega_s a_2}\end{aligned} \tag{33}$$

本文使用李雅普诺夫稳定性理论判断演化方程解的稳定性.

## 3 算例分析与结果讨论

本节开展算例研究.若没有特殊说明,采用的参数如下:$\sigma_1$=0,$\sigma_2$=0.5,$F$=8 N,$\varepsilon$=0.01,$C_1$=0.1,$C_2$=0.2,$\omega_p$=2 Hz,$\omega_s$=4 Hz,$\gamma_1$=0.3,$\gamma_2$=0.3.

图3显示了无控制器和有控制器的悬臂梁系统响应时间历程.有控制器的系统稳态振幅比没有控制器的系统稳态振幅缩小了约45.46%.这表明了饱和控制器的有效性.

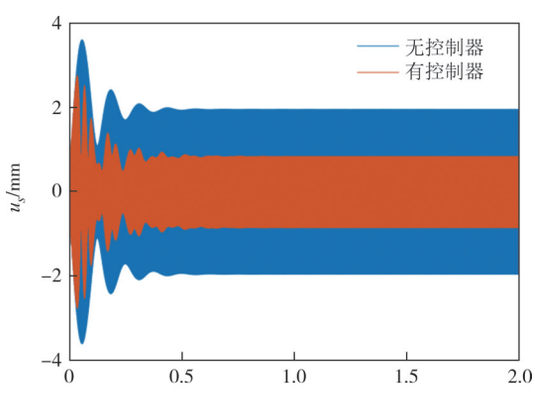



图3 悬臂梁响应的时间历程

Fig.3 Time history of the cantilever response

图 4 展示了悬臂梁系统受控前后响应随控制信号增益$\gamma_1$的变化.当$\gamma_1$<4.4时,受控与无控情况下的响应均稳定在单模态解,表明控制器在$\gamma_1$较小时无效;当$\gamma_1$>4.4后,受控响应随$\gamma_1$单调递减并稳定在双模态解,说明控制器在此区间发挥了振动控制作用.

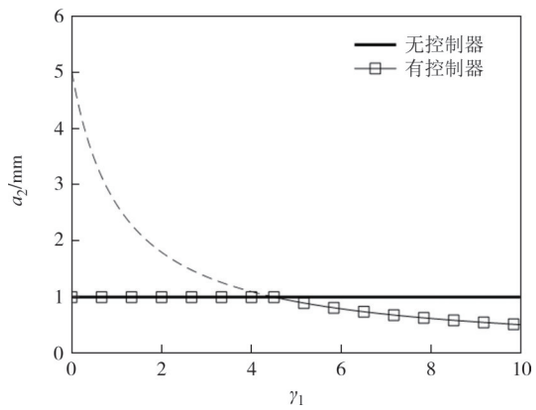



图 4　悬臂梁响应$a_2$随控制信号增益$\gamma_1$的变化曲线

Fig.4　The amplitude response $a_2$ of the cantilever beam varies with the control signal gain $\gamma_1$

图 5 展示了悬臂梁系统受控前后响应随控制器阻尼系数$C_1$的变化.当$C_1$<1.92时,受控响应稳定在双模态解,并随$C_1$单调递增,且低于无控响应,表明控制器发挥了振动控制作用;当$C_1$>1.92时,响应稳定在单模态解,因阻尼过大导致控制器失效.

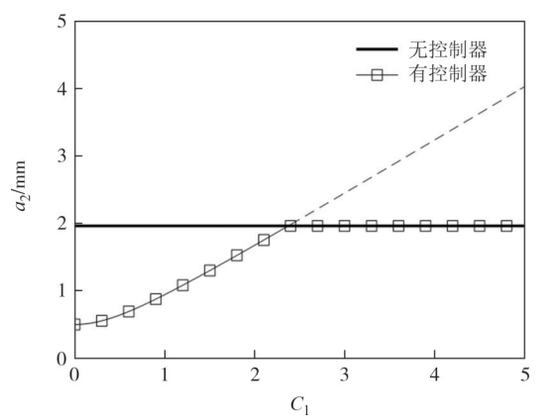



图 5　悬臂梁响应$a_2$随控制器阻尼系数$C_1$的变化曲线

Fig.5　The variation of the amplitude response $a_2$ of the cantilever beam with the damping coefficient $C_1$ of the controller

图 6 绘制了受控悬臂梁系统在$C_1$-$\gamma_1$平面内的稳态区域图,系统参数选在不同颜色的区域上,悬臂梁响应会稳定在不同的解.

本文中所有稳态区域图的不同颜色代表的含义为:$A$(绿色):双模态解稳定,单模态解不稳定;$B$(红色):单模态解稳定,双模态解不稳定;$C$(黄色):单双模态解均稳定;$D$(蓝色):单双模态解均不稳定.

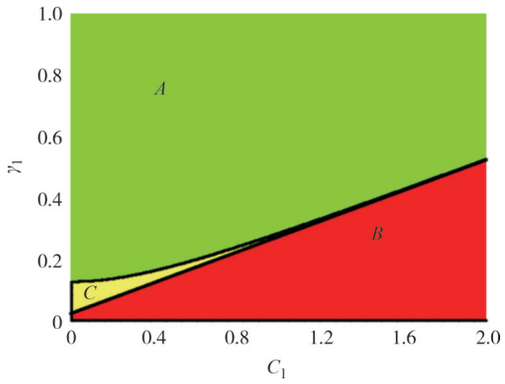



图 6　悬臂梁响应$a_2$随$\gamma_1$和$C_1$变化稳态区域图

Fig.6　Steady state region diagram of the cantilever beam response $a_2$ with gain $\gamma_1$ and $C_1$

图 7 展示了控制器参数对悬臂梁振动的控制效果,其中$x$轴为控制信号增益$\gamma_1$,$y$轴为控制器阻尼系数$C_1$,$z$轴为悬臂梁响应.根据图 6,当曲面位于平面之上时,响应稳定在平面,即单模态解或无控状态;当曲面位于平面之下时,响应稳定在曲面,表明控制器发挥作用.控制性能随$\gamma_1$和$C_1$的取值而变化.

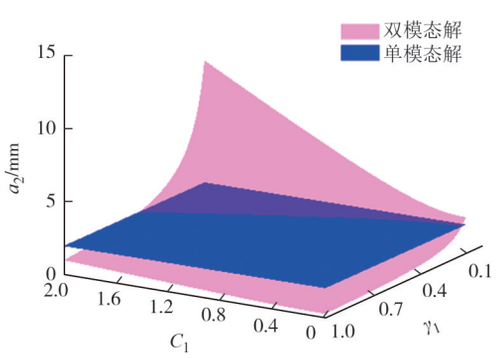



图 7　悬臂梁响应$a_2$随$\gamma_1$和$C_1$变化三维曲面图

Fig.7　The variation of the amplitude response $a_2$ of the cantilever beam with $\gamma_1$ and $C_1$

图 8 展示了悬臂梁系统受控前后响应随外激力$F$的变化.当$F$<1.31时,受控与无控响应一致,控制器无效;当$F$>1.31时,受控响应不再随$F$增大而增加,多余能量从悬臂梁模态流向控制器,验证了饱和控制器的有效性.

图 9 展示了不同解谐参数$\sigma_1$影响下的受控系统稳态区域图.随着$\sigma_1$减小,单双模态解均不稳定的$D$(蓝色)区域出现,单模态解稳定的$B$(红色)区域扩大.$\sigma_1$的存在会缩小双模态解稳定的$A$(绿色)区域,降低控制器性能.

在图 9 中分别在稳定区域与不稳定区域取点($C_1$=1, $\gamma_1$=0.6)对原方程进行数值积分,绘制时间历

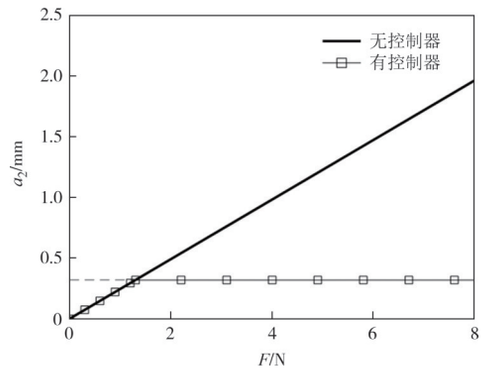
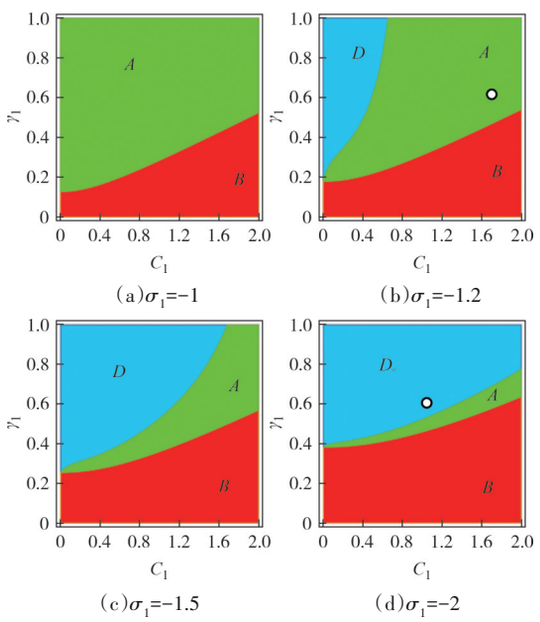



图 8 悬臂梁响应 $a_2$ 随外激力 $F$ 的变化曲线

Fig.8 Variation curves of amplitude response $a_2$ of cantilever beam with external excitation force $F$




(a)$\sigma_1$=−1 (b)$\sigma_1$=−1.2

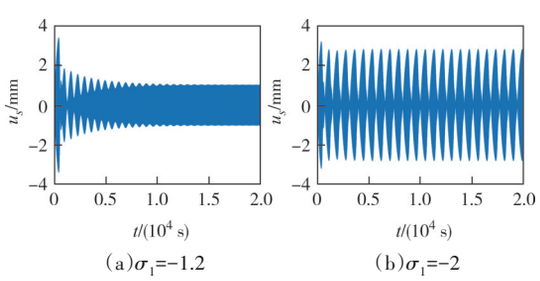
(c)$\sigma_1$=−1.5 (d)$\sigma_1$=−2

图 9 不同解谐参数 $\sigma_1$ 下受控系统稳态区域图

Fig.9 Steady state region diagrams of controlled system with different analytic harmonic parameter $\sigma_1$

程(图 10),可以看出位于不稳定区域的点处的悬臂梁响应变得不再稳定,失去控制效果.

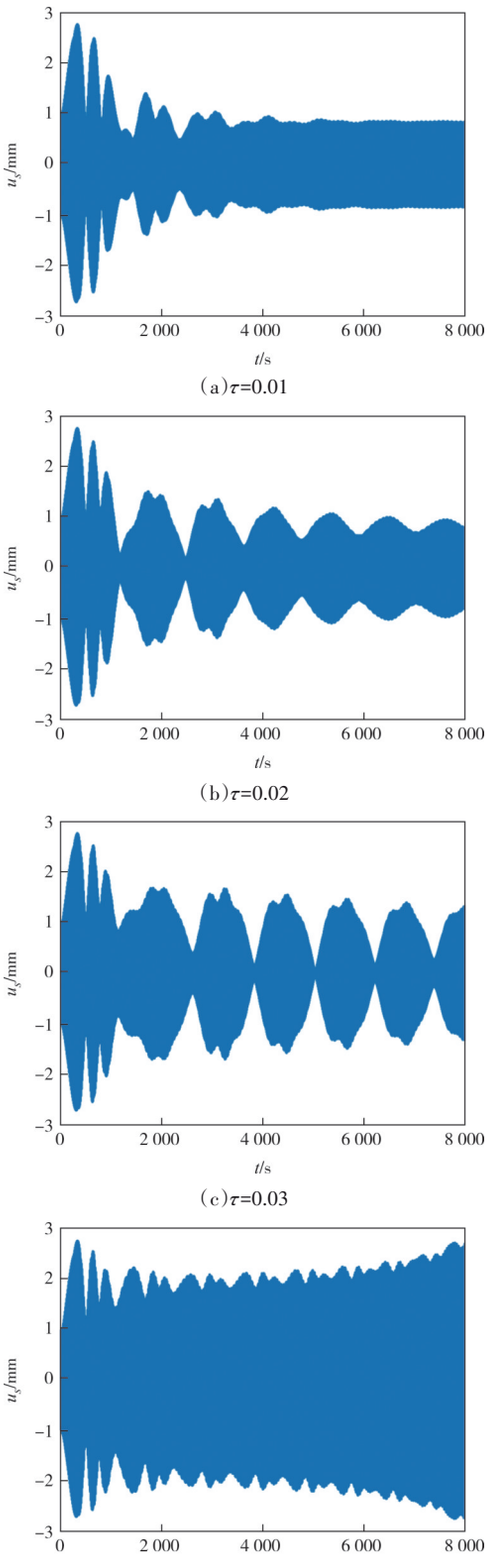
在实际控制系统中,由于通信、传感器和执行器等硬件的限制,控制信号常常会经历一定的时间延迟,图 11 绘制了不同时间延迟 $\tau$ 下悬臂梁的响应时间历程.随着 $\tau$ 的增大,控制效果逐渐减弱,当 $\tau$>0.04 时,受控系统振幅出现振荡发散,失去控制效果.




(a)$\sigma_1$=−1.2 (b)$\sigma_1$=−2

图 10 稳定区域与不稳定区域悬臂梁系统响应时间历程

Fig.10 Response time history of cantilever beam system in stable region and unstable region




(a)$\tau$=0.01

(b)$\tau$=0.02

(c)$\tau$=0.03

(d)$\tau$=0.04

图 11 不同 $\tau$ 下悬臂梁响应时间历程图

Fig.11 Response time history diagrams of cantilever beam under different $\tau$

图 12 绘制了不同时间延迟下受控系统在 $\gamma_1$–$C_1$ 平面内的稳定区域分布情况.从图中可见随着时滞量增大,双模态解稳定的 $A$ 区域(绿色)缩小,不稳定区域 $D$(蓝色)的边界逐渐倾斜,不稳定区域扩大.如果系统参数取在这一部分,系统响应则会如图 11(d)所示,变得不再稳定甚至振动幅度增大.故随着时滞量的增大,控制器参数需要在能够让系统进入稳态响应的绿色范围内选择.

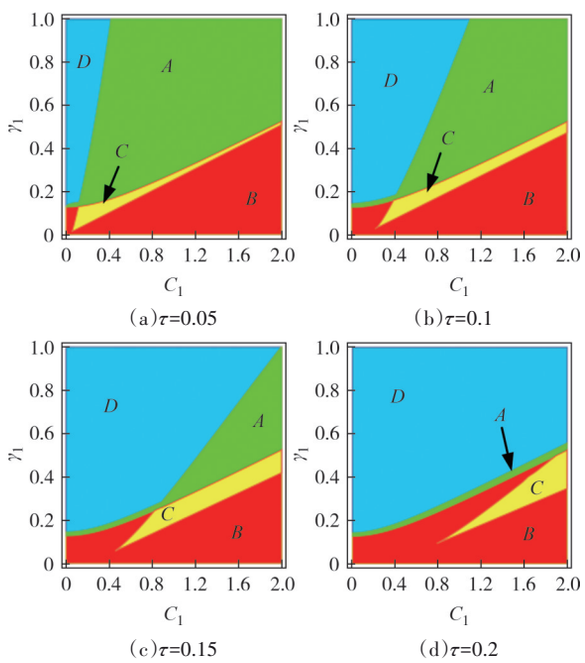



图 12　不同 $\tau$ 下受控系统稳态区域图

Fig.12　Steady state region diagrams of controlled system under different $\tau$

图 13 绘制了不同解析参数 $\sigma_1$ 下时间延迟对受控系统 $\gamma_1$–$C_1$ 平面的稳定区域分布情况.由图可见,随着解谐参数 $\sigma_1$ 的增大,不稳定区域 $D$(蓝色)增大,稳定区域逐渐被压缩.

## 4　饱和控制器设计与实验

为验证本文饱和控制器理论的正确性,设计了悬臂梁饱和控制器系统实验平台,如图 14 所示.平台由支架、铝制悬臂梁、MFC 压电片、激光位移传感器、电压放大器、采集卡、电源等组成.

实验思路:由压电片施加正弦电压至悬臂梁模拟外激力,利用激光位移传感器采集悬臂梁特定点的挠度与速度等初值,将其代入控制算法中(悬臂梁的其他参数均通过测量计算得到),计算得出需要施加的控制力,通过已知的 MFC 力电关系转换得到相

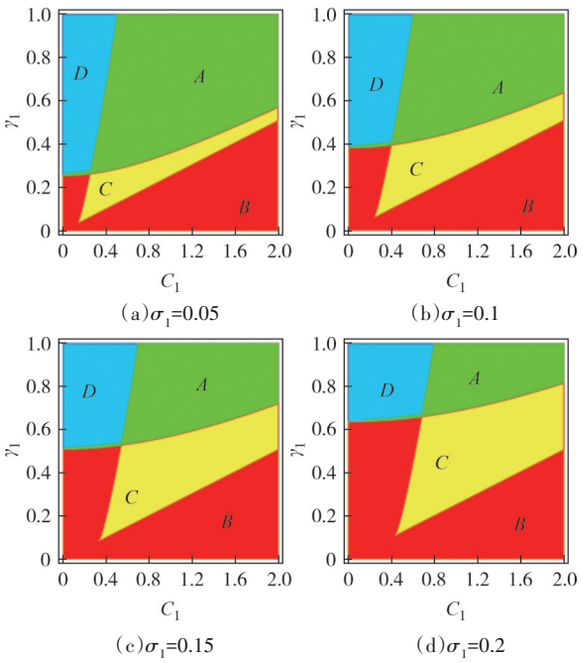



图 13　不同 $\sigma_1$ 下受控系统稳态区域图($\tau$ = 0.02)

Fig.13　Steady state region diagrams of controlled system with different $\sigma_1$($\tau$ = 0.02)

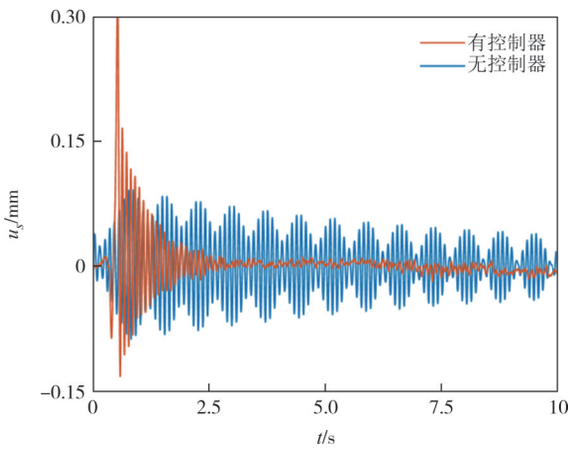



图 14　悬臂梁饱和控制器实验平台

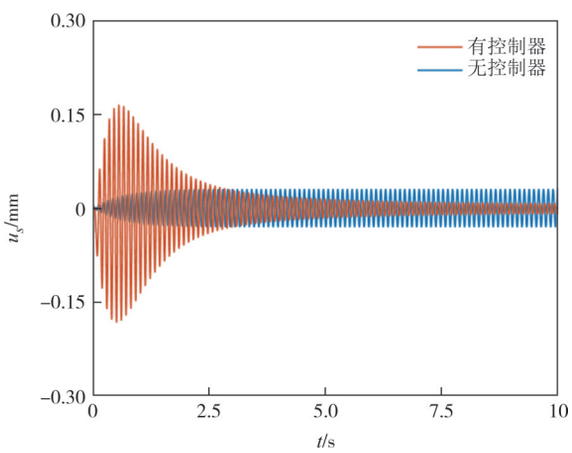
Fig.14　Cantilever beam saturation controller system

对应的电压值,将其施加至压电片,控制悬臂梁的振动,循环此过程,即可完成饱和控制器的振动控制实验.实验中的实际参数如下:$\sigma_1$=0,$\sigma_2$=0,$F$=2.53 N,$C_1$=2,$\omega_p$=4.865 Hz,$\omega_s$=9.73 Hz,$\gamma_1$=0.3,$\gamma_2$=2,梁密度 $\rho$=2 684.1 kg/m$^3$,弹性模量 $E$=68.5 GPa,泊松比 $\nu$=0.3,梁的长、宽、厚度分别为 400 mm、20 mm、2 mm.

如图 15 所示,启动程序同时施加正弦激励与控制力,运行 10 s,得到悬臂梁响应时间历程图,响应相较于只施加正弦激励的情况明显减小,与代入同样参数的理论结果较为吻合,证明了饱和控制器理论的正确性.




(a)实验值




(b)理论值

图 15 悬臂梁响应时间历程图

Fig.15 Response time history diagrams of cantilever beam

## 5 结 论

本文研究了带饱和控制器的悬臂梁闭环系统,采用多尺度法得到了2:1内共振条件下受控系统的演化方程.探究了系统的动力学行为,比较了有控制器和无控制器对悬臂梁振动的影响,研究了饱和控制器的一些关键参数对悬臂梁响应的控制情况.对受控系统的稳定性进行了分析,并且开展了饱和控制器振动控制实验,证明了饱和控制器的有效性.得到如下结论:

1) 内共振闭环系统会建立基于饱和现象的能量传递通道,不断增大受控系统所受到的外激力$F$,悬臂梁的响应在达到一定阈值后不会继续增大,多余的能量会流向控制器,说明饱和控制器具有良好的振动控制效果.

2) 在合适的系统参数下,饱和控制器能够显著降低悬臂梁的振动响应.若控制器阻尼$C_1$过大或者控制信号增益$\gamma_1$过小会减弱振动控制效果.而控制信号增益$\gamma_1$过大的话,则会使控制信号超出控制器的极限,使系统失控.解谐参数$\sigma_1$对系统稳定性有明显的影响,$\sigma_1$的存在会导致悬臂梁稳定区域减小.需要在具体实验中对控制器进行调试,以达到最佳的控制效果.

在更复杂的结构(如多自由度系统或大规模结构)中,饱和控制器还存在很多局限性,例如存在时间延迟的情况下,饱和控制器对高频率的系统控制效果较差,又例如如何在减小受控系统响应的同时把控制器响应控制在一个合理的范围内,故如何推广该方法并有效实现控制,仍是未来研究的一个挑战.

3) 存在时间延迟的情况下会导致相位滞后,不稳定区域增大,甚至加剧了悬臂梁响应.可以通过调整系统参数至稳定区域来降低时间延迟的影响,或者考虑延迟补偿策略,抵消延迟带来的相位滞后,改善稳定性.

4) 开展饱和控制器实验后,悬臂梁的振幅较未控制有减小,说明饱和控制器具有一定的实用性,之后会进一步优化实验,实现更稳定、更显著的控制效果.

## 参考文献

[1] 王威涛, 南国防. 基于哈密尔顿原理和谐波平衡法研究带冠叶片的振动特性[J]. 动力工程学报, 2020, 40(2): 117-122.
WANG W T, NAN G F. Study on vibration characteristics of shrouded blades based on Hamilton principle and harmonic balance method [J]. Journal of Chinese Society of Power Engineering, 2020, 40(2): 117-122.(in Chinese)

[2] 沈国际, 官凤娇, 边子方, 等. 裂纹叶片非线性振动响应理论分析与实验验证[J]. 国防科技大学学报, 2021, 43(6): 127-134.
SHEN G J, GUAN F J, BIAN Z F, et al. Theoretical analysis and experimental verification of nonlinear vibrational response of cracked blade [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2021, 43(6): 127-134.(in Chinese)

[3] GUO X Y, ZHANG W. Nonlinear vibrations of a reinforced composite plate with carbon nanotubes[J]. Composite Structures, 2016, 135: 96-108.

[4] 李红影, 谢里阳, 郭星辉. 壳板凸肩叶片的非线性振动特性[J]. 工程力学, 2013, 30(2): 340-347.
LI H Y, XIE L Y, GUO X H. Nonlinear vibration characteristics of shrouded blade for cylindrical panel[J]. Engineering Mechanics,

2013, 30(2): 340-347.(in Chinese)

[5] NAYFEH A H, MOOK D T, MARSHALL L R. Nonlinear coupling of pitch and roll modes in ship motions [J]. Journal of Hydronautics, 1973, 7(4): 145-152.

[6] SETHNA P R. Vibrations of dynamical systems with quadratic nonlinearities [J]. Journal of Applied Mechanics, 1965, 32(3): 576-582.

[7] 张新华, 曹保锋. 非线性振动系统的能量传递机理[J]. 应用力学学报, 2013, 30(6): 839-844.
ZHANG X H, CAO B F. Mechanism of energy transfer in nonlinear vibratory systems [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2013, 30(6): 839-844.(in Chinese)

[8] 王则, 耿佳, 李满枝. 2:1内共振下超临界输流管道的强迫振动[J]. 科学技术与工程, 2023, 23(35): 14916-14922.
WANG Z, GENG J, LI M Z. Forced vibration of supercritical fluid-conveying pipe with 2:1 internal resonance [J]. Science Technology and Engineering, 2023, 23(35): 14916-14922.(in Chinese)

[9] 陈振藩. 非线性振动系统的响应饱和现象[J]. 振动、测试与诊断, 1991, 11(2): 1-6.
CHEN Z F. Response saturation phenomenon of nonlinear vibration system [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 1991, 11(2): 1-6.(in Chinese)

[10] ZHANG K P, ZHU J, HAO S Y, et al. Nonlinear vibration and performance analysis of a hybrid-driving T-beam micro-gyroscope with 2:1 internal resonance [J]. Nonlinear Dynamics, 2023, 111(12): 10835-10857.

[11] 郭翔鹰, 段梦烨. 不同阶外激励下压电纤维复合材料悬臂板的内共振特性分析[J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(5):23-32.
GUO X Y, DUAN M Y. The influence of different order excitations on responses of piezoelectric fibre composite plates with multi inner resonance [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(5):23-32.(in Chinese)

[12] ZHANG B, ZHANG Y L, YANG X D, et al. Saturation and stability in internal resonance of a rotating blade under thermal gradient[J]. Journal of Sound and Vibration, 2019, 440:34-50.

[13] ZHANG B, LI Y M. Nonlinear vibration of rotating pre-deformed blade with thermal gradient [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 86(1): 459-478.

[14] ZHANG B, DING H, CHEN L Q. Super-harmonic resonances of a rotating pre-deformed blade subjected to gas pressure [J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 98(4): 2531-2549.

[15] ZHANG B, DING H, CHEN L Q. Subharmonic and combination resonance of rotating pre-deformed blades subjected to high gas pressure [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2020, 33(5): 635-649.

[16] ZHANG B, DING H, CHEN L Q. Three to one internal resonances of a pre-deformed rotating beam with quadratic and cubic nonlinearities [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2020, 126: 103552.

[17] 顾伟, 张博, 丁虎, 等. 2:1内共振条件下变转速预变形叶片的非线性动力学响应[J]. 力学学报, 2020, 52(4): 1131-1142.
GU W, ZHANG B, DING H, et al. Nonlinear dynamic response of pre-deformed blade with variable rotational speed under 2:1 internal resonance [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2020, 52(4): 1131-1142.(in Chinese)

[18] 陈柯帆, 李源, 卢涛, 等. 考虑模态振型影响的斜拉桥非线性内共振能量转换研究[J]. 中国公路学报, 2024, 37(9): 157-170.
CHEN K F, LI Y, LU T, et al. Energy transfer of nonlinear internal resonances in cable-stayed bridges considering the influence of global modal shapes [J]. China Journal of Highway and Transport, 2024, 37(9): 157-170.(in Chinese)

[19] 李晶, 高崇一. 磁场中导电矩形薄板1:3内共振下的超谐波动力学响应[J]. 唐山学院学报, 2024, 37(3): 1-7.
LI J, GAO C Y. Superharmonic dynamic response of rectangular conductive thin plate under 1:3 internal resonance in magnetic field [J]. Journal of Tangshan University, 2024, 37(3): 1-7.(in Chinese)

[20] GOLNARAGHI M F. Regulation of flexible structures *via* nonlinear coupling [J]. Dynamics and Control, 1991, 1(4): 405-428.

[21] KANDIL A, EL-GOHARY H A. Suppressing the nonlinear vibrations of a compressor blade *via* a nonlinear saturation controller [J]. Journal of Vibration and Control, 2018, 24(8): 1488-1504.

[22] PAI P F, ROMMEL B, SCHULZ M J. Non-linear vibration absorbers using higher order internal resonances [J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 234(5): 799-817.

[23] ASHOUR O N, NAYFEH A H. Adaptive control of flexible structures using a nonlinear vibration absorber [J]. Nonlinear Dynamics, 2002, 28(3): 309-322.

[24] LI J, LI X B, HUA H X. Active nonlinear saturation-based control for suppressing the free vibration of a self-excited plant [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15(4): 1071-1079.

[25] 宋洋, 张博, 陈旭东, 等. 二阶主共振下旋转叶片振动抑制器稳定性研究[J]. 振动与冲击, 2023, 42(16): 262-268.
SONG Y, ZHANG B, CHEN X D, et al. Stability study of vibration suppressor of a rotating blade with the second-order primary resonance [J]. Journal of Vibration and Shock, 2023, 42(16): 262-268.(in Chinese)

[26] 彭剑, 赵珧冰, 王连华. 时滞反馈及轴力作用下弹性梁的非线性振动[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2013, 40(9):30-36.
PENG J, ZHAO Y B, WANG L H. Nonlinear vibrations of elastic beams subjected to axial force and delayed-feedback [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2013, 40(9): 30-36.(in Chinese)