文章编号:1674-2974(2026)02-0098-11 DOI:10.16339/j.cnki.hdxbzkb.2026160

考虑齿面等接触应力的摆线齿廓分段修形

李俊阳[1,2],符忆[1,2†],舒永东[3],杜鹏[3],雷源[1,2]
(1. 重庆大学 高端装备机械传动全国重点实验室,重庆 400044;
2. 重庆大学 机械与运载工程学院,重庆 400044;
3. 南京高精船用设备有限公司,江苏 南京 211003)

摘 要:在传统的等距-移距修形摆线针轮啮合副接触分析的基础上,提出了一种考虑齿面等接触应力的摆线齿廓分段修形方法.首先,以参与啮合齿对平均压力角最小为依据对工作区间与非工作区间进行划分;然后,以各齿接触应力大小相等为目标使用多项式拟合工作区间修形函数,以具有合理的顶隙为目标使用三角函数拟合非工作区间修形函数,以齿廓过渡光滑为目标使用多项式拟合过渡区间修形函数;最后,将所拟合的修形函数以等距修形量的形式代入齿廓方程中,设计出修形后齿廓曲线,理论计算修形后各齿接触应力大小并进行有限元仿真验证方法的正确性.理论计算和仿真结果表明,相较于传统修形方法,该方法能够更灵活地控制齿廓形状,使摆线齿廓有更合理的顶隙与侧隙、更均匀的接触应力、更小的最大接触应力、更高的重合度,这为摆线轮的设计提供了一定的参考.

关键词:摆线轮;接触应力;齿廓修形;有限元分析
中图分类号:TH132.414 **文献标志码**:A

Segmental profile modification of cycloid tooth profile considering equal contact stress of tooth surface

LI Junyang[1,2],FU Yi[1,2†],SHU Yongdong[3],DU Peng[3],LEI Yuan[1,2]
(1. State Key Laboratory of Mechanical Transmission for Advanced Equipment,Chongqing University,Chongqing 400044,China;
2. College of Mechanical and Vehicle Engineering,Chongqing University,Chongqing 400044,China;
3. Nanjing High Accurate Marine Equipment Co.,Ltd.,Nanjing 211003,China)

Abstract: Based on the traditional "equidistant and displacement" modified cycloid pinwheel meshing pair contact analysis, a segmental modification method of the cycloid tooth profile was proposed, which considered the equal contact stress on the tooth surface. Initially, the working and non-working intervals were divided based on the minimum average pressure angle of the engaged tooth pairs. Subsequently, a polynomial fitting was used to fit the working interval modification function with the goal of equal contact stress of each tooth, a trigonometric function was used to fit the non-working interval modification function with the goal of reasonable top clearance, and a polynomial

* **收稿日期**:2024-11-05
基金项目:国家重点研发计划资助项目(2022YFB3404804),National Key Research and Development Program of China(2022YFB3404804);国家自然科学基金资助项目(52375041),National Natural Science Foundation of China(52375041);航空科学基金资助项目(202000020Q9001),Aeronautical Science Foundation of China(202000020Q9001);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2023CDJKYJH091,2023CDJXY-022),Fundamental Research Funds for the Central Universities(2023CDJKYJH091,2023CDJXY-022)
作者简介:李俊阳(1982—),男,浙江金华人,重庆大学副研究员,博士
† 通信联系人,E-mail:fuyi_2022@126.com

fitting was used to fit the transition interval modification function with the goal of a smooth transition of the tooth contour. Ultimately, the fitted modification functions were incorporated into the tooth profile equation in the form of equidistant modification amounts, resulting in the designed modified tooth profile curve. Theoretical calculations of post-modification contact stress and finite element simulation validation confirmed the method's accuracy. The theoretical calculation and simulation results show that, compared with the traditional modification method, this method can control the tooth profile shape more flexibly, so that the cycloid tooth profile has more rational clearances, more uniform contact stress distribution, smaller maximum contact stress, and higher contact ratio, providing a reference for cycloidal gear design.

Key words: cycloidal gear; contact stress; tooth profile modification; finite element analysis

摆线针轮传动由于具有承载能力强、低回差、高精度、高效率等优点,被广泛应用于工业机器人领域[1-4].理论标准摆线齿轮与针齿啮合是无侧隙啮合,同时参与啮合的齿对数约为半数齿,但实际应用中,无侧隙或较小的侧隙会由于制造精度和安装误差等问题而产生轮齿干涉,因此,摆线轮齿廓修形是不可或缺的一步[5].而修形方法的不恰当会带来啮合齿数减少、个别齿面接触应力大、回程误差增大等问题.因此,合理的修形方法是摆线针轮传动研究的热点和难点[6].

传统的摆线轮齿廓修形方式有等距修形、移距修形和转角修形,这三种修形方法除转角修形不能单独使用外,其他两种既可以单独使用也可以组合使用[7].在传统修形方法的基础上,许多学者对摆线轮修形进行了大量的研究.关天民等[8]采用正等距、负移距的组合修形方法提出了一种“反弓”齿廓,通过受力分析表明该齿廓可以有效地减小最大接触力,从而提高齿面承载能力;岳朗等[5]基于压力角变化对摆线轮进行分段修形,使摆线轮的啮合力分布更加均匀;丁国龙等[9]以同时啮合各齿之间接触应力分布方差最小为优化目标,在转角修形量范围内,搜索出最佳的转角修形量以及对应的组合修形量,该方法显著改善了齿面受力状况,延长摆线轮使用寿命;李天兴等[10]针对常规修形方法计算复杂、齿廓曲线形状控制不够灵活等问题,综合考虑了压力角与修形量的变化,提出了摆线轮工作段齿廓的二次分段修形方法,使用该方法修形后的齿廓与理论齿廓更加吻合且传动误差和回程误差显著减小;赵致勃等[11]在综合分析组合修形对反弓齿廓啮合力和接触应力的影响的基础上,提出了一种两段修形方法,该方法可以有效地改善摆线轮齿廓的接触应力和延长摆线轮的使用寿命;Velex等[12]基于模块化的三维多齿啮合齿轮模型研究了一种通过修形来最小化多齿啮合系统中动态载荷的方法,并通过实例验证了该方法的正确性且可以应用于各种齿形; Song等[13]基于遗传算法以接触力和传动误差为优化目标提出了一种多目标优化修形方法;Gao等[14]研究了偏心距、针齿分布圆半径、针齿半径、等距移距修形量等参数对减速器体积、接触应力和扭转刚度的影响,并在此基础上使用遗传算法,以体积、接触应力和刚度为优化目标,提出了单目标、双目标、三目标优化模型,优化后减速器体积、最大接触应力显著减小,扭转刚度显著提高;Zhao等[15]考虑了背隙、传动误差和扭转刚度,通过使用差分进化的改进并行自适应遗传算法实现了摆线齿轮的多目标优化设计,以提高RV减速器的定位精度和承载能力;Li等[16]以压力角和修形量为参数,以啮合背隙作为约束,提出了一种摆线齿廓修形方法,实验结果表明,该方法在传动精度方面优于传统修形方法.

上述修形方法对摆线轮的传动性能都有显著的提高,为进一步提升其性能,本文综合考虑齿面接触应力、侧隙和顶隙等因素,提出了一种考虑齿面接触应力均等的分段修形方法,使得摆线轮各啮合齿对上的接触应力分布更为均匀,同时可以自由选定侧隙、顶隙和同时啮合齿对数,在齿形控制上更为灵活.

1　摆线针轮传动受力分析

1.1　摆线轮齿廓方程

根据文献[17]所介绍的方法,可推导出经过等距、移距修形后的齿廓方程为:

$$\begin{cases} x=(r_p+\Delta r_p)\sin\left[(i-1)\varphi\right]-e\sin(i\varphi)+\\ (r_{rp}+\Delta r_{rp})\dfrac{K\sin(i\varphi)-\sin\left[(i-1)\varphi\right]}{\sqrt{1+K^2-2K\cos\varphi}}\\ y=(r_p+\Delta r_p)\cos\left[(i-1)\varphi\right]-e\cos(i\varphi)-\\ (r_{rp}+\Delta r_{rp})\dfrac{-K\cos(i\varphi)+\cos\left[(i-1)\varphi\right]}{\sqrt{1+K^2-2K\cos\varphi}} \end{cases} \tag{1}$$

式中：r_p为针齿中心圆半径；i为行星架固定后的定轴轮系传动比，$i=z_p/z_c$，其中z_p为针齿数，z_c为摆线齿数；φ为针轮相对于转臂的转角；e为偏心距；r_{rp}为针齿半径；Δr_p为移距修形量，取修形时砂轮远离工作台中心方向为正值，Δr_{rp}为等距修形量，取修形时砂轮半径增大为正值，当Δr_p与Δr_{rp}的值均为0时，方程表示未修形的标准摆线轮齿廓方程；K为修形后的短幅系数，$K=ez_p/(r_p+\Delta r_p)$.

1.2 摆线轮啮合力理论计算

如图1所示，修形后摆线轮变小，其与针轮上的理论啮合点有一段修形间隙$\Delta S(\varphi)$，因此摆线轮在转过一个相对转角β后才能与针齿接触.在空载状态下，只有一个针齿和摆线轮啮合，其他的摆线轮齿与针齿存在一个初始啮合间隙$\Delta S'(\varphi)$，只有加载后摆线轮齿上啮合点处法向位移大于对应的初始啮合间隙时，对应的齿对才能参与啮合.因此，修形后摆线齿轮的啮合力分析需要综合考虑参与啮合齿数与变形量的影响.

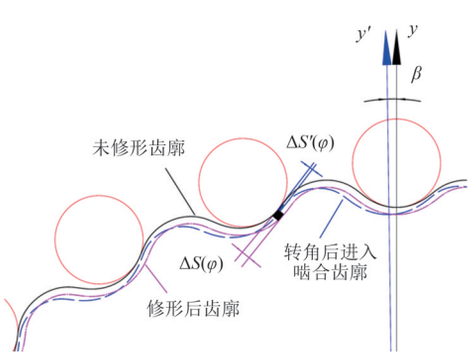


图1 摆线轮修形后间隙

Fig.1 The clearance of the cycloidal gear after the modification

修形间隙$\Delta S(\varphi)$、相对转角β、初始啮合间隙$\Delta S'(\varphi)$计算公式如式(2)~(4)所示[8, 18].

$$\Delta S(\varphi)=\frac{-\Delta r_p(1-K_1\cos\varphi)}{\sqrt{1+K_1^2-2K_1\cos\varphi}}+\Delta r_{rp} \tag{2}$$

$$\beta=\frac{-\Delta r_p(1-K_1\cos\varphi_0)+\Delta r_{rp}\sqrt{1+K_1^2-2K_1\cos\varphi_0}}{ez_c\sin\varphi} \tag{3}$$

$$\Delta S'(\varphi)=\Delta S(\varphi)-\frac{\beta(\varphi_0)ez_c\sin\varphi}{\sqrt{1+K_1^2-2K_1\cos\varphi}} \tag{4}$$

式中：K_1为短幅系数，$K_1=ez_p/r_p$；φ_0为相对转角β所对应的针轮相对于转臂的转角，$\varphi_0=\arccos K_1$.将φ_0代入式(3)、式(4)中可得

$$\beta=-\Delta r_p(1-K_1^2)^{1/2}+\Delta r_{rp}ez_c \tag{5}$$

$$\Delta S'(\varphi)=\Delta r_{rp}\left(1-\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+K_1^2-2K_1\cos\varphi}}\right)-\Delta r_p\frac{1-K_1\cos\varphi-\sqrt{1-K_1^2}\sin\varphi}{\sqrt{1+K_1^2-2K_1\cos\varphi}} \tag{6}$$

在对摆线轮齿面进行受力分析时，假设变形仅发生在啮合点处，其余位置不发生变形[19].当摆线齿第i个齿参与啮合时，齿面产生形变导致摆线轮整体位移，当其余啮合点法向位移δ_i大于该点的初始啮合间隙$\Delta S'(\varphi)$时，对应的齿对参与啮合.法向位移δ_i的计算公式[20]为

$$\delta_i=l_i\beta=\frac{\sin\varphi_i}{\sqrt{1+K_1^2-2K_1\cos\varphi_i}}\delta_{\max} \tag{7}$$

$$l_i=\frac{ez_c\sin\varphi_i}{\sqrt{1+K_1^2-2K_1\cos\varphi_i}} \tag{8}$$

式中：i为针齿序号，$i=1\sim z_p/2$；φ_i为针轮第i个针齿相对于转臂的转角；l_i为摆线轮中心到第i个针齿啮合点处齿廓法线的距离；$\delta_{\max}$为最大法向位移.

最大法向位移$\delta_{\max}$的计算公式为

$$\delta_{\max}=\omega_{\max}+f_{\max} \tag{9}$$

式中：$\omega_{\max}$为接触力最大的啮合点处接触变形量；$f_{\max}$为接触力最大的啮合点处弯曲变形量.由于针齿半装在针齿壳内，其弯曲变形量极小，因此忽略不计[21]，则由赫兹公式可得出该点法向位移$\delta_{\max}$计算公式为

$$\delta_{\max}=\frac{2(1-\mu^2)F_{\max}}{E\pi b}\left(\frac{2}{3}+\ln\frac{16r_{rp}|\rho|}{c^2}\right) \tag{10}$$

$$c=4.99\times10^{-3}\sqrt{\frac{2(1-\mu^2)}{E}\frac{F_{\max}}{b}\frac{2|\rho|r_{rp}}{|\rho|+r_{rp}}} \tag{11}$$

$$\rho=r_{rp}+\frac{r_p(1+K_1^2-2K_1\cos\varphi)^{3/2}}{K_1(z_p+1)\cos\varphi-(1+z_pK_1^2)} \tag{12}$$

$$F_{\max}=\frac{T}{\sum_{i=m}^{i=n}\left[\dfrac{l_i}{ez_c}-\dfrac{\Delta S'(\varphi)}{\delta_{\max}}\right]l_i} \tag{13}$$

式中：μ为摆线轮与针轮材料的泊松比；E为摆线轮与针轮材料的弹性模量；$F_{\max}$为最大啮合力；b为摆线轮齿宽；ρ为摆线轮在最大啮合力处的齿廓曲率半

径;T为摆线轮承受的扭矩.

由式(10)~(13)可知,求最大法向位移δ_{max}需要知道最大啮合力F_{max},而求解最大啮合力F_{max}又需要已知该点对应的法向位移δ_{max}.因此,对于δ_{max}、F_{max}的求解可以先假设一个初值F_{max0},用其求出δ_{max0},再依次循环求解出F_{max1}、δ_{max1}、…、F_{maxi}、δ_{maxi},直至满足$(F_{maxi}-F_{max(i-1)})/F_{maxi}\leqslant 0.5\%$,即视为求解收敛,此时$F_{max}=F_{maxi}$,$\delta_{max}=\delta_{maxi}$.

求解出δ_{max}、F_{max}后,各齿啮合力、接触应力可由式(14)、式(15)得到

$$F_i=\frac{\delta_i-\Delta S'(\varphi_i)}{\delta_{max}}F_{max} \tag{14}$$

$$\sigma_i=0.418\sqrt{\frac{E_eF_i}{b\rho_{ei}}} \tag{15}$$

式中:E_e为当量弹性模量;ρ_{ei}为当量曲率半径,$\rho_{ei}=|\rho_i r_{rp}/(\rho_i-r_{rp})|$,$\rho_i$可由式(12)计算得出.

取摆线轮设计参数如表1所示,参照上述方法计算得到各齿接触应力分布如表2所示.

表1　摆线轮的主要几何参数

Tab.1　Main geometric parameters of cycloid gear

参数	数值
针齿数z_p	57
摆线齿数z_c	56
针齿中心圆半径r_p/mm	35
针齿半径r_{rp}/mm	1.2
偏心距e/mm	0.45
等距修形量Δr_{rp}/mm	0.003
移距修形量Δr_p/mm	−0.002
摆线轮齿宽b/mm	9
泊松比μ	0.28
弹性模量E/MPa	2.19×10^5
额定扭矩T/(N·m)	50

表2　等距移距修形各齿接触应力

Tab.2　Contact stress of each tooth of modifications with equidistant and displacement

针齿序号	接触应力σ/MPa	针齿序号	接触应力σ/MPa	针齿序号	接触应力σ/MPa
1	0	9	844.95	17	322.33
2	0	10	906.78	18	0
3	0	11	924.93	19	0
4	190.16	12	903.32	20	0
5	328.56	13	848.86	21	0
6	470.39	14	767.24	22	0
7	612.85	15	660.12	23	0
8	742.99	16	521.67	24	0

由表2可以看出,传统等距移距的组合修形后,摆线轮由理论齿形的半数齿参与啮合变为仅4~17号齿参与啮合,且参与啮合的各齿面接触应力相差较大.此外,1~3号以及18~z_p/2号齿对都未参与啮合,但由于等距移距修形的特性,这些不参与工作的齿廓区间的径向间隙依旧很小,而为了保证齿轮正常工作中具有良好的润滑,摆线轮的齿顶与齿根处需要存在合理的径向间隙[22].

基于上述原因,为使摆线齿廓有更优的齿廓间隙、更均匀的接触应力,本文提出了一种分段修形的方法.

2　齿面等接触应力分段修形

由上一节可知,修形后摆线轮存在部分区间不参与啮合,该区间齿廓形状不影响摆线齿轮的传动精度与承载能力,故而和参与啮合区间相比不需要较小的啮合间隙.因此,可以将齿廓分为非工作段与工作段分别进行修形.

2.1　分段区间确定

在传动机构中,压力角越小,作用力沿速度方向的分力越大,机构的传动性能越好.因此,以各啮合点的平均压力角最小作为齿廓工作区间与非工作区间区分的依据.

摆线齿轮中压力角的计算公式如下[5]:

$$\alpha_i=\pi-\arccos\frac{\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{v}_i}{|\boldsymbol{F}_i||\boldsymbol{v}_i|}=\arccos\left(\boldsymbol{n}_i\cdot\frac{\boldsymbol{v}_i}{|\boldsymbol{v}_i|}\right)=$$
$$\pi-\arccos\left(\frac{\mathrm{d}y_i}{\sqrt{\mathrm{d}x_i^2+\mathrm{d}y_i^2}}\frac{-y_i}{\sqrt{x_i^2+y_i^2}}+\frac{-\mathrm{d}x_i}{\sqrt{\mathrm{d}x_i^2+\mathrm{d}y_i^2}}\frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+y_i^2}}\right) \tag{16}$$

式中:$\boldsymbol{F}_i$为啮合点的接触力;$\boldsymbol{n}_i$为啮合点法向单位向量;$\boldsymbol{v}_i$为啮合点相对摆线轮中心的速度;x_i、y_i为啮合点坐标,可由式(1)计算.取表1中的设计参数,可得出压力角变化曲线如图2所示.

由图2可看出,在摆线轮的齿顶(φ=180°)与齿根(φ=0°)周围,压力角接近90°,该部分传力性能差,因此可将该部分划为非工作区间,其余部分则划为工作区间.取参与啮合齿对的平均压力角最小为目标以确定两区间的交界点,设置同时参与啮合的齿

数为n,则各啮合点处压力角关系满足式(17)时,参与啮合齿对的平均压力角最小.如图3所示,此时φ_j与φ_{j+n}为所计算出的工作区间与非工作区间的交界点.

$$\bar{\alpha}_j = \min\left\{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \cdots, \bar{\alpha}_{z_p-n}\right\} = \frac{\sum_{j}^{j+n}\alpha(\varphi)}{n} \tag{17}$$

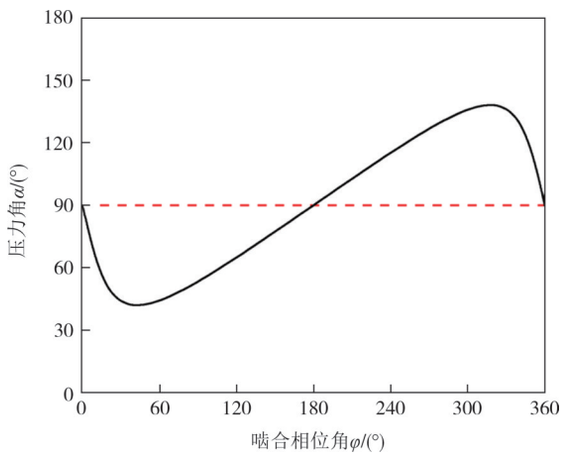


图2 压力角变化曲线图

Fig.2 Change curve diagram of pressure angle

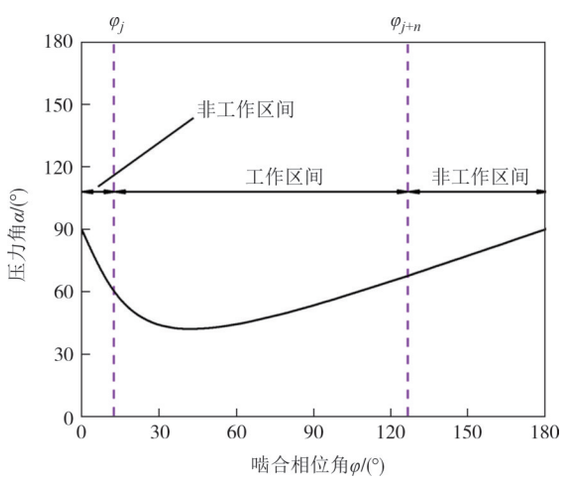


图3 区间分段示意图

Fig.3 Schematic diagram of interval segments

2.2 修形函数确定

本文所提出的修形函数总共由5段函数组成,分别为2段非工作段、2段过渡段、1段工作段,如图4所示.

2.2.1 工作区间修形量

由式(15)可知,当各啮合点的接触应力大小相等,即满足式(18)时,各啮合点接触力关系如式(19)所示.

$$\sigma_j = \sigma_{j+1} = \cdots = \sigma_{j+n} \tag{18}$$

$$F_i = \frac{\rho_{ei}}{\rho_{ej}}F_j = \left|\frac{\rho_i(\rho_j - r_{rp})}{\rho_j(\rho_i - r_{rp})}\right|F_j \tag{19}$$

值得注意的是,摆线轮从齿根到齿顶的啮合过程中会出现由内接触到外接触的转变,记该临界点为φ_k.如图5和图6所示,内接触变为外接触使得曲率半径出现符号的变化,并导致当量曲率半径在0~φ_k区间内当量曲率ρ_e值的大小相差过大.

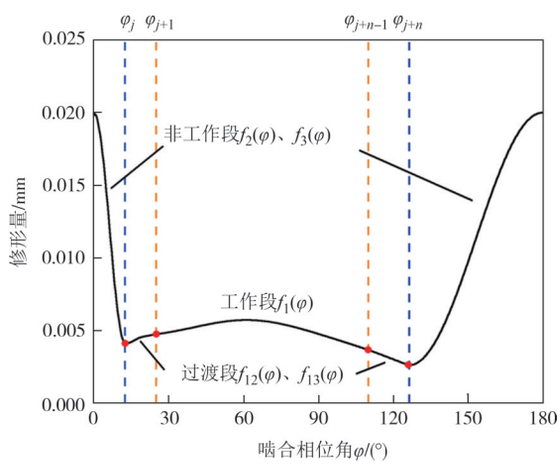


图4 修形函数分段示意图

Fig.4 Segment diagram of the modification function

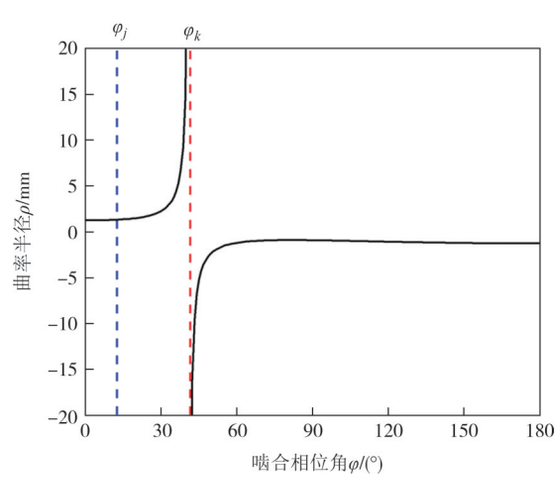


图5 曲率半径变化曲线

Fig.5 Curve of curvature radius change

若在φ_j~φ_k区间接触力依旧满足式(19),将出现φ_j~φ_k区间接触力和变形量远远大于其余啮合点的情况,这显然与设计预期不符.

为避免该问题,本文将φ_j~φ_k区间的接触应力设置为由0递增到一个定值,φ_k~φ_{j+n}区间的接触应力则设置为满足接触应力大小相等的条件.即将式(18)、式(19)修正为:

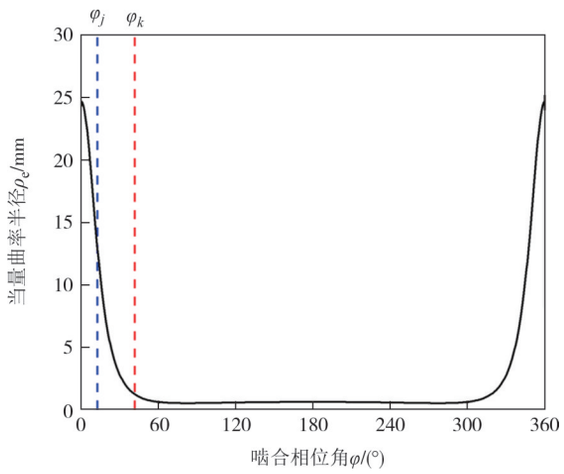


图6　当量曲率半径变化曲线

Fig.6　Curve of equivalent curvature radius change

$$\begin{cases}\sigma_i=\dfrac{i-j}{k-j}\sigma_k & (j\leqslant i<k)\\ \sigma_i=\sigma_k & (i\geqslant k)\end{cases}\tag{20}$$

$$\begin{cases}F_i=\dfrac{(i-j)^2}{(k-j)^2}\dfrac{\rho_{ei}}{\rho_{ek}}F_k & (j\leqslant i<k)\\ F_i=\dfrac{\rho_{ei}}{\rho_{ek}}F_k & (i\geqslant k)\end{cases}\tag{21}$$

联立式(8)(12)(21)(22),即可求出任一啮合点的接触力F_i.

$$T=\sum_{i=j}^{j+n}F_i l_i\tag{22}$$

记所求出的最大接触力为$F_{\max}$,将其带入式(10)中计算最大法向位移$\delta_{\max}$.已知$\delta_{\max}$后各啮合点法向位移δ_i可由下式求出:

$$\delta_i=\frac{\delta_{\max}}{l_{F\max}}l_i=\frac{\delta_{\max}}{l_{F\max}}\frac{ez_c\sin\varphi_i}{\sqrt{1+K_1^2-2K_1\cos\varphi_i}}\tag{23}$$

式中:$l_{F\max}$为接触力最大的啮合点处力臂长度.

将δ_i、$\delta_{\max}$、F_i、$F_{\max}$代入式(14)中即可求出各啮合点的初始啮合间隙$\Delta S'(\varphi_i)$,再由式(24)求出修形间隙$\Delta S(\varphi_i)$.

$$\Delta S(\varphi_i)=\Delta S'(\varphi_i)+l_i\frac{\delta_n}{l_{F\max}}\tag{24}$$

式中:δ_n为摆线轮最小侧隙,可依据加工误差和传动精度的要求自由设置大小.

为了由离散的修形间隙量$\Delta S(\varphi_i)$获得连续的修形函数,采用多项式拟合函数$f_1(\varphi)$以逼近各啮合齿所期望的修形间隙量.低阶多项式难以精确逼近离散点,导致难以实现等接触应力的效果,而更高阶次易导致过拟合现象且计算效率显著下降,本文综合考虑拟合精度与计算效率,选取七次多项式进行函数拟合.

为使工作段齿廓与非工作段齿廓过渡平滑,需要在两区间之间添加一段过渡函数,因此在工作段区间两端各预留出一段作为过渡区间,其中过渡区间的范围定为一个摆线齿对应的啮合相位角($2\pi/z_c$),即φ_{j-1}~φ_j与φ_{j+n-1}~φ_{j+n}作为过渡区间,故$f_1(\varphi)$的取值范围为$\varphi_{j-1}\leqslant\varphi\leqslant\varphi_{j+n-1}$.

2.2.2　非工作区间修形量

由于非工作区间的齿廓不参与啮合,不会直接影响传动精度,因此可以有较大的修形间隙$\Delta S(\varphi_i)$以便于制造和装配.

同时,为使齿顶与齿根的齿廓过渡平滑,修形函数在起始和终止处需满足斜率为0的要求,而三角函数不但天然满足波峰、波谷斜率数为0的约束,而且其幅值可以直观地对应齿顶和齿根的修形量,便于控制顶隙参数,因此本文采用三角函数作为非工作区间的修形函数.

具体修形函数如式(25)所示.式中,$f_2(\varphi)$的取值范围为$0\leqslant\varphi<\varphi_j$,$f_3(\varphi)$的取值范围为$\varphi_{j+n}\leqslant\varphi\leqslant\pi$;$\delta_h$为摆线轮顶隙,可依据加工误差和润滑要求自由设置.

$$\begin{cases}f_2(\varphi)=\dfrac{\delta_h-f_1(\varphi_j)}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{\varphi_j}\varphi\right)+\dfrac{\delta_h+f_1(\varphi_j)}{2}\\ f_3(\varphi)=\dfrac{\delta_h+f_1(\varphi_{j+n})}{2}\cos\left[\dfrac{\pi}{\pi-\varphi_{j+n}}(\varphi-\pi)\right]+\dfrac{\delta_h-f_1(\varphi_{j+n})}{2}\end{cases}\tag{25}$$

2.2.3　过渡区间修形量

为使修形后齿廓过渡平滑,工作段齿廓与非工作段齿廓之间的修形函数$f_{12}(\varphi)$与$f_{13}(\varphi)$需要在两端点数值相等、斜率相等,即满足下式

$$\begin{cases}f_{12}(\varphi_{j-1})=f_2(\varphi_{j-1}),\ f_{12}(\varphi_j)=f_1(\varphi_j)\\ f'_{12}(\varphi_{j-1})=f'_2(\varphi_{j-1}),\ f'_{12}(\varphi_j)=f'_1(\varphi_j)\end{cases}\tag{26}$$

$$\begin{cases}f_{13}(\varphi_{j+n})=f_3(\varphi_{j+n}),\ f_{13}(\varphi_{j+n-1})=f_1(\varphi_{j+n-1})\\ f'_{13}(\varphi_{j+n})=f'_3(\varphi_{j+n}),\ f'_{13}(\varphi_{j+n-1})=f'_1(\varphi_{j+n-1})\end{cases}\tag{27}$$

为简单、快捷地拟合出满足上述方程组的函数,选取四次多项式作为修形函数对方程组进行求解,

其中，$f_{12}(\varphi)$的取值范围为$\varphi_j \leqslant \varphi < \varphi_{j+1}$，$f_{13}(\varphi)$的取值范围为$\varphi_{j+n-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{j+n}$.

2.2.4 修形后齿廓方程

由式(2)可知，当移距修形量$\Delta r_p=0$时，存在$\Delta S(\varphi)=\Delta r_{rp}$，即此时修形间隙与等距修形量大小相等.因此，为简化计算，将各段拟合的修形函数以等距修形量的形式代入式(1)中即可得到所期望的修形后齿廓，其齿廓方程如式(28)、式(29)所示，齿廓修形整体设计流程如图7所示.

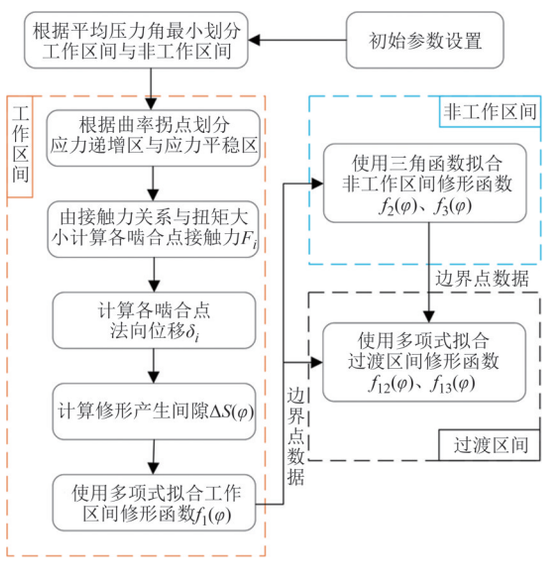


图7 函数拟合流程图

Fig.7 Flow chart of function fitting

$$\begin{cases} x=\left[r_{rp}+f(\varphi)\right]\dfrac{K\sin(i\varphi)-\sin\left[(i-1)\varphi\right]}{r_p\sin\left[(i-1)\varphi\right]-e\sin(i\varphi)}+\sqrt{1+K^2-2K\cos\varphi} \\ y=-\left[r_{rp}+f(\varphi)\right]\dfrac{-K\cos(i\varphi)+\cos\left[(i-1)\varphi\right]}{r_p\cos\left[(i-1)\varphi\right]-e\cos(i\varphi)}+\sqrt{1+K^2-2K\cos\varphi} \end{cases} \tag{28}$$

$$f(\varphi)=\begin{cases} f_2(\varphi),(0\leqslant\varphi<\varphi_j) \\ f_{12}(\varphi),(\varphi_j\leqslant\varphi<\varphi_{j+1}) \\ f_1(\varphi),(\varphi_{j+1}\leqslant\varphi<\varphi_{j+n-1}) \\ f_{13}(\varphi),(\varphi_{j+n-1}\leqslant\varphi<\varphi_{j+n}) \\ f_3(\varphi),(\varphi_{j+n}\leqslant\varphi\leqslant\pi) \end{cases} \tag{29}$$

3 实例分析

3.1 齿廓修形及应力分析

以表3中的齿廓设计参数为例，利用上述方法对摆线轮进行修形，所得的修形函数如式(30)所示，图8为理论齿廓、等距移距修形齿廓、等接触应力修形齿廓三者的对比，其中等距移距修形采用表1中的设计参数.

表3 等接触应力修形的几何参数

Tab.3 The geometric parameters of modifications with equal contact stresses

参数	数值	参数	数值
针齿数z_p	57	摆线轮顶隙δ_h/mm	0.02
摆线齿数z_c	56	摆线轮齿宽b/mm	9
针齿中心圆半径r_p/mm	35	泊松比μ	0.28
针齿半径r_{rp}/mm	1.2	弹性模量E/MPa	2.19×10^5
偏心距e/mm	0.45	额定扭矩T/(N·m)	50
摆线轮最小侧隙δ_n/mm	0.005		

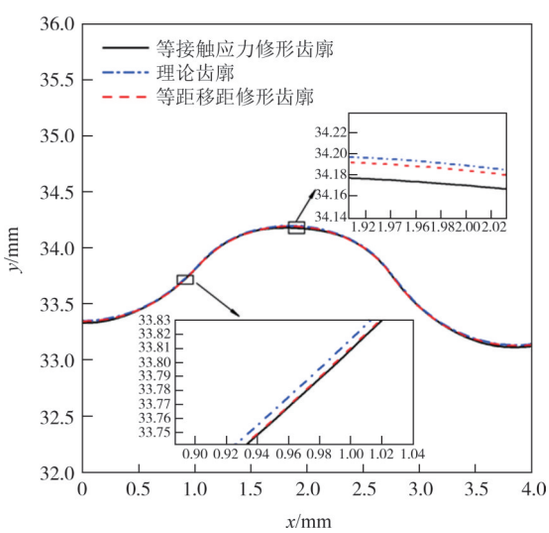


图8 齿廓对比

Fig.8 Comparison of tooth profiles

由图8可以看出，等接触应力修形齿廓与等距移距修形的侧隙大小相近，约为0.004 mm；而等接触应力修形齿廓的顶隙约为0.02 mm，远大于等距移距修形的0.005 mm.因此，在不影响侧隙大小的条件下，等接触应力修形齿廓有更大的顶隙，且由于顶隙部分位于非工作区，不参与啮合，从而保证了齿轮正常工作中具有良好的润滑且降低对加工、安装精度的要求，但不直接影响齿轮的承载能力.

使用第1节中所介绍的方法对修形后的摆线齿轮接触应力进行计算，最终计算出的等接触应力修形齿廓各齿接触应力大小如表4所示，两种修形方式的各齿接触应力大小对比如图9所示.

由表2、表4对比可知，等接触应力修形齿廓的

表 4　等接触应力修形各齿接触应力

Tab.4　Contact stress of each tooth of modifications with equal contact stresses

针齿序号	接触应力 σ/MPa	针齿序号	接触应力 σ/MPa	针齿序号	接触应力 σ/MPa
1	0	9	694.71	17	700.97
2	0	10	706.39	18	696.09
3	116.92	11	699.45	19	694.07
4	224.16	12	690.47	20	696.98
5	340.75	13	688.81	21	694.95
6	460.57	14	694.13	22	234.64
7	568.91	15	700.77	23	0
8	649.99	16	703.51	24	0

最大接触应力为706.39 MPa,相较于等距移距修形的924.93 MPa下降了23.63%;非零数据的平均接触应力由646.08 MPa下降为582.86 MPa,下降了9.79%;非零数据的均方差由244.6 MPa下降为193.99 MPa,下降了20.69%;同时啮合齿数由14齿提高到20齿.

由上述对比可知,等接触应力修形齿廓有以下优点:1)在具有较小的侧隙的同时具有较大的顶隙以降低对加工、安装精度的要求,且侧隙值与顶隙值可通过参数分别设置,顶隙值不会直接影响齿轮工作区间的啮合特性;2)最大接触应力、平均接触应力、接触应力均方差较等距移距修形齿廓都有显著的减小,齿面接触应力分布更加均匀;3)同时啮合齿对数增多,重合度显著提高.

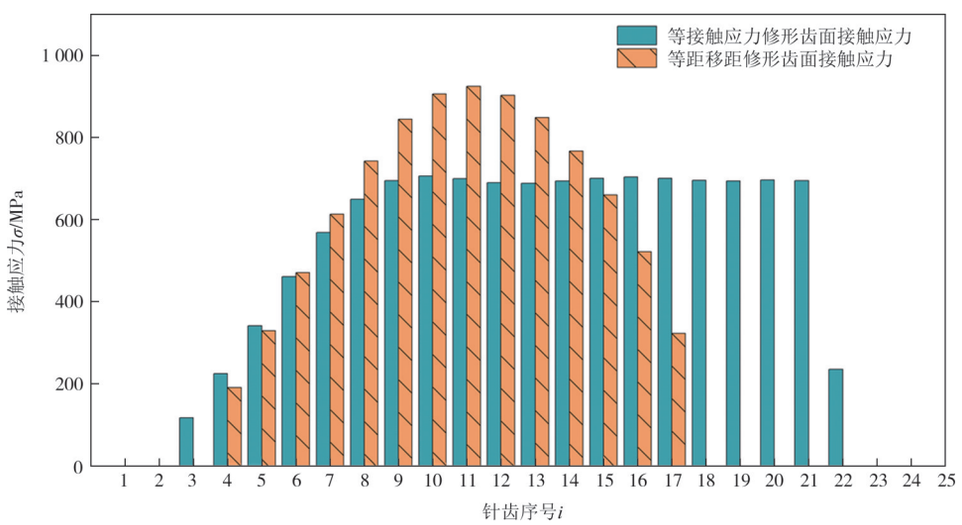


图 9　不同修形方式接触应力对比

Fig.9　Comparison of contact stress of different modification methods

$$\begin{cases} f_2 = 0.007\,95\cos(14\varphi) + 0.012\,05 & (0 \leqslant \varphi < \pi/14) \\ f_{12} = -0.424\,092\,5\varphi^3 + 0.367\,723\,6\varphi^2 - 0.100\,968\,3\varphi + 0.013\,032\,7 & (\pi/14 \leqslant \varphi < 3\pi/28) \\ f_1 = 0.002\,339\,6\varphi^7 - 0.022\,042\,8\varphi^6 + 0.084\,052\,7\varphi^5 - 0.165\,316\,6\varphi^4 + 0.177\,193\,4\varphi^3 - \\ \qquad 0.102\,888\,9\varphi^2 + 0.031\,843\,1\varphi + 0.000\,507\,5 & (3\pi/2\,828 \leqslant \varphi < 19\pi/28) \\ f_{13} = 0.281\,540\,7\varphi^3 - 1.831\,179\,9\varphi^2 + 3.965\,210\,7\varphi - 2.855\,687\,8 & (19\pi/28 \leqslant \varphi < 5\pi/7) \\ f_3 = 0.008\,69\cos(3.5\varphi - 3.5\pi) + 0.011\,31 & (5\pi/7 \leqslant \varphi \leqslant \pi) \end{cases} \tag{30}$$

3.2　有限元仿真验证

为验证理论计算的正确性,本文使用ANSYS Workbench对模型进行静力学仿真,模型的各项参数采用表3中的数据.

为了提高计算效率,本文对仿真模型进行了以下简化:1)将针齿与针齿壳简化为一体式结构;2)将摆线轮与针轮简化为平面应力状态分析以减少网格数量[23].

针轮外圆柱面施加固定约束;摆线轮内圆柱面施加远端位移约束,仅保留其绕Z轴旋转的自由度,并施加50 N·m的扭矩;对一半的摆线针齿啮合副设置摩擦接触[24],摩擦系数设置为0.15;考虑到计算效率、精度,模型整体网格大小设置为1 mm,接触面网格大小细化为0.01 mm[25-26].有限元计算结果如表5所示,有限元计算结果与理论计算结果对比如图10所示.

由图10可知,理论计算与有限元仿真的接触应力结果均是先递增再稳定在700 MPa左右,二者趋

表5 有限元仿真各齿接触应力

Tab.5 Contact stress of each tooth by finite element simulation

针齿序号	接触应力 σ/MPa	针齿序号	接触应力 σ/MPa	针齿序号	接触应力 σ/MPa
1	0	9	669.45	17	671.02
2	0	10	603.37	18	612.14
3	233.52	11	677.58	19	647.39
4	266.77	12	683.25	20	633.86
5	336.34	13	699.56	21	580.06
6	446.62	14	725.66	22	550.12
7	546.49	15	761.4	23	0
8	572.94	16	637.64	24	0

势相符,且同时参与啮合齿数相同,证明了理论计算的正确性.

3.3 基于Adams的传动精度仿真

将上一节所建立的三维模型导入Adams软件中进行空载下传动精度分析.其中,对摆线轮添加驱动转速作为输入端,针轮添加铰链约束作为输出端.将针轮在每个时间节点的输出转速与理论转速作差,再乘上一个时间节点的时间间隔,即可得到对应时间节点的传动误差[27].图11为空载下不考虑加工误差等因素时等距移距修形齿廓和等接触应力修形齿廓的传动误差.

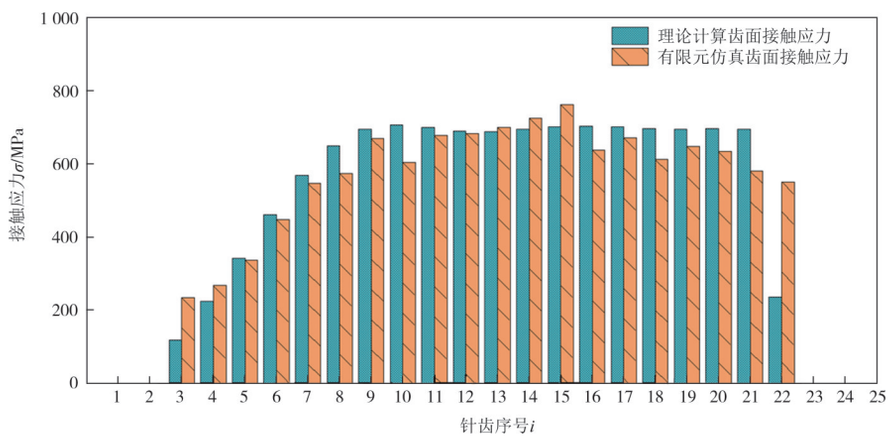
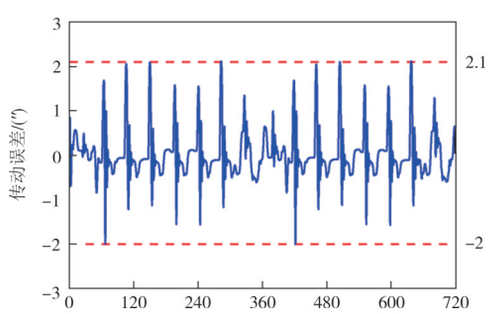
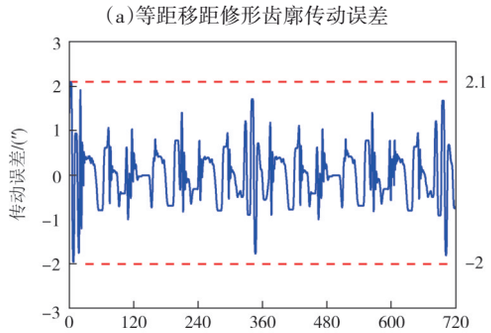


图10 理论计算与有限元接触应力对比

Fig.10 Comparison of theoretical calculation and finite element contact stress



(a)等距移距修形齿廓传动误差



(b)等接触应力修形齿廓传动误差

图11 传动误差仿真结果

Fig.11 Simulation results of transmission error

由图11可知,在侧隙大小相近,不考虑加工误差时,等距移距修形齿廓传动精度约为4.1′′,等接触应力修形齿廓传动精度约为4.05′′,二者在传动精度上并无显著差异.

4 结 论

1)本文以平均压力角最小作为分段依据,基于摆线针轮啮合副接触分析拟合修形函数,提出了一种摆线齿廓分段修形的方法;

2)与传统的等距移距修形齿廓对比,本文提出的修形方法既能保证齿廓在工作段具有较小的侧隙,又能在非工作段的齿根、齿顶处留有合理的顶隙,且齿面最大接触应力显著下降,重合度显著提高,各齿面上的接触应力大小更为均匀.

3)通过ANSYS和Adams仿真软件对两种修形方式的摆线轮进行仿真分析,其中ANSYS静力学仿真结果与理论计算结果趋势一致,证明了修形方法

的正确性,Adams 动力学仿真结果表明等接触应力修形齿廓在提高齿轮承载能力的基础上并未降低传动精度.

参考文献

[1] GARCÍA P L, CRISPEL S, SAERENS E, et al. Compact gearboxes for modern robotics: a review[J]. Frontiers in Robotics and AI, 2020, 7: 103.

[2] HSIEH C F. Dynamics analysis of cycloidal speed reducers with pinwheel and nonpinwheel designs[J]. Journal of Mechanical Design, 2014, 136(9): 091008.

[3] PHAM A D, AHN H J. High precision reducers for industrial robots driving 4th industrial revolution: state of arts, analysis, design, performance evaluation and perspective[J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing-Green Technology, 2018, 5(4): 519-533.

[4] PHAM A D, AHN H J. Rigid precision reducers for machining industrial robots [J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 2021, 22(8): 1469-1486.

[5] 岳朗,何卫东,张迎辉. 基于压力角的摆线齿廓修形方法[J]. 机械传动,2020,44(1):35-40.
YUE L, HE W D, ZHANG Y H. Modification method of cycloid tooth profile based on pressure angle[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2020, 44(1): 35-40. (in Chinese)

[6] 朱杰,林庆鹏,臧宁君,等. 精密减速器摆线轮齿廓修形方法综述[J]. 装备制造技术,2022(8):101-105.
ZHU J, LIN Q P, ZANG N J, et al. Summary of modification methods of cycloidal gear tooth profile of precision reducer[J]. Equipment Manufacturing Technology, 2022(8): 101-105. (in Chinese)

[7] 李力行,薛嘉庆. 对摆线针轮行星减速器摆线轮齿形修正方式的分析方法[J]. 东北工学院学报,1981,2(1):33-45.
LI L X, XUE J Q. An analytical method to themodification manner for toothprofile on cycloid disk of a cyclospeed reducer [J]. Journal of Northeastern University (Natural Science), 1981, 2(1): 33-45. (in Chinese)

[8] 关天民,张东生. 摆线针轮行星传动中反弓齿廓研究及其优化设计[J]. 机械工程学报,2005,41(1):151-156.
GUAN T M, ZHANG D S. Inverse arch-shaped teeth profile and its optimization in a cycloid drive [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(1): 151-156. (in Chinese)

[9] 丁国龙,秦园, 明廷伯,等. 基于接触应力均化的摆线轮修形方法[J]. 中国机械工程,2019,30(9):1081-1089.
DING G L, QIN Y, MING T B, et al. Modification method of cycloidal gears based on contact stress equalization [J]. China Mechanical Engineering, 2019, 30(9): 1081-1089. (in Chinese)

[10] 李天兴, 姚建, 张阳, 等. 摆线轮工作齿廓的二次分段修形方法[J]. 河南科技大学学报(自然科学版),2024,45(2):8-14.
LI T X, YAO J, ZHANG Y, et al. Secondary segmented modification method of cycloidal gear working tooth profile [J]. Journal of Henan University of Science and Technology (Natural Science), 2024, 45(2): 8-14. (in Chinese)

[11] 赵致勃,顾大强,李立新,等. 基于接触应力优化的摆线轮修形设计[J]. 工程设计学报,2022,29(6):713-719.
ZHAO Z B, GU D Q, LI L X, et al. Modification design of cycloidal gear based on contact stress optimization [J]. Chinese Journal of Engineering Design, 2022, 29 (6): 713-719. (in Chinese)

[12] VELEX P, CHAPRON M, FAKHFAKH H, et al. On transmission errors and profile modifications minimising dynamic tooth loads in multi-mesh gears [J]. Journal of Sound and Vibration, 2016, 379: 28-52.

[13] SONG X P, CHEN Y, YANG J M. Study of the transmission characteristics of the cycloid gear based on a multi-objective optimization modification[J]. Machines, 2023, 11(8): 775.

[14] GAO S, ZHANG Y M, JI S T, et al. Multi-objective optimized design for modified cycloid-pin gear drive mechanism based on load-bearing capacity [J]. Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing, 2024, 18(2): 23.

[15] ZHAO Y D, HAN Z H, TAN Q F, et al. Multi-objective optimization design of cycloid-pin gears based on RV reducer precision transmission performance [J]. Energies, 2024, 17 (3): 654.

[16] LI T X, AN X T, DENG X Z, et al. A new tooth profile modification method of cycloidal gears in precision reducers for robots[J]. Applied Sciences, 2020, 10(4): 1266.

[17] 陈兵奎, 房婷婷, 李朝阳, 等. 摆线针轮行星传动共轭啮合理论[J]. 中国科学(E辑:技术科学), 2008, 38(1):148-160.
CHEN B K, FANG T T, LI Z Y, et al. Conjugate meshing theory of cycloidal pin-wheel planetary transmission [J]. Science in China (Series E (Technological Sciences)), 2008, 38(1): 148-160. (in Chinese)

[18] 张跃明,李连松,纪姝婷. 摆线针轮传动机构的偏心距对承载能力的影响[J]. 哈尔滨工程大学学报,2022,43(6):873-881.
ZHANG Y M, LI L S, JI S T. Influence of the eccentricity of cycloid-pin transmission mechanism on bearing capacity [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2022, 43(6): 873-881. (in Chinese)

[19] 李力行. 摆线针轮行星传动的齿形修正及受力分析[J]. 大连

铁道学院学报, 1984, 5(4): 29-40.
LI L X. The modification manner for tooth profile and analy is of forces on the cycloid disk of a cycloid speed reducer[J]. Journal of Dalian Railway Institute, 1984, 5(4): 29-40. (in Chinese)

[20] WEI B, WANG J X, ZHOU G W, et al. Mixed lubrication analysis of modified cycloidal gear used in the RV reducer[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, 2016, 230(2): 121-134.

[21] 安宗文, 贾盼龙, 王强, 等. 以优化承载能力为目标的RV减速器摆线轮齿廓修形方法[J]. 机械传动, 2022, 46(1): 170-176.
AN Z W, JIA P L, WANG Q, et al. Tooth profile modification method of RV reducer cycloid gear aiming at optimizing carrying capacity[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2022, 46(1): 170-176. (in Chinese)

[22] 柯庆勋, 邓效忠, 苏建新, 等. 高精度RV减速器摆线轮修形理论研究[J]. 机械传动, 2018, 42(7): 5-8.
KE Q X, DENG X Z, SU J X, et al. Theoretical research of the modification of cycloidal gear used in high precision RV reducer [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2018, 42(7): 5-8. (in Chinese)

[23] 张俊. 少齿差环板式减速器的弹性动力分析与动态设计方法研究[D]. 天津: 天津大学, 2007.
ZHANG J. Elasto-dynamic analysis and dynamic design approach of ring-plate gear reducer with small tooth number difference[D]. Tianjin: Tianjin University, 2007. (in Chinese)

[24] 张跃明, 何通, 纪姝婷, 等. RV减速器摆线针轮的有限元接触分析[J]. 机床与液压, 2021, 49(1): 114-118.
ZHANG Y M, HE T, JI S T, et al. Contact analysis of cycloidal pin wheel of RV reducer based on finite element [J]. Machine Tool & Hydraulics, 2021, 49(1): 114-118. (in Chinese)

[25] 周长江, 龙继国, 王昊辰, 等. 弧齿锥齿轮接触与弯曲强度ISO与AGMA标准比较及有限元验证[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2018, 45(4): 1-9.
ZHOU C J, LONG J G, WANG H C, et al. Comparative analysis of contact and bending strength using ISO and AGMA standards in spiral bevel gears with numerical verification [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2018, 45(4): 1-9. (in Chinese)

[26] 叶南海, 陈凯, 戚一男, 等. 基于虚拟载荷谱技术的锥齿轮疲劳寿命分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2012, 39(3): 38-42.
YE N H, CHEN K, QI Y N, et al. Fatigue life analysis of bevel gear based on virtual load spectrum [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2012, 39(3): 38-42. (in Chinese)

[27] 王程, 王士军, 冉川东, 等. 基于改进MOPSO的RV减速器摆线轮齿廓多目标修形研究[J]. 机床与液压, 2024, 52(19): 40-45.
WANG C, WANG S J, RAN C D, et al. Multi-objective modification of cycloidal gear profile of RV reducer based on improved MOPSO [J]. Machine Tool & Hydraulics, 2024, 52(19): 40-45. (in Chinese)