文章编号:1673-0291(2026)03-0040-12 DOI:10.11860/j.issn.1673-0291.20250129

考虑客流时空分布的公交非均匀发车时刻优化方法

陈 汐[1],吕佳雯[1],王健宇[1],谭二龙[2],焦朋朋[1]
(1.北京建筑大学 土木与交通工程学院,北京 100044;2.长安大学 电子与控制工程学院,西安 710064)

摘 要:为缓解公交需求波动与发车间隔不匹配导致的运力资源配置不合理问题,平衡公交系统服务质量与运营成本,提出一种考虑客流时空分布特征的常规公交时刻表智能化编制方法.首先,利用公交客流数据提取乘客上下车站点信息,基于高斯混合模型描述客流在时空上的分布特征,并对到站客流分布进行拟合.其次,综合考虑乘客出行时间成本与公交企业运营成本,以非均匀发车时刻编制策略为基础,构建以系统总成本最优为目标的公交时刻表整合优化模型,其中,线路中各站点的到站客流量、等候成本等关键指标根据客流时空分布拟合结果进行计算.再次,针对模型特征,以遗传算法为框架,融合Q-学习(Q-learning)与"状态-动作-奖励-状态-动作"(State-Action-Reward-State-Action,SARSA)两种基于时态差分的强化学习方法,实现算法中关键参数的自适应调整以提升求解质量.最后,以北京市常规公交网络中某单条线路为案例对所设计的编制流程进行验证.研究结果表明:相较于传统遗传算法,融合强化学习方法的改进遗传算法在系统总成本方面更具优势;对于所研究的单线路场景,当最大发车数量设定为10和15时,与基于固定发车时刻的编制策略相比,非均匀编制策略可使乘客等候成本下降约26.7%及14.5%,系统总成本下降约25.5%及13.1%;所设计的编制策略可以有效平衡满载率,较好地匹配客流变化趋势,提升运营效率.

关键词:城市交通;公交时刻表编制;高斯混合模型;遗传算法;强化学习
中图分类号:U491 **文献标志码**:A

Optimization method of non-uniform bus departure times considering spatiotemporal distribution of passenger flow

CHEN Xi[1], *LYU Jiawen*[1], *WANG Jianyu*[1], *TAN Erlong*[2], *JIAO Pengpeng*[1]
(1.School of Civil and Transportation Engineering, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing 100044, China; 2.School of Electronics & Control Engineering, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: To alleviate the misallocation of capacity resources caused by the mismatch between passenger demand fluctuations and bus headways, and to balance service quality and operating costs of the transit system, this paper proposes an intelligent scheduling method for fixed-route bus timetables that considers the spatiotemporal distribution characteristics of passenger flow. First, bus passenger flow

收稿日期:2025-08-08;**修回日期**:2025-10-29
基金项目:国家自然科学基金(52172301);教育部人文社会科学研究青年基金(24YJC630017);北京市博士后科研活动经费资助(ZZ-2024-56)
Foundation items: National Natural Science Foundation of China (52172301); Humanities and Social Sciences Youth Foundation, Ministry of Education of China (24YJC630017); Beijing Postdoctoral Research Foundation (ZZ-2024-56)
第一作者:陈汐(1988—),男,北京市人,讲师,博士.研究方向为公共交通系统建模. **email**:chenxi1@bucea.edu.cn.
通信作者:焦朋朋(1980—),男,安徽淮北人,教授,博士,博士生导师. **email**:jiaopengpeng@bucea.edu.cn.

引用格式:陈汐,吕佳雯,王健宇,等.考虑客流时空分布的公交非均匀发车时刻优化方法[J].北京交通大学学报,2026,50(3):40-51.
CHEN Xi, LYU Jiawen, WANG Jianyu, et al. Optimization method of non-uniform bus departure times considering spatiotemporal distribution of passenger flow[J]. Journal of Beijing Jiaotong University, 2026, 50(3): 40-51. (in Chinese)

data are utilized to extract information on passengers' boarding and alighting stations. A Gaussian mixture model is then employed to describe the spatiotemporal distribution of the passenger flow and fit the distribution of passenger arrivals at stations. Second, by comprehensively considering passenger travel time costs and transit enterprise operating costs, an integrated optimization model for bus timetabling is constructed based on a non-uniform departure time strategy, with the objective of minimizing the total system cost. Key indicators, such as the arrival passenger volume and waiting time cost at each station along the route, are calculated using the fitting results of the spatiotemporal passenger flow distribution. Third, tailored to the model's characteristics, a Genetic Algorithm (GA) is utilized as the underlying framework, integrating two temporal-difference-based reinforcement learning methods, Q-learning and State-Action-Reward-State-Action (SARSA), to enable the adaptive adjustment of key algorithm parameters and enhance solution quality. Finally, a single route within the fixed-route transit network of Beijing is used as a case study to validate the proposed scheduling procedure. The results indicate that the improved GA incorporating reinforcement learning outperforms the traditional GA in minimizing the total system cost. For the single-route scenario, when the maximum number of departures is set to 10 and 15, the non-uniform scheduling strategy reduces passenger waiting costs by approximately 26.7% and 14.5%, respectively, and decreases total system costs by approximately 25.5% and 13.1%, respectively, compared to a fixed-headway strategy. Furthermore, the proposed scheduling strategy effectively balances the load factor, aligns well with passenger flow fluctuation trends, and enhances overall operational efficiency.

Keywords: urban transportation; bus timetabling; Gaussian mixture model; genetic algorithm; reinforcement learning

时刻表编制是公交运营规划过程中的重要环节,其不仅关系到公交系统服务质量,同时也影响到公交企业运营效率.当前,随着公交系统智能化水平不断提升,可采集到的公交出行方面的数据资源逐渐增多.因此,相较于传统依靠调度人员的编制方法,以公交客流数据为基础,以兼顾服务质量与运营成本为目标,考虑客流需求变化趋势的智能化编制方法是重要发展方向[1].

公交时刻表编制的核心内容是发车时刻(或发车间隔)的确定[2].按研究场景划分,当前主要分为单线路时刻表编制、多线路时刻表跨线协同编制、轨道交通和枢纽等其他方式接驳的时刻表协同编制等方向[3].按编制策略划分,可分为基于固定(均匀)与弹性(非均匀)发车间隔两类编制方法.在固定发车间隔编制方面:主要将运营时段划分为几个子集,在每个子时段设定对应发车间隔.文献[4]以运营成本和出行成本最小化为目标构建发车间隔优化模型,并根据客流量将全天划分为 8 个运营时段,对每个时段输出固定发车时刻编制方案;文献[5]在分析线路运行特征的基础上,构建以乘客平均出行时间与企业载客成本为目标函数的发车间隔优化模型,并以早高峰运营时段为例,求解最优发车间隔.

在特定场景下,例如某运营时段内客流量存在波动情况,基于固定发车的编制方法由于无法考虑线路客流的变化特征,较难有效平衡服务水平和运营成本.因此,近年来已有研究关注采用非均匀发车策略对时刻表编制问题进行优化:文献[1]考虑到公交运行时间的不确定性及线路营运双方向发车频次的不对称特征,构建了整合时刻表与车辆排班的可变行车计划优化模型;文献[6]考虑乘客需求的不确定性,构建了双层优化模型以确定单条线路的非均匀发车间隔,并利用遗传算法对模型进行求解;文献[7]构建了一个新的多目标双层规划模型,该模型兼顾了公交用户和运营企业的利益,实现车辆调度与公交时刻表的协同优化;文献[8]探究了客流分布对快速公交发车间隔优化的影响,通过计算各站点到站客流分布,构建了包含乘客等候成本和运营成本的发车间隔优化模型,并利用非支配排序遗传算法(Non-dominated Sorting Genetic Algorithms Ⅱ, NSGA-Ⅱ)对模型进行求解;文献[9]考虑乘客需求的不确定性,构建了公交发车间隔鲁棒优化模型,灵活调整发车时刻;文献[10]针对不同车型的载客量限制,并考虑客流时变特征,以乘客出行与运营成本为目标构建了时刻表优化模型;文献[11]利用公交出行数据,在拟合站点间不同运行时间的基础上,构建了考虑时变需求的时刻表优化模型;文献[12]基

于乘客出行需求数据与车辆运行数据，将站间运行时间描述为时间依赖函数，构建以等候时间与公交车辆服务时间为优化目标的数学规划模型，并设计改进NSGA-Ⅱ算法对单线路发车间隔进行优化；文献[13]以优化乘客出行时间成本为目标，采用预定发车时刻表灵活调整、车辆滞站控制等组合调度策略以优化单线公交时刻表；文献[14]提出了一种基于深度强化学习的公交时刻表动态优化方法；文献[15]整合公交运营过程中时变客流、非均匀发车间隔编制策略及多车型配置等多种因素，构建了发车时刻与车型配置联合优化模型，并采用改进NSGA-Ⅱ算法求解.

综上，当前有关时刻表编制的研究已取得了丰富的成果，并且已有学者研究了非均匀发车间隔策略及应用.然而，部分研究在建模过程中，通常假设客流到站规律服从某项分布，并以此为基础构建含有积分项的数学优化模型描述客流变化趋势；或由于含积分项模型求解的复杂性，利用乘客平均到达率和等待时间等参数对积分项进行线性近似.因此，在充分利用公交出行数据对客流到站趋势进行精细化估计的基础上，面向非均匀发车时刻优化问题的模型构建和高效求解算法设计仍有待进一步研究.

针对上述问题，本文聚焦于单线路时刻表编制，在综合既有研究方法优点的基础上，从公交运营优化实际问题出发，将客流分析与时刻表优化模型构建步骤进行有机联系，提出基于客流数据的时刻表智能化编制流程.首先，利用高斯混合模型(Gaussian Mixture Model，GMM)拟合到站客流分布，输出可准确描述客流时空变化趋势的拟合参数.然后，构建考虑客流时空分布的数学优化模型，将客流数据分析结果作为模型关键输入参数，实现考虑客流需求变化的非均匀编制策略.最后，为求解模型，设计了融合强化学习的智能优化算法，并以北京市常规公交网络中单条线路为例验证所提出编制流程的可行性.

1 公交客流时空分布分析

研究框架如图1所示，包括客流时空分布分析、模型构建与求解、案例分析等步骤.在理论建模过程中，第1步是对线路和站点客流随时间的变化情况进行分析.基于公交客流数据中乘客的上下车站点信息，对客流的时空分布特征进行分析，主要包括建立基于时间和站点客流信息的GMM模型拟合线

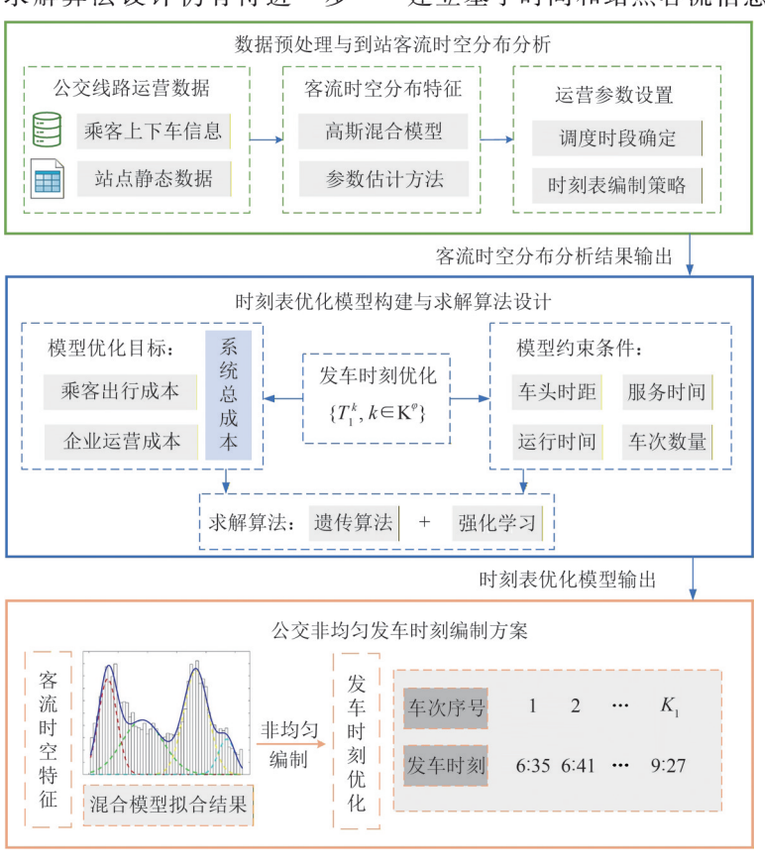


图1 非均匀发车时刻智能化编制框架

Fig.1 Framework for intelligent scheduling of non-uniform bus departure times

路整体客流及各个站点的到站客流分布,采用最大期望(Expectation-Maximization,EM)算法估计模型中的关键参数,并依据贝叶斯信息准则(Bayesian Information Criterion,BIC)确定混合模型中用于拟合客流数据的正态分布数量,从而为时刻表优化模型的参数输入提供基础.

GMM模型是一种常用的以高斯分布(或正态分布)为基础的概率模型,可视为由多个高斯分布加权求和生成的模型,其可近似不同形状的具有多峰值分布特征的曲线[16].公交客流数据在时间和空间上通常呈现多个波峰的特征.例如,在时间层面,早、晚高峰期内客流较大;在空间层面,某几个站点上下车乘客数量较大.根据以上特征,选择GMM模型对乘客的到达概率分布(线路整体层面和各个站点)进行拟合分析.

GMM模型的定义为:假设所有样本服从一个整体分布,该分布由 w 个混合"成分"组成,每个成分对应一个高斯分布,即对应聚类的一个"簇".在空间 $\mathbb{R}^p$ 中,满足GMM模型的随机变量 X 的概率密度函数 $P(X|\theta)$ 为[17]

$$P(X|\theta)=\sum_{w=1}^{W}\delta_w N(X|\mu_w,\Sigma_w) \tag{1}$$

式中:$\theta=\left((\delta_1,\mu_1,\Sigma_1),(\delta_2,\mu_2,\Sigma_2),\cdots,(\delta_W,\mu_W,\Sigma_W)\right)$;$W$ 为混合成分的数量;δ_w 为第 w 个高斯分布的权重,也称为"混合系数",且 δ_w 满足

$$\sum_{w=1}^{W}\delta_w=1 \quad \delta_w>0; \quad \forall w=1,2,\cdots,W \tag{2}$$

此外,假设 p 维随机变量 X 服从高斯分布,则 $N(X|\mu_w,\Sigma_w)$ 也称为GMM模型中的"分模型",且 N 是以 μ_w 为均值、Σ_w 为协方差矩阵的多变量高斯分布的概率密度函数,即

$$N(X|\mu_w,\Sigma_w)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}(\Sigma_w)^{\frac{1}{2}}}\times \exp\left(-\frac{1}{2}(X-\mu_w)^T\sum_w^{-1}(X-\mu_w)\right) \tag{3}$$

对于参数估计过程,采用EM算法,该算法是一种基于迭代的参数估计方法,其主要用于含有隐变量的概率模型中参数的极大似然估计.因此,采用该算法对GMM模型中的参数进行估计,即式(1)中的参数 θ;设 X 的样本数据集 $G=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,n 为样本数量,其对应的对数似然函数为 $L(\theta)=\sum_{g=1}^{n}\ln P(X=x_g|\theta)$;通过参数 θ 的对数似然函数对参数进行估计,具体推导可参考文献[16-17].此外,GMM模型中的 W 值是一个关键参数,其表示模型中正态分布的数量,即样本拟合后的聚类中心的数量,通常采用BIC准则确定 W 的取值.在实际处理数据时,通常选择最小的BIC值所对应的 W 值.

2　发车时刻优化模型与求解算法

2.1　时刻表优化模型构建

在客流时空分布分析的基础上,对时刻表优化问题进行理论建模.该模型以系统总成本为优化目标,考虑乘客等候成本与企业运营成本等因素.同时,考虑基于非均匀发车间隔的时刻表编制策略,该策略可根据不同时间段的客流变化趋势灵活调整发车间隔,能够更好地适应乘客出行需求的波动性.例如,在客流高峰时段缩短发车间隔以达到减少乘客等候时间的目的,而在低峰时段适当延长发车间隔以降低运营成本.

2.1.1　模型假设及参数定义

为便于模型构建与求解,现进行假设:营运车辆在线路中两个站点之间的行驶速度设定为常数值;不考虑营运车辆的不同车型和容量约束;不考虑场站到始发站点、终到站点返回至场站之间的运营过程.

模型中各参数及符号的定义见表1.

2.1.2　目标函数

在时刻表优化问题的建模过程中,模型的优化目标需考虑服务质量(如候车时间)和企业运营成本等因素[18-19].因此,时刻表优化模型以乘客等候时间成本与线路的直接运营成本为目标函数.

乘客的出行时间成本指标主要考虑在站候车时间,即从乘客到达站台至进入公交车辆的时间间隔.从建模角度,该指标可表述为两部分:第1部分为乘客到站时间与车辆到站时间之差;第2部分为将乘客上(下)车时间定义为车辆的在站服务时间.

在不考虑拥挤度或者采用调度策略造成乘客滞站的情况下,对于线路某一特定站点,既有研究中通常假设在上一营运车次的车辆离站之后,第一位到站乘客的到站时间与下一车次车辆到站时间的间隔内,乘客到达该站点的概率服从某个特定分布;该线路在运营时段内所服务乘客的在站等待时间之和 C_{WT} 可定义为在站总等待时间,其表达式为

$$C_{WT}=\sum_{k=1}^{K_1}\sum_{i=1}^{N_1}\left[\left[\frac{1}{2}(A_{i,k}-T_{i,k-1})\right]\times P_{i,+}(A_{i,k},T_{i,k-1})\right] \tag{4}$$

表 1 模型参数定义

Tab.1 Definitions of model parameters

参数	定义	参数	定义
N^{φ}	线路中的站点集合，站点编号 i、$j\in N^{\varphi}$，站点数量为 N_1	$T_{N_1}^{k}$	车次 k 到达线路终到站点时刻，$k\in K^{\varphi}$
K^{φ}	发车车次集合，车次序号 $k\in K^{\varphi}$，车次数量为 K_1	$h_{\min}$/min	最小发车间隔
$A_{i,k}$	第 k 辆车（车次）到达站点 i 的时刻，$i\in N^{\varphi}$，$k\in K^{\varphi}$	$h_{\max}$/min	最大发车间隔
$T_{i,k-1}$	第 $k-1$ 辆车（车次）离开站点 i 的时刻，$i\in N^{\varphi}$，$k\in K^{\varphi}$	$t_{i,j}$/min	车辆在站点 i 和站点 j 间的运行时间，由距离和行驶速度计算，i、$j\in N^{\varphi}$
D_i/人	研究时段内到达站点 i 的总客流量（上车客流），$i\in N^{\varphi}$	$B_{i,k}$/min	车次 k 在站点 i 的服务时间，$i\in N^{\varphi}$，$k\in K^{\varphi}$
$P_{i,+}(A_{i,k},T_{i,k-1})$/人	运营时段 $[T_{i,k-1},A_{i,k}]$ 内到达某站点 i 的乘客数量（上车客流），$i\in N^{\varphi}$	t_q/min	乘客 q 上车（或下车）所需时间
$P_{i,-}(A_{i,k},T_{i,k-1})$/人	运营时段 $[T_{i,k-1},A_{i,k}]$ 内在某站点 i 的下车乘客数量（下车客流），$i\in N^{\varphi}$	t_1/min	运营车辆进出站及停靠时的开关门时间
C_{WT}/min	乘客的在站总等待时间	N_b	营运车辆车门数量
$f_i(t)$	乘客到达某站点 i 的随时间 t 变化的概率密度函数，$i\in N^{\varphi}$	$T_{\min}$	营运线路的最早发车时刻
C_0/元	公交企业运营成本	$T_{\max}$	营运线路的最晚发车时刻
c_u/（元/min）	线路单位时间运营成本	T_1^k	决策变量，车次 k 从线路始发站点的出发时刻

式中：i 为线路中的站点编号；k 为发车车次序号；候车时间近似于发车间隔的二分之一[19].

乘客到达站点概率分布由实际客流数据进行估计，即在式(4)中，运营时段 $[T_{i,k-1},A_{i,k}]$ 内到达站点 i 的乘客数量 $P_{i,+}(A_{i,k},T_{i,k-1})$ 可由客流分布拟合结果（式(1)至式(3)）进行计算，即

$$P_{i,+}(A_{i,k},T_{i,k-1})=D_i\times\int_{T_{i,k-1}}^{A_{i,k}}f_i(t)\mathrm{d}t \tag{5}$$

在单线路时刻表（发车时刻）优化问题中，企业运营成本主要考虑直接运营成本，即根据车辆在线路上的运行时间计算，包括站点之间的运行时间、站点停靠时间[18]，即

$$C_0=\sum_{k=1}^{K_1}c_u(T_{N_1}^k-T_1^k) \tag{6}$$

时刻表编制应兼顾乘客出行效率和公交企业运营成本.将乘客等候时间成本与运营成本两个目标函数整合以最小化系统总成本 C_T.模型的目标函数 C_T 定义为

$$\min C_T=c_1\times C_{\mathrm{WT}}+C_0 \tag{7}$$

式中：c_1 为将候车时间成本转换成货币成本的参数，使目标函数 C_T 中各成本参数的单位一致.通过时间价值成本（Value of Time，VOT）指标将时间成本转化为费用成本[5].

2.1.3 约束条件

时刻表优化模型包括两类约束，即发车间隔约束和运行时间约束.发车间隔约束限定了两个相邻车次的发车时间需在最小发车间隔 $h_{\min}$ 与最大发车间隔 $h_{\max}$ 之间，在确定的调度时段内，该约束也可视为发车频次（或最大车次数量）的约束，即

$$h_{\min}\leqslant T_1^k-T_1^{k-1}\leqslant h_{\max}\quad k\in K^{\varphi}/\{1\} \tag{8}$$

运行时间约束方面，首先，运营中特定车次 k 所对应的车辆在两个连续站点 i、j 间的走行时间关系应满足

$$A_{j,k}=T_{i,k}+t_{i,j} \tag{9}$$

式(9)表示车次 k 到达站点 j 的时间与离开站点 i 的时间、站点 i 与 j 之间的车辆运行时间有关.其中，车次 k 在站点 i 的离站时间可根据到站时间与停靠时间计算，即

$$T_{i,k}=A_{i,k}+B_{i,k} \tag{10}$$

式中，停靠时间 $B_{i,k}$ 由在站点的服务时间进行定义，并根据上下车乘客数量进行计算[19]，即

$$B_{i,k}=\frac{t_q\times[P_{i,+}(A_{i,k},T_{i,k-1})+P_{i,-}(A_{i,k},T_{i,k-1})]}{N_b}+t_1 \tag{11}$$

式中：$P_{i,+}(A_{i,k},T_{i,k-1})$、$P_{i,-}(A_{i,k},T_{i,k-1})$ 的值根据客流到站概率分布拟合结果进行估计；若站点 i 无上下车客流，则停靠时间 $B_{i,k}$ 设定为 0.

然后，对于特定站点 i，两个相邻车次 $k-1$ 与 k 到达（离开）的时间应满足

$$h_{i,k}=T_{i,k}-T_{i,k-1} \tag{12}$$

式(12)描述了车次 k 与 $k-1$ 在站点 i 的车头时距 $h_{i,k}$ 可表示为车次 k 与车次 $k-1$ 离开站点 i 的时间差值.

最后，每个车次 k 的发车时刻应在设定的运营

时段内,即

$$T_{\min} \leqslant T_1^k \leqslant T_{\max} \tag{13}$$

2.2　模型求解算法

对于涉及多个变量和约束条件的公交时刻表优化模型,其候车时间成本指标需要根据乘客到站的概率密度函数进行积分运算.考虑到该问题的规模和复杂性,并结合求解效率和质量两方面因素,选择基于智能优化的求解方法.求解过程以遗传算法为基础框架,通过两个层面提升求解时刻表优化模型的性能:初始解生成阶段,基于非均匀发车间隔的灵活编制策略构建初始可行解,并确保算法迭代过程中解的可行性;迭代阶段,同时融合 Q-学习(Q-learning)与“状态-动作-奖励-状态-动作”(State-Action-Reward-State-Action,SARSA)两种基于时态差分的强化学习(Reinforcement Learning, RL)方法,在迭代过程不同阶段智能调整算法关键参数,以提升算法求解质量与适应性.

2.2.1　编码操作与初始种群生成

通过编码过程生成初始种群.以整数编码为基础,根据式(8)至式(13),以运营时段内最大发车数(车次数)作为每个染色体的编码长度.根据客流分布情况,采用灵活的非均匀发车间隔策略.因此,根据研究时段(例如 7:00 至 8:00,即 60 min),染色体 ϕ 中每个基因位的值由在调度时段内随机选择的整数确定,并将发车时刻表定义为

$$T^{\phi} = \{T_1^1, T_1^2, \cdots, T_1^k, \cdots, T_1^{N_K}\} \tag{14}$$

式中:T^{ϕ} 为种群 ζ 中每个染色体(个体)所对应的发车时刻表(即发车时刻序列);T_1^k 表示调度时段内第 k 趟次的首站发车时刻;每个个体的长度定义为车次数量 N_K.线路中车次 k 到达每个站点的时间可以根据首站发车时刻、站点之间的运行时间约束等进行计算.

通过解码操作生成时刻表编制方案.将式(14)中的元素值由小到大进行排序,即转换为实际发车时刻.经过重排后,每个元素值表示在调度时段内,相应车次在首站的发车时刻.基于编码和解码过程,生成模型初始解.设定算法的种群规模为 N_Z,种群中的每个个体均定义了一个时刻表编制方案.

2.2.2　适应度计算与选择操作

利用适应度函数[18]评估每个个体的优劣程度(或求解质量),使具有较高适应度值的个体有更高的概率参与到算法进化过程中.将个体 ϕ 的适应度函数 F_{ϕ} 定义为

$$F_{\phi} = \begin{cases} F_{\max} - C_{\phi} & C_{\phi} < F_{\max} \\ 0 & C_{\phi} \geqslant F_{\max} \end{cases} \tag{15}$$

式中:C_{ϕ} 表示个体所对应目标函数式(7)的值;$F_{\max}$ 表示一个相对较大的数,即保证适应度函数值为非负.同时,采用轮盘赌方法从种群中根据适应度函数值来选择部分个体进行遗传操作;将个体 ϕ 被选择的概率 p_{ϕ} 定义为

$$p_{\phi} = F_{\phi} / \sum_{\phi} F_{\phi} \tag{16}$$

2.2.3　遗传算子操作

在算法迭代过程中,除初始种群外,后代种群均由上一代种群通过遗传算子的变换生成,即采用交叉和变异两种算子对种群进行更新,如图 2 所示.图 2 中描述了两种算子的操作过程:①交叉算子.从种群中选择两个染色体进行配对.对于被选择的染色体,在区间[0,1]中生成一个随机数 p_1;根据交叉概率 p_c,若 $p_1 \leqslant p_c$,则进行算子操作,否则,不进行操作.②变异算子.变异算子作用于单个个体.在区间[0,1]中生成一个随机数 p_2;根据变异概率 p_m,若 $p_2 \leqslant p_m$,则进行算子操作,否则,不进行操作.

在进行完以上遗传算子操作过程后,类似地,需要对新生成的个体中所对应的发车时刻进行重排,即按照时间顺序将元素值由小到大进行排序,以符合运营要求.

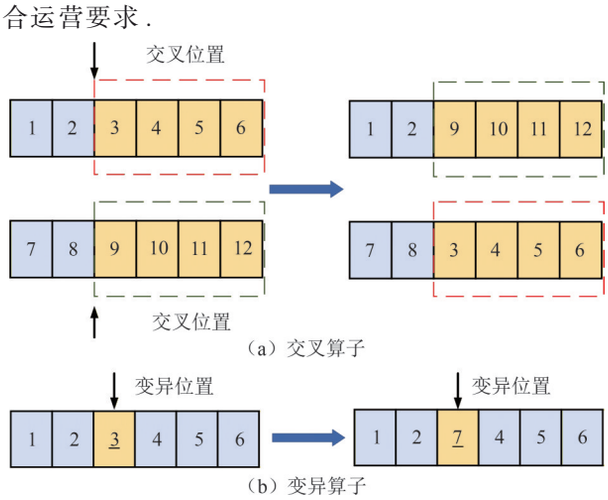


图 2　遗传算子示意图

Fig.2　Schematic diagram of genetic operator

在算子操作过程中,关键在于如何确定交叉与变异概率等遗传算子参数的取值.依赖经验或实验(灵敏度)分析的方式较为耗时[20-21],既有自适应算法通过预设特定的规则并根据当前种群适应度的值来确定算子参数,而忽略之前迭代过程中种群状态对求解效果的影响,在求解问题或场景变化时无法保证其适用性.因此,本文通过引入 RL 方法中的 Q-

learning与SARSA算法以改进经典遗传算法[20]，所设计的改进算法可根据当前种群的状态和过去状态对算子参数进行智能化调整以提升求解效率与质量．基于RL的改进算法主要包括状态、动作、奖励值、策略等4个方面的要素．

方面1：状态集合．考虑到所构建模型的目标函数是最小化系统总成本．同时，在算法迭代流程中需利用适应度函数评估种群质量．因此，状态集合的构建基于种群适应度函数，并考虑种群的平均适应度值F^*、种群多样性d^*及种群中个体的最优适应度值η^*等3个指标．引入文献[20]中给出的评估方法，并结合所研究的问题特点，将以上3个指标定义为

$$F^*=\sum_{z=1}^{N_Z}F(x_z^\lambda)/\sum_{z=1}^{N_Z}F(x_z^1) \tag{17}$$

$$d^*=\frac{\sum\limits_{z=1}^{N_Z}\left|F(x_z^\lambda)-\dfrac{\sum\limits_{z=1}^{N_Z}F(x_z^\lambda)}{N_Z}\right|}{\sum\limits_{z=1}^{N_Z}\left|F(x_z^1)-\dfrac{\sum\limits_{z=1}^{N_Z}F(x_z^1)}{N_Z}\right|} \tag{18}$$

$$\eta^*=\max F(x_z^\lambda)/\max F(x_z^1) \tag{19}$$

式中：$F(x_z^\lambda)$表示在算法第λ次迭代中，第z个个体的适应度值；$F(x_z^1)$为第1次迭代中，第z个个体的适应度值；$\max F(x_z^\lambda)$为第λ次迭代中，种群中个体的适应度最大(优)值．

同时，定义种群的状态值

$$S^*=\omega_1F^*+\omega_2d^*+\omega_3\eta^* \tag{20}$$

式中：S^*为种群的状态值，其中ω_1、ω_2、ω_3为权重，且$\omega_1+\omega_2+\omega_3=1$．参考既有研究，可按$\omega_1=0.35$、$\omega_2=0.35$、$\omega_3=0.3$进行赋值[20-21]．

状态集合中状态数量的划分也是重要影响因素[21]，划分数量过多会影响寻优耗时．反之，过少会影响解的质量．参考既有文献[20-21]，并结合所讨论问题以确定状态数量的划分策略．根据式(17)至式(19)确定S^*的值，将状态集合划分为20个状态，即$S=[s(1),s(2),\cdots,s(20)]$；每个状态的区间值设定为0.05．例如，当$S^*\in[0.10,0.15)$，则当前状态为$s=s(3)$．

方面2：动作集合．在RL算法中，每一次迭代中智能体会通过选择动作来确定交叉与变异概率值[20]．将动作集合的数量确定为10，即$A_{\mathrm{RL}}=[a(1),a(2),\cdots,a(10)]$．对于交叉概率$p_c$，其值设定为0.4～0.9，即每个动作之间的区间值为0.05．例如，若在某一次迭代中选择动作$a(1)$，则$p_c\in[0.40,0.45)$，即从该区间中随机选择一个数值作为交叉概率值．同理，对于变异概率，其值设定为0.01～0.21，即每个动作之间的区间值设定为0.02．例如，若在某一次迭代中选择动作$a(1)$，则$p_m\in[0.01,0.03)$，即从该区间中随机选择一个数值作为变异概率值．

方面3：奖励值设定．采用个体的最优适应度值、种群平均适应度值作为奖励值的设定依据．交叉与变异概率智能调整后的奖励值r_{pc}与r_{pm}为

$$r_{\mathrm{pc}}=\frac{\max F(x_z^\lambda)-\max F(x_z^{\lambda-1})}{\max F(x_z^{\lambda-1})} \tag{21}$$

$$r_{\mathrm{pm}}=\frac{\sum\limits_{z=1}^{N_Z}F(x_z^\lambda)-\sum\limits_{z=1}^{N_Z}F(x_z^{\lambda-1})}{\sum\limits_{z=1}^{N_Z}F(x_z^{\lambda-1})} \tag{22}$$

方面4：动作选择策略．动作选择策略通常需要兼顾强化学习过程中的探索与开发过程．因此，本文采用ε-贪婪策略，即对于第λ次迭代，且当前为状态s_λ时，其选择策略所对应的表达式为

$$\prod(s_\lambda,a_\lambda)=\begin{cases}\max_a Q(s_\lambda,a_\lambda) & \varepsilon\geqslant r_{0\text{-}1}\\ a_{\lambda,\mathrm{Randomly}} & \varepsilon<r_{0\text{-}1}\end{cases} \tag{23}$$

式中：ε为贪婪率；$r_{0\text{-}1}$为(0，1)之间的随机值；当$\varepsilon\geqslant r_{0\text{-}1}$时，选择$Q$值表中状态为$s_\lambda$时最大值所对应的动作$a_\lambda$(即$\max_a Q(s_\lambda,a_\lambda)$)；$\varepsilon<r_{0\text{-}1}$时，采用随机选择策略确定动作$a_\lambda$(即$a_{\lambda,\mathrm{Randomly}}$)．其中，$Q$值表中的每一个动作价值$Q(s_\lambda,a_\lambda)$可视为在状态$s_\lambda$下选择动作$a_\lambda$后的期望回报．

2.2.4 算法流程

基于RL的改进遗传算法在执行时包括两个阶段，即算法初始化阶段与迭代阶段．设定算法迭代次数为N_λ．其中，初始化阶段共包含7个步骤($\lambda=1$)．

步骤1：初始化种群ζ、种群规模N_Z．

步骤2：定义算法中的强化学习相关参数，包括初始化Q值表、状态集合S和动作集合A_{RL}．

步骤3：根据初始化种群，计算每个个体适应度值．同时，确定种群的状态s_1．初始化阶段采用随机选择策略确定动作，即本次迭代的交叉和变异概率．

步骤4：选择操作．基于计算后的个体适应度值，利用轮盘赌[20]方法在种群ζ中选择N_{Z_1}个染色体参与遗传操作，定义其为ζ_1．

步骤5：遗传操作．根据步骤3和步骤4，对子集合ζ_1进行交叉和变异遗传操作，同时更新ζ_1．

步骤6：采用精英策略从当前种群ζ中选择部分适应度值较高的个体直接参与下一次迭代过程，并与步骤5中的种群ζ_1合并，即种群规模保持在预设

的参数值N_Z.

步骤 7:转入迭代阶段.

既有文献结果表明[20],在算法迭代阶段的遗传算子参数选择过程中,融合 Q-learning 和 SARSA 两种算法,将有效提升求解质量.设定迭代过程中的算法选择条件为

$$\mathrm{RL}=\begin{cases}\text{SARSA} & \lambda<(N_{\lambda s}\times N_{\lambda a})/2\\ \text{Q-learning} & \lambda\geqslant(N_{\lambda s}\times N_{\lambda a})/2\end{cases}\tag{24}$$

式中:$N_{\lambda s}$为状态集合数量;$N_{\lambda a}$为动作集合数量.结合式(24),算法迭代阶段($\lambda>1$)共包括 7 个步骤.

步骤 1:根据第$\lambda-1$次迭代所生成的种群,计算每个个体的适应度值,并更新种群状态$s_\lambda\leftarrow s_{\lambda-1}$.

步骤 2:根据式(24)判定采用 SARSA 或 Q-learning 算法.

SARSA 算法是利用贪婪策略,从动作集中确定选择的动作,即本次迭代λ下的交叉和变异概率.进一步,根据式(21)和式(22)分别计算两种算子的奖励值并表示为r_λ,并按式(25)更新交叉与变异算子的Q值表,即

$$Q(s_{\lambda-1},a_{\lambda-1})\leftarrow(1-\alpha)Q(s_{\lambda-1},a_{\lambda-1})+\alpha[r_\lambda+\gamma Q(s_\lambda,a_\lambda)]\tag{25}$$

式中:$Q(s_\lambda,a_\lambda)$为第λ次迭代在对应状态和动作下的Q值;α为学习率;γ为折扣率.

Q-learning 算法是根据式(21)和式(22)分别计算两种算子的奖励值并表示为r_λ,按式(26)更新交叉与变异算子的Q值表.同时,利用贪婪策略,结合Q值表从动作集中确定选择的动作,即本次迭代的交叉和变异概率为

$$Q(s_{\lambda-1},a_{\lambda-1})\leftarrow(1-\alpha)Q(s_{\lambda-1},a_{\lambda-1})+\alpha[r_\lambda+\gamma\max_a Q(s_\lambda,a_\lambda)]\tag{26}$$

步骤 3:选择操作.基于计算后的个体适应度值,利用轮盘赌方法在种群ζ中选择N_{Z_1}个染色体参与遗传操作,定义其为ζ_1.

步骤 4:遗传操作.根据步骤 2 和步骤 3,利用更新的参数值对子集合ζ_1进行交叉和变异遗传操作,同时更新ζ_1.

步骤 5:采用精英策略从当前种群ζ中选择部分适应度值较高的个体直接参与下一次迭代过程,并与步骤 4 中的种群ζ_1合并,即种群规模保持在预设的参数值N_Z.

步骤 6:根据预设的迭代次数N_λ,重复执行步骤 1 至步骤 5.

步骤 7:完成N_λ次迭代后,根据种群ζ中的最优解,确定时刻表编制方案.

3　案例分析

以北京市常规公交网络中某线路客流数据(工作日周一至周五连续 5 天的数据)为案例(单一运行方向),对所提出的模型和算法进行验证.案例线路如图 3 所示.该线路首班车为 5:30,末班车为 23:00,发车间隔约为 10 min/趟,包括 34 个站点.因此,以 10 min 为单位,从首班车发车时刻 5:30 开始,将研究时段划分为 105 个,统计单方向各时段内在各站点的上下车客流量(将对应时段 5 天的客流量数据取平均值).案例研究的测试环境为 2.6 GHz Intel Core i5-13500H 处理器,32 GB 内存,操作系统为 Windows 11.

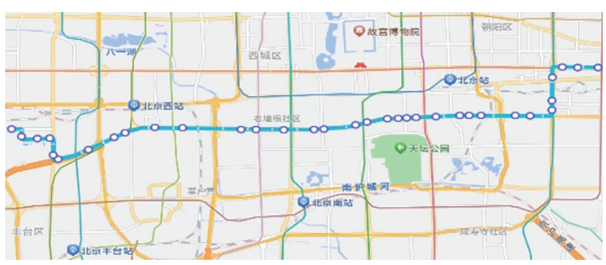


图 3　案例线路示意图(来源:高德开放平台)

Fig.3　Layout of the bus route in case study (Map data sources: AutoNavi Open Platform)

3.1　客流时空分布分析结果

利用线路和站点层面的客流量时间序列数据,对客流时空分布分析模型进行验证.利用 R 语言软件中的 mixtools 工具包,实现 EM 算法对 GMM 模型的参数估计过程.同时,将W值依次取 2～5,计算对应的 BIC 值.运营时段内线路整体客流的拟合结果见表 2.由表 2 可知,W值为 4 时,BIC 值最小.对各站点的上下车客流量时间序列进行拟合,部分站点的拟合结果及各参数值如表 3 所示.在案例分析中,假设各站点的客流到站概率分布情况与线路整体客流一致[8].因此,W值均取 4.

表 2　不同W值下的 BIC 值对比

Tab. 2　Comparison of BIC values under different W values

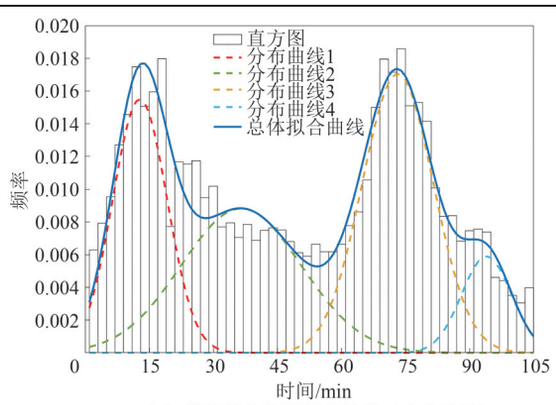
W值	BIC 值	W值	BIC 值
2	19 408	4	19 340
3	19 366	5	19 348

对客流数据拟合结果可视化,部分站点拟合结果如图 4 所示.图 4 中,直方图为客流量数据在运营时间上的分布情况,直方图上叠加的曲线为高斯分布曲线,每条分布曲线表示 GMM 模型中的一个高斯分布“成分”.根据式(1)及其权重指标,通过将各高斯分布曲线进行叠加,形成总体拟合曲线.同时,

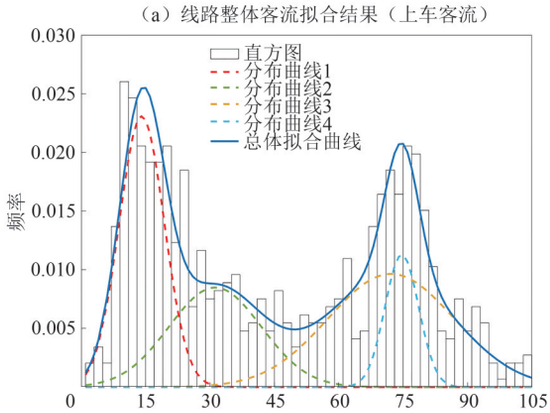
表 3 上车客流量的时间序列拟合参数(部分站点)

Tab.3 Time-series fitting parameters for boarding passenger flows (selected stations)

参数	站点 1	站点 2	站点 3	站点 4	站点 5	站点 6	站点 7
δ_w	0.289 6	0.359 6	0.256	0.236	0.263 0	0.179 5	0.376 6
	0.258 0	0.091 6	0.207	0.360	0.041 4	0.407 0	0.239 0
	0.073 4	0.162 4	0.212	0.111	0.219 8	0.347 1	0.300 6
	0.379 1	0.386 4	0.326	0.293	0.403 9	0.066 4	0.083 7
μ_w	9.41	11.00	10.3	11.1	11.7	8.75	17.9
	21.71	23.4	22.7	33.9	24.2	36.53	43.7
	36.33	36.60	46.3	91.8	35.9	76.46	76.2
	72.41	76.00	77.6	73.7	76.5	96.89	94.6
Σ_w	4.76	4.99	4.56	4.04	5.09	4.33	9.40
	4.39	1.70	3.27	14.58	1.8	14.38	15.50
	4.11	11.81	10.99	6.72	11.61	9.43	18.01
	14.64	13.85	12.68	9.63	12.67	4.00	4.76



(a) 线路整体客流拟合结果(上车客流)



(b) 某站点上车客流拟合结果

图 4 客流时空分布分析结果

Fig.4 Analytical results of the spatiotemporal distribution of passenger flow

图 4 中呈现两个明显的峰值,表明客流在此时段内出现频率高,即对应客流高峰时段.因此,考虑 GMM 模型具有的聚类功能[16],并根据客流存在双峰特征的分布特点,模型拟合结果也可理解为线路运营时段可划分为 4 个子类,即早晚高峰时段与两个平低峰时段.在时刻表优化模型研究中,可对特定时段进行优化,例如早高峰时段.根据不同时段的客流分析结果设计相应的时刻表优化方案,以平衡乘客出行和运营成本.因此,GMM 模型中的参数拟合结果将作为时刻表优化模型的数据输入.

3.2 时刻表优化模型测试结果

在时刻表优化模型和求解算法的测试过程中,运营时段的选取通常包括高峰时段及部分平峰、低峰时段至高峰时段的变化过程.因此,结合 GMM 模型拟合结果,选取 6:30—10:00 为研究时段,从各类成本角度研究非均匀和均匀发车间隔两种策略的运营效果.本文采用 Matlab 软件对求解算法进行编程实现,模型中主要参数设置如表 4 所示[5,20-21].

表 4 模型和算法中各参数取值

Tab. 4 Parameter settings for model and algorithm

参数	取值	参数	取值
遗传算法种群规模 N_z	50	最大发车数量 N_K	23、15、10
遗传算法迭代次数 N_λ	500	学习率 α	0.02
时间价值成本 c_1/(元/min)	1	折扣率 γ	0.95
单位时间运营成本 c_u/(元/min)	2	贪婪率 ε	0.3

基于式(4)、式(6)和式(7),比较两种发车策略所对应的成本指标.非均匀发车间隔策略根据智能优化算法设计步骤进行编制;均匀发车策略根据非均匀策略编制结果中的发车数量或频次,将其转换为对应的均匀发车间隔,同时计算其乘客等候成本、企业运营成本与系统总成本等指标.均匀发车间隔策略可转换为

$$T_1^{k,*} = T_{\min} + h^* \times \Gamma(k) \tag{27}$$

式中:$T_1^{k,*}$ 是均匀发车策略中车次 k 的始发站发车时刻;$T_{\min}$ 是运营时段起始时间;h^* 为换算之后的发车间隔;$\Gamma(k)$ 为车次任务序号,令 $\Gamma(k)=0,1,2,\cdots,N_K-1$.

根据各站点的到站客流拟合结果及模型各参数设定值,对研究时段单方向的发车时刻进行优化,生成编制方案,对应的公交发车时刻信息如图 5 所示.图 5 中,每条曲线对应一个车次的运行信息,包括该车次的首站发车时刻、到达线路中各站点的时刻.

表 5 比较了两种编制策略所对应的系统总成本、乘客等候成本、运营成本和平均等候时间等指标.由表 5 可知:①在相同研究时段内及在发车数量相同的情况下,采用非均匀发车策略所生成的时刻表编制方案中,乘客等候成本、运营成本及系统总成本等 3 项指标均优于均匀发车策略.②当发车数量相对较大时,两种策略的乘客等候成本相近;当发车数量相对较小时,非均匀策略在乘客等候成本上的优势较明显.例如,在最大发车数量为 15 的场景中,

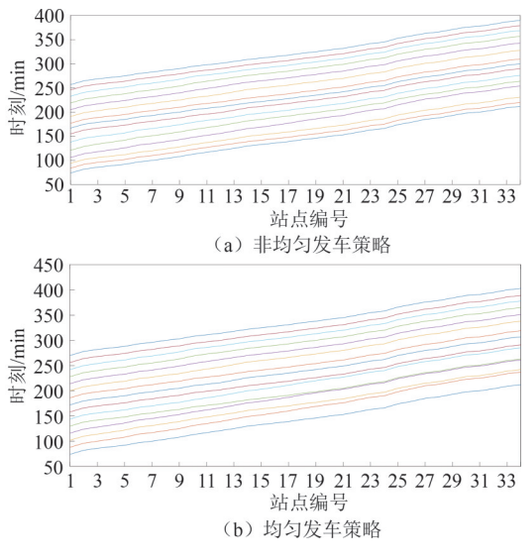


图 5　公交运行时刻图

Fig.5　Bus trajectory diagram

采用非均匀策略,乘客总等候成本节省了 14.5%,平均等候成本节省 9.6%,系统总成本下降 13.1%.在最大发车数量为 10 的场景中,采用非均匀策略,乘客总等候成本节省了 26.7%,平均等候成本节省 15.8%,系统总成本下降 25.5%.③在运力资源受限情况下,运营企业可根据可派遣车次数量、客流到站情况等因素灵活设定发车间隔,缩减乘客等候时间的同时达到兼顾出行和运营成本的目的.此外,在运营成本方面,由于所构建的模型未考虑车辆调度优化,且主要依据线路运行时间进行计算,因而两种策略在运营成本指标方面相近.

由于学习率、折扣率和贪婪率是影响 RL 方法对遗传算法优化效果的 3 个关键参数,因此本文通过不同参数配置方案对系统总成本指标的影响进行分析,以确定 3 个参数的取值.以最大发车数量为 15 的场景为例,采用不同参数配置对系统总成本指标进行计算,测试结果如表 6 所示.由表 6 可知,当学习率为 0.02、折扣率为 0.95、贪婪率为 0.3 时,系统总成本指标取值最小.

表 5　模型求解结果

Tab. 5　Model solution results

最大发车数量	编制策略	系统总成本/元	乘客等候成本/元	运营成本/元	平均等候时间/(min/人)
23	非均匀发车间隔	26 870	20 722	6 148	4.3
	均匀发车间隔	28 442	22 292	6 150	4.5
15	非均匀发车间隔	34 485	30 373	4 112	6.6
	均匀发车间隔	39 664	35 542	4 122	7.3
10	非均匀发车间隔	44 005	41 161	2 844	9.6
	均匀发车间隔	59 063	56 165	2 898	11.4

表 6　不同参数配置下的算法测试结果

Tab.6　The test results for different parameter configurations

学习率	折扣率	贪婪率	系统总成本/元
0.01	0.95	0.3	35 081
0.02	0.95	0.3	34 485
0.05	0.95	0.3	34 667
0.05	0.90	0.5	34 807
0.10	0.95	0.3	34 864
0.10	0.90	0.5	34 603
0.20	0.95	0.3	35 999
0.20	0.90	0.5	35 473
0.30	0.95	0.3	35 354
0.30	0.90	0.5	35 310

为进一步验证所提出的基于 RL 的求解算法的有效性,将其与基于固定交叉及变异概率的遗传算法进行对比分析,如图 6 所示.图 6 中,两种算法的迭代曲线图描述了系统总成本指标随迭代次数的变化趋势.由图 6 可知,基于 RL 的算法优于基于固定参数设定的遗传算法,算法性能提升 3.9%(系统总成本目标).为保证测试结果的有效性,在本案例中每种算法运行 10 次,并选取最优结果为最终测试结果.

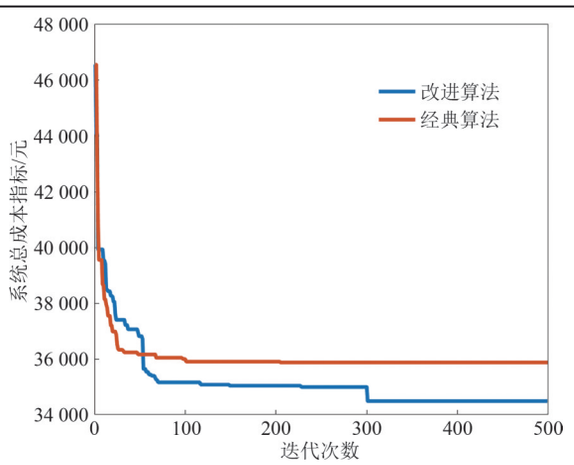


图 6　算法迭代曲线图

Fig.6　Iteration curves of algorithms

同时,在相同发车数量的条件下,对均匀和非均匀两种发车间隔策略的平均满载率进行对比分析.满载率是衡量乘客舒适度及线路运营效率的一个重要指标.通过提取各站点上下车客流信息,并对线路的断面客流量进行计算,针对高峰时段研究场景,线路在高峰小时的满载率可定义为[22]

$$L_l = \max(N_{l_j}^T) \Big/ E_l^T \tag{28}$$

$$E_l^T = \sum_{k=1}^{N_k} e_{l_k}^T \tag{29}$$

式中：L_l为高峰T时段线路l中最大客流断面的满载率；$N_{l_j}^T$为T时段线路l在站点j的断面客流量；E_l^T为T时段内线路l的额定载客量；$e_{l_k}^T$为T时段内线路l派遣的第k辆车（车次）的额定载客量.两种策略下（车次数量为15的场景）各营运车次的平均满载率变化如图7所示.由图7可知，在客流量较为集中的时段（红色框线区域），采用非均匀发车策略可有效平衡满载率，并较好匹配客流变化趋势，防止车辆内拥挤度过高或上座率不足的情况出现.因此，当高峰时段客流分布不均衡程度较为明显时，采用非均匀发车时刻可在不过多增加企业运营成本的同时提升出行舒适度.

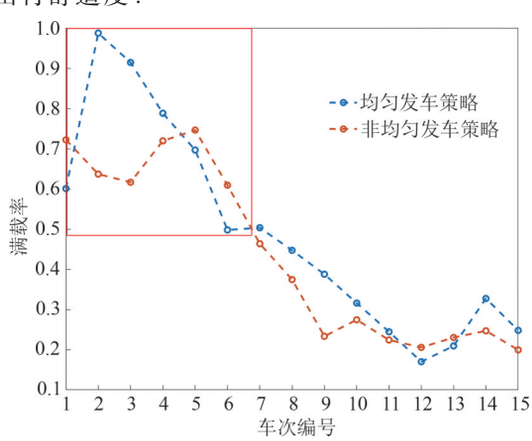


图7 各营运车次的平均满载率变化示意图

Fig. 7 Variation of average load factor for each trip

4 结论

1）基于GMM模型的拟合方法可较好匹配公交客流的多峰值分布特征.根据EM算法分析结果，当分布数量参数W值取4时，可输出最优拟合结果，进而对客流到站分布进行较为精细的估计，为优化模型构建提供数据输入.

2）所设计的公交非均匀发车时刻优化方法，在相同的运营条件下，所输出的编制方案相较于传统均匀发车时刻编制方法，可降低乘客等候成本约14.5%、系统总成本约13.1%.

3）融合强化学习的智能优化算法在求解非均匀发车时刻优化问题时表现出良好的求解质量与效率.在案例分析中，改进算法能在500次迭代以内搜索到模型次优解（可行解），并且求解质量优于经典基于固定遗传算子参数设置的算法.

参考文献（References）：

[1] 汪怡然，莫鹏里，别一鸣，等.考虑行程时间波动的电动公交可变行车计划[J].交通运输系统工程与信息，2023，23(1)：152－164.
WANG Yiran，MO Pengli，BIE Yiming，et al. Optimization of variable electric bus schedule considering volatility in trip travel time[J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology，2023，23(1)：152－164.(in Chinese)

[2] CEDER A. Public transit planning and operation：Theory，modeling and practice[M]. Oxford：Butterworth-Heinemann Elsevier Ltd，2007.

[3] 袁振洲，刘立强，王佳冬，等.考虑不均匀发车间隔的高铁接运公交时刻表与车辆调度优化[J].北京交通大学学报，2021，45(4)：44－53.
YUAN Zhenzhou，LIU Liqiang，WANG Jiadong，et al. Feeder bus timetabling and vehicle scheduling optimization for high-speed railway station with uneven departure interval[J]. Journal of Beijing Jiaotong University，2021，45(4)：44－53.(in Chinese)

[4] 叶清，马昌喜，杨信丰，等.快速公交发车间隔优化研究[J].兰州交通大学学报，2015，34(1)：170－174.
YE Qing，MA Changxi，YANG Xinfeng，et al. Study on the optimization of departing time interval for bus rapid transit[J]. Journal of Lanzhou Jiaotong University，2015，34(1)：170－174.(in Chinese)

[5] 张天伟，黄品男，佟璐.考虑乘客时间成本的城市公交发车间隔优化模型[J].北京交通大学学报，2023，47(6)：50－56.
ZHANG Tianwei，HUANG Pinnan，TONG Lu. Optimization model for urban bus departure intervals considering passenger time costs[J]. Journal of Beijing Jiaotong University，2023，47(6)：50－56.(in Chinese)

[6] 詹斌，鲁寒宇，杨雨婷，等.考虑公交客流需求不确定性的发车间隔优化[J].武汉理工大学学报（交通科学与工程版），2017，41(6)：978－983.
ZHAN Bin，LU Hanyu，YANG Yuting，et al. Optimization of departure intervals considering uncertainty of bus passenger flow demand[J]. Journal of Wuhan University of Technology（Transportation Science & Engineering），2017，41(6)：978－983.(in Chinese)

[7] LIU T，CEDER A A. Integrated public transport timetable synchronization and vehicle scheduling with demand assignment：A bi-objective bi-level model using deficit function approach[J]. Transportation Research Part B：Methodological，2018，117：935－955.

[8] 左忠义，牛帅，殷巍，等.基于公交客流分布特性的弹性发车间隔优化研究[J].大连交通大学学报，2019，40(6)：9－14.

ZUO Zhongyi, NIU Shuai, YIN Wei, et al. Optimization study of elastic launch interval based on distribution characteristics of public traffic flow[J]. Journal of Dalian Jiaotong University, 2019, 40(6): 9－14.(in Chinese)

[9] GKIOTSALITIS K, ALESIANI F. Robust timetable optimization for bus lines subject to resource and regulatory constraints[J]. Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, 2019, 128: 30－51.

[10] 姚恩建, 刘彤, 郇宁, 等. 常规公交线路发车间隔及车型配置优化[J]. 北京交通大学学报, 2020, 44(4): 86－93.
YAO Enjian, LIU Tong, HUAN Ning, et al. Study on optimization of departure interval and vehicle type configuration of regular bus lines[J]. Journal of Beijing Jiaotong University, 2020, 44(4): 86－93.(in Chinese)

[11] MA H G, LI X, YU H T. Single bus line timetable optimization with big data: A case study in Beijing[J]. Information Sciences, 2020, 536: 53－66.

[12] TANG J J, YANG Y F, HAO W, et al. A data-driven timetable optimization of urban bus line based on multi-objective genetic algorithm[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2021, 22(4): 2417－2429.

[13] ZHANG W Y, XIA D Y, LIU T, et al. Optimization of single-line bus timetables considering time-dependent travel times: a case study of Beijing, China[J]. Computers & Industrial Engineering, 2021, 158: 107444.

[14] YAN H Y, CUI Z Y, CHEN X Q, et al. Distributed multiagent deep reinforcement learning for multiline dynamic bus timetable optimization[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2023, 19(1): 469－479.

[15] 王晓伟, 吴松屿, 曹恺, 等. 多车型混编公交车队发车时刻及车型联合优化[J]. 中国公路学报, 2024, 37(6): 253－266.
WANG Xiaowei, WU Songyu, CAO Kai, et al. Joint optimization of departure times and vehicle types for a multi-type bus fleet[J]. China Journal of Highway and Transport, 2024, 37(6): 253－266.(in Chinese)

[16] 冯炳文. 基于乘客上下车刷卡记录的公交客流时空分布研究[J]. 综合运输, 2022, 44(12): 66－71.
FENG Bingwen. Fitting analysis of passenger flow distribution based on complete passenger transaction records[J]. China Transportation Review, 2022, 44(12): 66－71.(in Chinese)

[17] 曾骞. 基于EM改进算法的高斯混合模型参数估计[D]. 杭州:浙江大学, 2018.
ZENG Qian. The improved EM algorithm based gaussian mixture model parameters estimation [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2018.(in Chinese)

[18] 俞礼军, 余志强. 基于异质性出行需求的公交线路组合调度研究[J]. 广西大学学报(自然科学版), 2019, 44(6): 1562－1572.
YU Lijun, YU Zhiqiang. Research on combinational scheduling for transit based on heterogeneous demand[J]. Journal of Guangxi University (Natural Science Edition), 2019, 44(6): 1562－1572.(in Chinese)

[19] 何波波, 刘林忠, 李建婷. 改进布谷鸟算法的快速公交组合调度优化研究[J]. 计算机仿真, 2023, 40(10): 146－151.
HE Bobo, LIU Linzhong, LI Jianting. Research on optimal BRT combined dispatching based on improved cuckoo algorithm[J]. Computer Simulation, 2023, 40(10): 146－151.(in Chinese)

[20] CHEN R H, YANG B, LI S, et al. A self-learning genetic algorithm based on reinforcement learning for flexible job-shop scheduling problem[J]. Computers & Industrial Engineering, 2020, 149: 106778.

[21] 许可, 叶彩霞, 孙文娟. 带运输的混合流水车间调度问题的改进遗传算法[J]. 沈阳理工大学学报, 2024, 43(2): 7－14.
XU Ke, YE Caixia, SUN Wenjuan. Improved genetic algorithm for scheduling problem of hybrid flow shop with transportation[J]. Journal of Shenyang Ligong University, 2024, 43(2): 7－14.(in Chinese)

[22] 余坤, 赵向宇, 李韫慧. 基于公交IC卡信息的城市公交满载率指标计算方法[J]. 交通运输研究, 2019, 5(5): 49－54.
YU Kun, ZHAO Xiangyu, LI Yunhui. Calculation method of urban bus full load rate index based on bus IC card information[J]. Transport Research, 2019, 5(5): 49－54.(in Chinese)