DOI: 10.3969/j.issn.2097-583X.2026.04.018　　文章编号：2097-583X(2026)04-0646-08

多孔功能梯度夹芯梁的热致失稳研究

吕　强[a,b*]，赵应龙[a]，曾鸿瑶[a]，穆圆圆[a]

（信阳师范大学 a. 建筑与土木工程学院；b. 河南省新型环保土木工程材料工程研究中心，河南 信阳 464000）

摘　要：针对均匀热荷载作用下多孔功能梯度材料(porous functionally graded material，PFGM)夹芯梁的失稳问题，基于Timoshenko一阶剪切理论、von Karman几何非线性和物理中性面概念，推导了均匀热荷载下PFGM夹芯梁的非线性控制方程。采用Nayfeh半逆解法获得非线性积分-微分边值问题的解析解，并结合最小自由能原理研究了均匀热荷载下PFGM夹芯梁的失稳类型和机理。结果表明，在均匀热荷载作用下，两端固支(C-C)PFGM夹芯梁发生分叉失稳；而对于两端简支(S-S)PFGM夹芯梁，梯度指数改变引起的附加弯矩的影响，使其失稳类型从分叉失稳转变为跳跃失稳。

关键词：PFGM夹芯梁；Timoshenko一阶剪切理论；Nayfeh半逆解法；最小自由能原理；失稳类型

中图分类号：O342　　**文献标志码：**A　　**开放科学(资源服务)标识码(OSID)：**

Thermal instability analysis of porous functionally graded sandwich beams

Lü Qiang[a,b*], Zhao Yinglong[a], Zeng Hongyao[a], Mu Yuanyuan[a]

(a. School of Architecture and Civil Engineering; b. Henan New Environmentally-Friendly Civil Engineering Materials Engineering Research Center, Xinyang Normal University, Xinyang 464000, China)

Abstract: Aiming at the instability problem of porous functionally graded material (PFGM) sandwich beams under uniform thermal loading, based on the Timoshenko first-order shear theory, von Karman geometric nonlinearity and physical neutral plane concepts, the nonlinear governing equations for PFGM sandwich beams under uniform thermal loads were derived. The analytical solution of the nonlinear integral-differential boundary value problem was obtained by using the Nayfeh semi-inverse solution method, and the type and mechanism of instability of PFGM sandwich beams under uniform thermal loading were investigated in conjunction with the minimum free energy principle. The results showed that, under uniform thermal loading, the C-C PFGM sandwich beams exhibited bifurcation instability; while for the S-S PFGM sandwich beams, the influence of additional moment was induced by the variation of the gradient index, the instability type transformed from bifurcation instability to snap-through.

Key words: porous functionally graded material (PFGM) sandwich beams; Timoshenko first-order shear theory; Nayfeh semi-inverse method; minimum free energy principle; instability type

0　引言

多孔材料是一种兼具功能和结构双重属性的工程材料，具有轻量化、高比强度及可调控物理性能等优势，在吸能减振、热防护等领域展现出重要的应用价值[1-3]。为适应土木工程、航空航天工程、能源工程等领域在轻量化、多功能、高强度等方面的应用，集功能梯度材料(functionally graded material，FGM)和多孔材料(porous material)于一身的多孔功能梯度材料(porous functionally graded

收稿日期：2025-11-16；**修回日期：**2025-12-12；*.**通信联系人**，E-mail：lvqiang@xynu.edu.cn

基金项目：国家自然科学基金项目(12172204)；河南省自然科学基金项目(252300420925)；河南省科技攻关计划项目(232102220012)；信阳师范大学研究生科研创新基金项目(2024KYJJ112)

作者简介：吕　强(1991—)，男，河南信阳人，讲师，博士，主要从事黏弹性结构的非线性振动研究。

引用格式：吕强，赵应龙，曾鸿瑶，等. 多孔功能梯度夹芯梁的热致失稳研究[J]. 信阳师范大学学报(自然科学版)，2026，39(4)：646-653.

Lü Qiang, Zhao Yinglong, Zeng Hongyao, et al. Thermal instability analysis of porous functionally graded sandwich beams[J]. Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition), 2026, 39(4):646-653.

material，PFGM）应运而生。随着PFGM梁、板、壳等结构在各个工程领域的广泛应用[4-6]，其屈曲行为已成为学术界与工程界共同关注的焦点。

众多学者已基于Euler理论、Timoshenko一阶剪切理论及各种高阶剪切变形理论，对PFGM结构的屈曲行为进行了深入研究。其中，基于Euler理论，在不同荷载作用下采用不同的解析和数值方法来分析PFGM结构的屈曲行为备受瞩目。对于PFGM梁[7-9]，采用打靶法、有限元法、微分变换法，研究了其在机械荷载、热荷载及湿-热-机荷载作用下的屈曲特性。此外，对于其他结构，如多孔功能梯度石墨烯片梁[10]、FGM梁[11]、复合材料梁[12]，采用广义微分求积法和拓展的解析解法，研究了这些结构在机械荷载和热机荷载作用下的屈曲特性。然而，在上述讨论PFGM梁的屈曲行为中，均未阐明其失稳类型及其失稳机理。此外，对于长细比小于20的结构[12]，需要考虑剪切效应。

在不同荷载作用下采用不同剪切理论的PFGM结构的屈曲行为也受到广泛关注。基于Timoshenko一阶剪切理论，对于PFGM梁[13]，采用Ritz法，研究了其在机械荷载作用下的屈曲行为；对于其他结构，如FGM梁[14]，采用广义微分求积法和解析解法研究了这些结构在热荷载作用下的屈曲行为。

基于Reddy高阶剪切变形理论，对于PFGM梁/板[15-16]，采用迭代法、DTM法，研究了其在机械荷载、热荷载以及热机荷载作用下的屈曲行为；此外，对于其他结构，如FGM梁[17]采用迭代法，研究了其在热荷载作用下的屈曲行为。

综上所述，当前基于Euler理论和各种剪切变形理论，对PFGM结构的屈曲行为的研究已取得显著进展，然而，大部分的研究仅聚焦于临界屈曲荷载的求解，并未明确PFGM结构的失稳类型和失稳机理。

基于上述问题，本文致力于研究PFGM夹芯梁在均匀热荷载作用下的失稳问题。首先，基于Timoshenko一阶剪切理论、von Karman几何非线性和物理中性面概念，建立了均匀热荷载作用下PFGM夹芯梁的积分-微分型数学模型；其次，拓展了Nayfeh的半逆解法[12]，获得了非线性积分-微分边值问题的解析解；最后，基于最小自由能原理[11]，揭示了均匀热荷载作用下PFGM夹芯梁的失稳类型及其机理。

1　数学模型

如图1所示，假设PFGM夹芯梁的上下表面完全贴合，梁的长度为L，宽度为b，夹芯梁的总厚度$h=h_c+2h_f$，其中h_c和h_f分别为芯层和上下表面层的厚度。这里考虑均匀热荷载，坐标系(x,y,z)的原点在夹芯梁横截面的左端面的中点处，x轴与夹芯梁的物理中性面处轴线保持一致。此外，夹芯梁上下面板的物理参数为P_{11}（弹性模量E_{11}，热膨胀系数α_{11}）；芯层的物理参数为$P(z)$（弹性模量$E(z)$，热膨胀系数$\alpha(z)$），沿z轴厚度方向呈梯度分布，对其考虑两种孔隙率分布，分别为均匀分布和非均匀分布，定义为PFGM-Ⅰ和PFGM-Ⅱ。

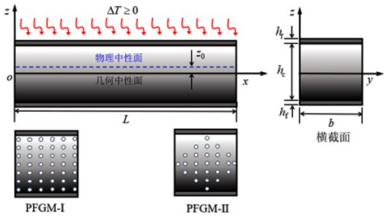


图1　PFGM夹芯梁模型

Fig. 1　Schematic diagram of PFGM sandwich beam

对于含孔隙分布的PFGM夹芯梁的芯层，其物理参数$P(z)$（弹性模量$E(z)$，热膨胀系数$\alpha(z)$）的表达式如下所示[15]：

$$P(z)=(P_c-P_m)\left(\frac{z}{h_c}+\frac{1}{2}\right)^n+P_m-\psi\frac{e_0}{2}(P_c+P_m)。\tag{1}$$

当$\psi=1$时，孔隙为均匀分布（PFGM-Ⅰ）；当$\psi=1-2|z|/h_c$时，孔隙为非均匀分布（PFGM-Ⅱ）。其中，$-h_c/2\leqslant z\leqslant h_c/2$，$n$为梯度指数，$P_c$和$P_m$分别为芯层上部材料和下部材料的物理参数，$e_0$为孔隙率（$0\leqslant e_0<1$）。

1.1　热荷载类型和材料属性

假设PFGM夹芯梁整体的温度是均匀的，初始温度T_0（视为室温300 K），温度变化量为ΔT，则PFGM夹芯梁结构在均匀升温时的温度场[11]可以表示为：$T=T_0+\Delta T$。

此外，在计算中，芯层考虑SUS304和Si_3N_4形成的PFGM材料，面板选择SUS304。并且考虑材料的温度依赖性，其物理参数与温度的关系为[15]：

$$P(T)=P_0(1+P_1T+P_2T^2+P_3T^3),\tag{2}$$

式中：P_0、P_1、P_2、P_3为温度依赖性系数，如表1所示。

表 1　PFGM 温度依赖性系数

Tab. 1　Temperature dependence coefficients of PFGM

系数	SUS304		Si_3N_4	
	α/K^{-1}	E/Pa	α/K^{-1}	E/Pa
P_0	12.33×10^{-6}	201.04×10^{9}	5.872×10^{-6}	348.43×10^{9}
P_1	8.09×10^{-4}	3.08×10^{-4}	9.09×10^{-6}	-3.07×10^{-4}
P_2	0	-6.53×10^{-7}	0	2.16×10^{-7}
P_3	0	0	0	-8.95×10^{-11}

1.2　数学公式

为了便于计算,对 PFGM 夹芯梁引入物理中性面的概念[15]:

$$z_0=\frac{\int_{-h_c/2}^{h_c/2}E(z)z\mathrm{d}z+\int_{h_c/2}^{h/2}E_{11}z\mathrm{d}z+\int_{-h/2}^{-h_c/2}E_{11}z\mathrm{d}z}{\int_{-h_c/2}^{h_c/2}E(z)\mathrm{d}z+\int_{h_c/2}^{h/2}E_{11}\mathrm{d}z+\int_{-h/2}^{-h_c/2}E_{11}\mathrm{d}z}=\frac{\int_{-h/2}^{h/2}Ez\mathrm{d}z}{\int_{-h/2}^{h/2}E\mathrm{d}z}。\tag{3}$$

考虑 Timoshenko 一阶剪切理论、von Karman 型几何非线性和物理中性面概念[15-16],PFGM 夹芯梁的应变-位移分量可表示为:

$$\varepsilon_x=\varepsilon_0-(z-z_0)\kappa,\gamma_{xz}=\frac{\partial w}{\partial x}-\phi,\tag{4}$$

式中:ε_x 和 γ_{xz} 为梁在横截面任意一点的轴向应变和剪切应变,ε_0 为 $z=0$ 处的轴向正应变,κ 为中性轴处的曲率。它们与位移的关系可以表示为:

$$\varepsilon_0=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\kappa=\frac{\partial\phi}{\partial x}。\tag{5}$$

对 PFGM 夹芯梁采用如下热弹性材料的胡克定律[11]:

$$\sigma_x=E(\varepsilon_x-\alpha\Delta T),\tau_{xz}=k_sG\gamma_{xz},\tag{6}$$

式中:σ_x 和 τ_{xz} 分别为夹芯梁的轴向应力和剪切应力;k_s 为修正系数,这里取 5/6[5]。利用微元体法[11],得 PFGM 夹芯梁的平衡方程为:

$$\frac{\partial N}{\partial x}=0,\tag{7}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}=F_s,\tag{8}$$

$$\frac{\partial F_s}{\partial x}+N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\tag{9}$$

式中:N、M 和 F_s 分别为 PFGM 夹芯梁的轴力、弯矩和剪力。将式(4)代入式(6),并沿着 PFGM 夹芯梁的厚度分别对其进行积分,分别得到轴力、弯矩和剪力的表达式为:

$$N=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x\mathrm{d}z=A_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)-A_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-N^T,\tag{10}$$

$$M=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x(z-z_0)\mathrm{d}z=A_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)-A_{14}\frac{\partial\phi}{\partial x}-M^T,\tag{11}$$

$$F_s=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xz}\mathrm{d}z=A_{13}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\phi\right),\tag{12}$$

式中:A_{11}、A_{12}、A_{13}、A_{14} 分别为 PFGM 夹芯梁的拉伸刚度、拉弯耦合刚度、剪切刚度、弯曲刚度的系数,N^T 和 M^T 分别为温度引起的附加轴力和附加弯矩。引入了物理中性面 z_0,使得拉弯耦合刚度系数 A_{12} 为 0。它们的表达式如下所示:

$$\begin{aligned}&A_{11}=\int_{-h/2}^{h/2}E\mathrm{d}z,A_{12}=\int_{-h/2}^{h/2}E(z-z_0)\mathrm{d}z,\\&A_{13}=\frac{k_s}{2(1+\upsilon)}\int_{-h/2}^{h/2}E\mathrm{d}z,\\&A_{14}=\int_{-h/2}^{h/2}E(z-z_0)^2\mathrm{d}z,\\&N^T=\int_{-h/2}^{h/2}E\alpha\Delta T\mathrm{d}z,\\&M^T=\int_{-h/2}^{h/2}E\alpha\Delta T(z-z_0)\mathrm{d}z。\end{aligned}\tag{13}$$

将式(10)代入式(7),得轴向位移 u 为:

$$u=-\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x+\frac{N^T}{A_{11}}x+\frac{C_{11}}{A_{11}}x+C_{22}。\tag{14}$$

由轴向位移边界条件 $u|_0^L=0$,可分别求得常数项 C_{11} 和 C_{22} 为:

$$C_{11}=\frac{A_{11}}{2L}\int_0^L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x-N^T,C_{22}=0。\tag{15}$$

将式(14)和式(15)代入式(9),并利用式(8)可求得 PFGM 夹芯梁的控制方程为:

$$A_{14}\left(1+\frac{1}{A_{13}}\left[\frac{A_{11}}{2L}\int_0^L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x-N^T\right]\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\left[\frac{A_{11}}{2L}\int_0^L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x-N^T\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0。\tag{16}$$

两端固支(C-C)和两端简支(S-S)的边界条件分别为:

$$w|_0^L=0,\phi|_0^L=0,\tag{17}$$

$$w|_0^L=0,M|_0^L=-A_{14}\frac{\partial\phi}{\partial x}-M^T。\tag{18}$$

此外，为了便于计算，引入下列无量纲量：

$$X=\frac{x}{L},W=\frac{w}{r},r=\sqrt{\frac{I}{A}},I=\frac{bh^3}{12},$$
$$\mu=\frac{A_{11}r^2}{A_{14}},n^T=\frac{N^TL^2}{A_{14}},\tag{19}$$
$$m^T=\frac{M^TL^2}{A_{14}r},F_1=\frac{A_{14}}{A_{13}L^2},$$

式中：r为截面的回转半径，I为截面的惯性矩，μ为无量纲拉伸与弯曲刚度之比，n^T为温度引起的无量纲附加轴力，m^T为温度引起的无量纲附加弯矩，F_1为无量纲剪力。

2　求解方案

首先，拓展了Nayfeh和Emam[12]针对单层或复合梁在纯机械载荷作用下的半逆解法，得到了PFGM夹芯梁在均匀热荷载作用下的过屈曲解析解；其次，针对PFGM夹芯梁过屈曲变形的多解支问题，采用最小自由能原理对其进行分析，以阐明PFGM夹芯梁的失稳类型和机理。

2.1　过屈曲解析解

将无量纲量(19)代入控制方程(16)，得无量纲控制方程和非线性积分项如下：

$$\frac{\partial^4W}{\partial X^4}+\lambda^2\frac{\partial^2W}{\partial X^2}=0,\tag{20}$$

$$\lambda^2=\frac{k^2}{1-F_1k^2},k^2=n^T-\frac{1}{2}\mu\int_0^1\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)^2\mathrm{d}X。\tag{21}$$

控制方程(20)的通解为：

$$W(X)=C_1+C_2\cos(\lambda X)+C_3\sin(\lambda X)+C_4X。\tag{22}$$

由于边界条件(式(17)和式(18))中含有ϕ，需对其进行转化。将式(14)代入式(9)，并利用梁跨中转角($\phi|_{x=L/2}=0,\ \partial w/\partial x|_{x=L/2}=0$)、边界条件(式(17)和式(18))和无量纲量(式(19))，可得C-C和S-S PFGM夹芯梁的无量纲边界条件分别为：

$$W|_0^1=0,\left.\frac{\partial W}{\partial X}\right|_0^1=0,\tag{23}$$

$$W|_0^1=0,\left.\frac{\partial^2W}{\partial X^2}\right|_0^1=-m^T(1+F_1\lambda^2)。\tag{24}$$

对于均匀芯层下的S-S PFGM夹芯梁，其边界条件(式(24))中不含温度引起的附加弯矩m^T。因此，将边界条件(式(23)和式(24))代入式(22)，可得到C-C和S-S梁的过屈曲解析解分别为：

$$W(X)=c\left(1-\frac{\lambda(1-\cos\lambda)}{\lambda-\sin\lambda}X-\cos(\lambda X)+\frac{1-\cos\lambda}{\lambda-\sin\lambda}\sin(\lambda X)\right),\tag{25}$$

$$W(X)=c\sin(\lambda X)。\tag{26}$$

将边界条件(式(23)和式(24))代入通解式(22)中，利用其对应的行列式为零，可得到C-C和S-S梁的特征根方程分别为：

$$2-2\cos\lambda-\lambda\sin\lambda=0,\tag{27}$$

$$\sin\lambda=0。\tag{28}$$

通过将过屈曲解析解(式(25)和式(26))代入非线性积分项(式(21))，可推导得出：

$$c=\pm2\sqrt{n^T(1+F_1\lambda^2)/\lambda^2-1}\Big/\sqrt{\mu(1+F_1\lambda^2)},\tag{29}$$

式中：c是与模态相关的一个常数，对两种边界均相同。因此，通过求解特征根方程(式(27)和式(28))，可得到不同屈曲模态时的λ值，进而令$c=0$即可确定该模态下的临界屈曲温度。

对于非均匀芯层下的S-S PFGM夹芯梁，其边界条件含温度引起的附加弯矩m^T。因此，将边界条件(式(24))代入通解(式(22))，可得其过屈曲解析解为：

$$W(X)=t\left(\cos(\lambda X)-1+\tan(\lambda/2)\sin(\lambda X)\right),\tag{30}$$

式中：

$$t=\pm\sqrt{\frac{2}{\mu f(\lambda)(F_1\lambda^2+1)}}\sqrt{\frac{n^T(1+F_1\lambda^2)}{\lambda^2}-1},\tag{31}$$

$$f(\lambda)=(\lambda-\sin\lambda)/[\lambda(1+\cos\lambda)],\tag{32}$$

λ为随热荷载变化的参数，其满足的方程可通过将过屈曲解析解(式(30))代入非线性积分项(式(21))获得：

$$\frac{\lambda^5(\cos(\lambda)+1)}{F_1\lambda^2+1}-n^T\lambda^3(\cos(\lambda)+1)+\frac{1}{2}\mu(m^T)^2(\lambda-\sin(\lambda))(F_1\lambda^2+1)^2=0,\tag{33}$$

式中：λ的取值范围为：$\lambda\neq0,\lambda\neq2(p-1)\pi;p=1,2,3,\cdots,n$。此外，通过求解方程(式(33))可求得热荷载作用下过屈曲解支对应的参数λ值，而λ会随着温度的增加而到达不同的区间，再结合式(30)可判断PFGM夹芯梁的屈曲路径。

2.2　过屈曲稳定性分析

由式(33)可以看出，λ在不同区间求解时，存在着多支解的现象，因此选择最小自由能原理[11]分析PFGM夹芯梁稳定性，从而确定PFGM夹芯

梁的失稳类型。W在热荷载下的自由能为：

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_0^1\overline{N}\frac{\partial U}{\partial X}\mathrm{d}X+\frac{1}{2}\int_0^1\overline{M}\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}\mathrm{d}X-\iiint\frac{C_E}{2}\frac{\Delta T^2}{T_0}\mathrm{d}V,\tag{34}$$

式中：

$$\overline{N}=\frac{1}{2}\mu\int_0^1\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)^2\mathrm{d}X-n^T,$$

$$\overline{M}=-\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}-(1+F_1\lambda^2)m^T,$$

C_E为功能梯度材料的比热容，是沿梁厚度变化的量。通过给定的温度，可利用式(34)比较同一温度下自由能的大小，从而确定PFGM夹芯梁的屈曲路径以及失稳类型。

3　结果和讨论

基于上述的过屈曲解析解及最小自由能原理[11]，研究PFGM夹芯梁在均匀热荷载下的屈曲路径、失稳类型及其机理。首先，将目前对临界屈曲温度和屈曲路径的解析预测与相关的结果进行了比较[15,17]；其次，讨论了材料参数对临界屈曲温度和屈曲路径的影响；最后，系统分析了均匀热荷载作用下PFGM夹芯梁的失稳类型及其机理。

3.1　模型的可靠性验证

为了验证模型在均匀热荷载下的可靠性，选择由Si_3N_4和SUS304形成的单层PFGM梁模型进行验证，其材料系数如表1所示，并取T_0=300 K。

图2(a)为C-C PFGM梁的临界屈曲温度与Liu等[15]结果的对比曲线。通过求解特征根方程(式(27))，可得到不同屈曲模态时的λ值，进而令c等于0，可得PFGM梁的临界屈曲温度。如图2(a)所示，随着梯度指数n的变化，临界屈曲温度呈现急剧下降的趋势，然而，随着梯度指数n的进一步增加，PFGM梁逐渐趋近于均匀梁，此时临界屈曲温度的变化趋势变缓。这一变化趋势与Liu等[15]临界屈曲温度的变化趋势相吻合，验证了本文模型的准确性。

此外，为了进一步验证模型的准确性，图2(b)显示了C-C PFGM梁的屈曲路径与She等[17]的结果比较。计算中，同样通过求解特征根方程(式(27))，并利用c和过屈曲解析解(式(25))，即可求解过屈曲路径。如图2(b)所示，本文模型的预测结果与She等[17]的结果吻合良好，更加证明了该模型的有效性和准确性。

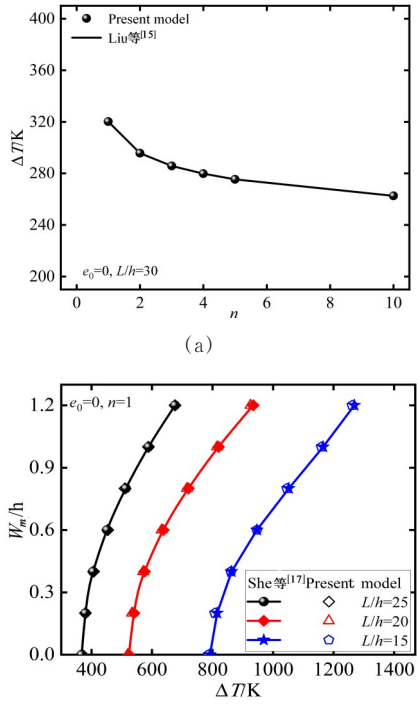


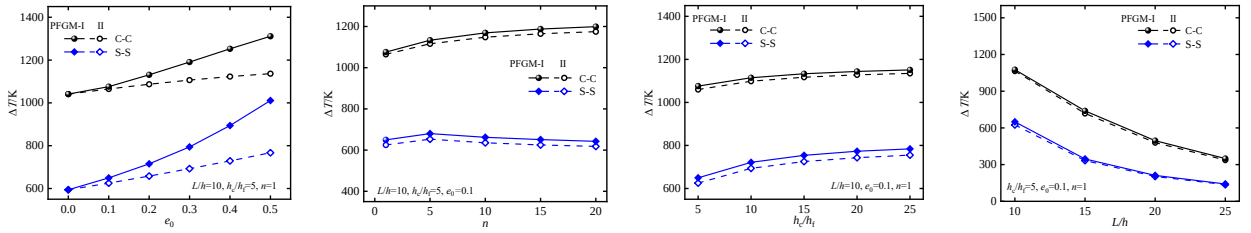
图2　均匀热荷载下C–C PFGM梁临界屈曲温度和屈曲路径与已有结果[15,17]的比较

Fig. 2　Comparison of the critical buckling temperature and buckling path of C–C FGM beams under uniform thermal loading with previous results[15,17]

3.2　材料参数的影响

图3给出了在均匀热荷载下材料参数对PFGM夹芯梁临界屈曲温度的影响，材料系数如表1所示。计算中，对于C-C PFGM夹芯梁，采用图2(a)的计算方法；对于S-S PFGM夹芯梁，通过求解超越方程(式(33))，λ出现多解支时对应的温度，即为临界屈曲温度。

图3(a)揭示了不论哪种孔隙分布，两种边界条件下的临界屈曲温度均随着孔隙率的增大而增大，呈现线性变化，且PFGM-Ⅰ较PFGM-Ⅱ有更好的抗屈曲能力；图3(b)展示了梯度指数对临界屈曲温度的影响。由图3(b)可见，在相同孔隙分布下C-C PFGM夹芯梁的临界屈曲温度随梯度指数的增加而增加，这与图2(a)的变化趋势正好相反，是由于芯层的上部材料弹性模量小，热膨胀系数大，而下部材料的弹性模量大，热膨胀系数小，从而导致临界屈曲温度随梯度指数的增加而增加的情况，反之则会出现图2(a)的变化趋势。需要注意的是，对于S-S梁，在相同孔隙分布下，临界屈曲温度随梯度指数呈现了非线性变化。



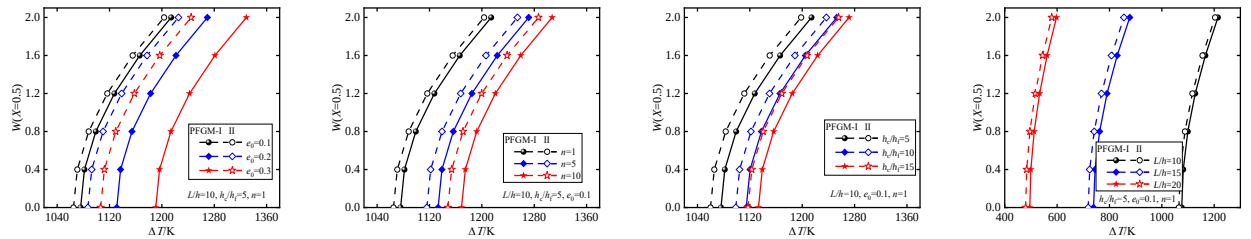
（a）　孔隙率　　（b）　梯度指数　　（c）　芯面比　　（d）　长细比

图3　均匀热荷载下材料参数对PFGM夹芯梁临界屈曲温度的影响

Fig. 3　Effect of material parameters on critical buckling temperature of PFGM sandwich beams under uniform thermal loading

图3(c)表明，在相同孔隙分布下，无论哪种边界条件，PFGM夹芯梁的临界屈曲温度均随着芯面比的增大而增大，这是由于芯面比的增大使得PFGM夹芯梁整体的弹性模量增大、热膨胀系数减小而导致的；图3(d)表明了PFGM夹芯梁的临界屈曲温度随着长细比的增大而减小。

图4和图5分别给出了材料参数(孔隙率、梯度指数、芯面比、长细比)对C-C和S-S PFGM夹芯梁屈曲路径的影响。利用过屈曲解析解(式(25)和式(30))，可分别求得两种边界条件下夹芯梁的屈曲路径。由图4可见，C-C PFGM夹芯梁在均匀热荷载的作用下发生分叉失稳；然而，对于S-S PFGM夹芯梁，由图5可见，其过屈曲路径在均匀热荷载的作用下则出现了多支解的现象，此时S-S PFGM夹芯梁较C-C PFGM夹芯梁的失稳类型已发生转变。此外，由图4和图5还可以看出，孔隙率、梯度指数和芯面比并不会影响屈曲路径的变化，仅影响PFGM夹芯梁的临界屈曲温度。



（a）　孔隙率　　（b）　梯度指数　　（c）　芯面比　　（d）　长细比

图4　均匀热荷载下材料参数对C-C PFGM夹芯梁屈曲路径的影响

Fig. 4　Effect of material parameters on the buckling path of C-C PFGM sandwich beams under uniform thermal loading

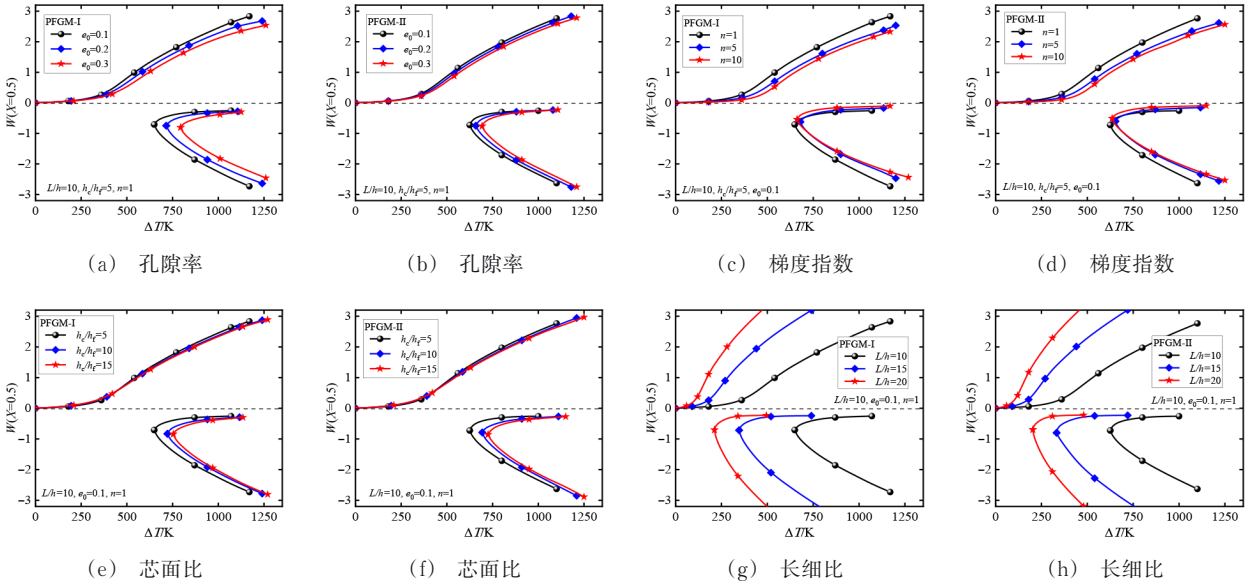
3.3　失稳类型及机理

图6详细地展示了在均匀热荷载作用下S-S PFGM夹芯梁的失稳类型及其机理。由图5可知，不论哪种孔隙分布，S-S PFGM夹芯梁在均匀热荷载作用下的屈曲路径都是一致的，因此，为了简化分析，这里选择PFGM-Ⅰ孔隙分布进行深入探讨。

图6(a)显示了均匀热荷载下S-S PFGM夹芯梁的屈曲路径。如图6(a)所示，当温升较低时，弯曲变形最初遵循独特的路径S_{11}，但是，当超过临界屈曲温度后，会出现3条额外的路径——S_{22}、S_{33}和S_{44}，这时S-S相较C-C的失稳类型已发生改变。此外，由于S-S PFGM夹芯梁的后屈曲路径中出现了多解支的现象，接下来将采用最小自由能原理进行预测。

图6(b)显示了S-S PFGM夹芯梁的自由能随温度的变化，以此来预测后屈曲路径。对于均匀热荷载下的S-S PFGM夹芯梁，如图6(b)所示，弯曲变形最初在低温上升时遵循单个平衡路径(S_{11})。然而，一旦超过临界屈曲温度，就会出现3个额外的平衡路径(S_{22}、S_{33}、S_{44})。在这些路径中，S_{22}和S_{44}的自由能高于S_{33}。因此，在没有外部能量输入的情况下，系统优先过渡到低能量分支S_{33}以保持平衡。综上所述，S-S PFGM夹芯梁在均匀热荷载下表现出跳跃失稳的现象。

接下来，将详细地阐述S-S PFGM夹芯梁发生跳跃失稳的机理。图6(c)显示了均匀热荷载下S-S PFGM夹芯梁的附加弯矩m^T随梯度指数n的变化。由图6(c)可以看出，附加弯矩随梯度指数的增大呈现非线性变化，具体来说，当梯度指数刚开始增大时，夹芯梁非对称性逐渐增强，附加弯矩

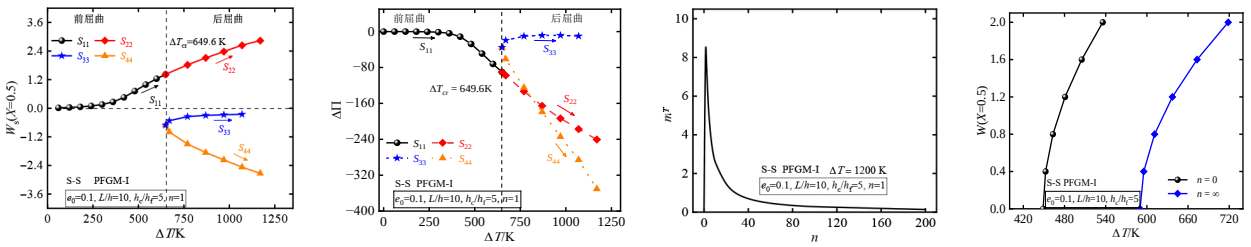


(a) 孔隙率　(b) 孔隙率　(c) 梯度指数　(d) 梯度指数

(e) 芯面比　(f) 芯面比　(g) 长细比　(h) 长细比

图 5　均匀热荷载下材料参数对 S–S PFGM 夹芯梁屈曲路径的影响

Fig. 5　Effect of material parameters on the buckling path of S–S PFGM sandwich beams under uniform thermal loading



(a) 屈曲路径　(b) 自由能　(c) 附加弯矩　(d) 屈曲路径

图 6　均匀热荷载下 S–S PFGM 夹芯梁的失稳类型及机理

Fig. 6　Types of instability and mechanism of S–S PFGM sandwich beams under uniform thermal loading

随之增大并到达峰值;而当梯度指数继续增大时,夹芯梁的芯层逐渐趋近于均匀芯层,非对称性减弱,附加弯矩也随之逐渐减小并趋近于0。特别指出,当梯度指数等于0或∞时,物理中性面和几何中性面重合,此时芯层变为均匀芯层并关于几何中性面对称,附加弯矩为0。因此在梯度指数等于0或∞时,S-S PFGM夹芯梁将发生分叉失稳,如图6(d)所示。

4　结论

基于Timoshenko一阶剪切理论、von Karman型几何非线性、物理中性面概念和Nayfeh半逆解法,推导了均匀热荷载作用下PFGM夹芯梁的非线性积分-微分边值问题的解析解,并通过最小自由能原理阐明了PFGM夹芯梁的屈曲失稳类型及其机理。结果表明:

1) 在均匀热荷载作用下,C-C PFGM夹芯梁发生分叉失稳。对于非均匀芯层下的S-S PFGM夹芯梁,由于梯度指数改变引起的附加弯矩的影响,其将发生跳跃失稳;然而在梯度指数为0或∞时,芯层变为均匀芯层并关于几何中性面对称,此时附加弯矩为0,其将发生分叉失稳。

2) PFGM-Ⅰ较PFGM-Ⅱ有更好的抗屈曲能力。此外,对于C-C PFGM夹芯梁,其临界屈曲温度随孔隙率、芯面比和梯度指数的增大而增大,随长细比的增加而减小。对于S-S PFGM夹芯梁,其临界屈曲温度随孔隙率、芯面比的增大而增大,随长细比的增加而减小,随梯度指数的增加呈现先上升后下降的非线性变化。因此,可通过调控上述参数,以提高PFGM夹芯梁的抗屈曲能力。

参考文献：

[1] Wang Xiwei, Yan Xiang, Li Hui, et al. Studies on sound absorption performance of porous materials at low temperature[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2019, 145(3_Supplement): 1805.

[2] Li Song, Zhang Han, Li Shuo, et al. Advances in hierarchically porous materials: fundamentals, preparation and applications[J]. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 2024, 202: 114641.

[3] Zhao Junheng, Li Meng, Chen Jiewei, et al. Energy-absorbing porous materials: bioinspired architecture and fabrication[J]. Nano Research, 2024, 17(2): 679-690.

[4] Gupta V, Kidane A, Sutton M. Dynamic characteristics of density-graded cellular materials for impact mitigation[J]. International Journal of Solids and Structures, 2024, 296: 112816.

[5] Chen Da, Gao Kang, Yang Jie, et al. Functionally graded porous structures: analyses, performances, and applications: a review[J]. Thin-Walled Structures, 2023, 191: 111046.

[6] 詹润涛，冯波，马文强．考虑剪切作用的梁元几何非线性损伤分析[J]．信阳师范学院学报(自然科学版)，2018，31(3)：499-504.

[7] 李清禄，王思瑶，张靖华．湿-热-机耦合梯度多孔材料梁的非线性力学行为[J]．航空材料学报，2022，42(3)：38-44.

[8] Teng Zhaochun, Wang Weibin, Gu Chunlong. Free vibration and buckling characteristics of porous functionally graded materials (FGMs) micro-beams based on the modified couple stress theory [J]. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2022, 102(4): e202100219.

[9] 孙昊栋，王娅娟，马连生．热载荷作用下梯度多孔材料梁弯曲及过屈曲力学行为的研究[J]．力学季刊，2022，43(1)：141-148.

[10] Kitipornchai S, Chen Da, Yang Jie, et al. Free vibration and elastic buckling of functionally graded porous beams reinforced by graphene platelets[J]. Materials & Design, 2017, 116: 656-665.

[11] Xi Yongyong, Lü Qiang, Zhang Nenghui, et al. Thermal-induced snap-through buckling of simply-supported functionally graded beams[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2020, 41(12): 1821-1832.

[12] Emam S A, Nayfeh A H. Postbuckling and free vibrations of composite beams[J]. Composite Structures, 2009, 88(4): 636-642.

[13] Chen Da, Yang Jie, Kitipornchai S. Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam[J]. Composite Structures, 2015, 133: 54-61.

[14] Ma L S, Lee D W. Exact solutions for nonlinear static responses of a shear deformable FGM beam under an in-plane thermal loading[J]. European Journal of Mechanics A/Solids, 2012, 31(1): 13-20.

[15] Liu Yijie, Su Shengkai, Huang Huaiwei, et al. Thermal-mechanical coupling buckling analysis of porous functionally graded sandwich beams based on physical neutral plane[J]. Composites Part B: Engineering, 2019, 168: 236-242.

[16] 苏盛开，黄怀纬．多孔功能梯度梁的热-力耦合屈曲行为[J]．复合材料学报，2017，34(12)：2794-2799.

[17] She Guilin, Yuan Fuhgwo, Ren Yiru. Thermal buckling and post-buckling analysis of functionally graded beams based on a general higher-order shear deformation theory[J]. Applied Mathematical Modelling, 2017, 47: 340-357.

责任编辑：申晓伟　郭红建