doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024233

扭 Yangian 代数 $\mathrm{Y}(\mathfrak{o}_2)$的 Verma 模

葛万里，谭易兰，徐森荣
（江苏大学 数学科学学院，江苏 镇江 212013）

摘要： 考虑扭 Yangian 代数 $\mathrm{Y}(\mathfrak{o}_2)$的 Verma 模 $M(\mu(u))$可约的充分必要条件. 如果 $M(\mu(u))$的权由某个有理函数决定，则通过构造法可得到 $M(\mu(u))$的一个真子模，进而证明 $M(\mu(u))$可约；若 $M(\mu(u))$可约，则可得到一个关于 u 的有理函数，从而给出了 $M(\mu(u))$可约的必要条件为该有理函数是在 $u=\infty$处的 Laurent 展开.

关键词： 扭 Yangian 代数；Verma 模；可约性
中图分类号： O152.5 **文献标志码：** A **文章编号：** 1671-5489(2024)06-1285-06

Verma Modules of Twisted Yangian $\mathrm{Y}(\mathfrak{o}_2)$

GE Wanli, TAN Yilan, XU Senrong
(*School of Mathematical Sciences, Jiangsu University, Zhenjiang* 212013, *Jiangsu Province, China*)

Abstract: We considered necessary and sufficient conditions for the Verma modules $M(\mu(u))$ of twisted Yangian $\mathrm{Y}(\mathfrak{o}_2)$ to be reducible. If the weight of $M(\mu(u))$ was determined by a certain rational function, we could obtain a proper submodule of $M(\mu(u))$ through construction method, thus proving that $M(\mu(u))$ was reducible. If $M(\mu(u))$ was reducible, we could obtain a rational function associated with u, thus we gave a necessary condition for $M(\mu(u))$ to be reducible was that the rational function was a Laurent expansion at $u=\infty$.

Keywords: twisted Yangian; Verma module; reducibility

0 引 言

设 $\mathfrak{g}_N$ 是复数域上的正交李代数 $\mathfrak{o}_N$ 或辛李代数 $\mathfrak{sp}_N$($N\in\mathbb{N}$且 $N\geqslant 2$). 目前在有界可积系统的研究中，Yangian 代数 $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$的余理想子代数 $\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)$受到广泛关注[1-4]. 文献[5-8]研究了该代数的有限维不可约模，文献[9-11]讨论了它的无限维非最高权且非最低权的权模.

$\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)$的有限维不可约模由一系列 Drinfeld 多项式唯一决定. $\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)$存在有限维不可约模的必要条件是其所对应的 Verma 模可约. 文献[12]给出了 $\mathrm{Y}(\mathfrak{sp}_2)$的 Verma 模 $M(\mu(u))$可约的充分必要条件，即 $M(\mu(u))$可约当且仅当

$$\frac{2\mu(u)}{\mu(u)+\mu(-u)}=\frac{P(u)}{Q(u^2)},\tag{1}$$

其中 $P(u)$和 $Q(u)$是首 1 多项式，且 $\deg(P(u))=2\deg(Q(u))$.

收稿日期： 2024-06-05.

第一作者简介： 葛万里(1996—)，男，汉族，硕士研究生，从事李理论的研究，E-mail：563807525@qq.com. **通信作者简介：** 徐森荣(1990—)，男，汉族，博士，副教授，从事李理论的研究，E-mail：senrxu@163.com.

基金项目： 国家自然科学基金(批准号：12201253)、江苏省自然科学基金(批准号：BK20220510)和江苏大学高级人才启动基金(批准号：5501190011).

本文考虑 $Y(\mathfrak{d}_2)$的 Verma 模，并证明了如下结果.

定理 1 设 $\mu(u)=1+\mu^{(1)}u^{-1}+\mu^{(2)}u^{-2}+\cdots$是一个关于 u^{-1}的形式幂级数，则 $Y(\mathfrak{d}_2)$的 Verma 模 $M(\mu(u))$可约的充分必要条件为$\dfrac{4u\mu(u)}{(2u+1)\mu(u)+(2u-1)\mu(-u)}$是一个关于 u 的有理函数在$u=\infty$处的 Laurent 展开，即

$$\frac{4u\mu(u)}{(2u+1)\mu(u)+(2u-1)\mu(-u)}=\frac{P(u)}{Q(u)}, \tag{2}$$

其中 $P(u)$和 $Q(u)$是同次的首 1 多项式.

推论 1 $Y(\mathfrak{d}_2)$的 Verma 模 $M(\mu(u))$可约当且仅当$\dfrac{\mu(-u)}{\mu(u)}=\dfrac{S(u)}{T(u)}$，其中 $S(u)$和 $T(u)$是同次的首 1多项式.

1 预备知识

扭 Yang 代数 $Y(\mathfrak{d}_2)$是由一族生成元$\{e^{(2i+2)},h^{(i)},f^{(2i+2)}\mid i\in\mathbb{N}\}$生成的结合代数，其满足如下生成关系：

$$[e^{(i)},e^{(j)}]=0,\qquad [f^{(i)},f^{(j)}]=0, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}[h^{(i)},h^{(j)}]=&-\sum_{a=1}^{j}(h^{(i+a-1)}h^{(j-a)}-h^{(j-a)}h^{(i+a-1)})+\\&\sum_{b=1}^{j}(-1)^b(f^{(i+b-1)}e^{(j-b)}-f^{(j-b)}e^{(i+b-1)})-\\&\sum_{c=1}^{[j/2]}(f^{i+2c-2)}e^{(j-2c)}-f^{(j-2c)}e^{(i+2c-2)}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[e^{(i)},f^{(j)}]=&-\sum_{a=1}^{j-1}(h^{(i+j-1-a)}h_1^{(a)}-h^{(a)}h_1^{(i+j-1-a)})+\\&\sum_{b=1}^{j-1}(-1)^b(h_1^{(i+j-1-b)}h_1^{(b)}-h^{(b)}h^{(i+j-1-b)})-\\&\sum_{c=1}^{[j/2]}(h^{(i+j-2c)}h_1^{(2c-2)}-h^{(2c-2)}h_1^{(i+j-2c)})-4h^{(i+j-1)},\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}[h^{(i)},f^{(j)}]=&-\sum_{a=1}^{j}(h^{(i+j-a)}f^{(a-1)}-h^{(a-1)}f^{(i+j-a)})+\\&\sum_{b=1}^{j}(-1)^b(f^{(i+j-b)}h_1^{(b-1)}-f^{(b-1)}h^{(i+j-b)})-\\&\sum_{c=1}^{[j/2]}(f^{(i+j-2c)}h_1^{(2c-2)}-f^{(2c-2)}h_1^{(i+j-2c)}),\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}[e^{(i)},h^{(j)}]=&-\sum_{a=1}^{j}(h^{(i+a-1)}e^{(j-a)}-h^{(j-a)}e^{(i+a-1)})+\\&\sum_{b=1}^{j}(-1)^b(h_1^{(i+b-1)}e^{(j-b)}-h^{(j-b)}e^{(i+b-1)})-\\&\sum_{c=1}^{[j/2]}(h^{(i+2c-2)}e^{(j-2c)}-h^{(j-2c)}e^{(i+2c-2)}),\end{aligned}$$

其中 $h^{(0)}=h_1^{(0)}=1$，$e^{(0)}=f^{(0)}=0$，且对任意的 $r\in\mathbb{N}$，均有 $e^{(2r+1)}=f^{(2r+1)}=0$，$h_1^{(2r+1)}=-h^{(2r+1)}$，$h_1^{(2r+2)}=h^{(2r+2)}+h^{(2r+1)}$.

命题 1[5] 设

$$x(u)\in\{e(u)=e^{(1)}u+e^{(2)}u^2+\cdots,\ h(u)=1+h^{(1)}u+h^{(2)}u^2+\cdots,\ f(u)=f^{(1)}u+f^{(2)}u^2+\cdots\},$$

形式幂级数 $g(u)=1+g^{(2)}u^{-2}+g^{(4)}u^{-4}+\cdots$，则映射

$$\nu_g:\ x(u)\mapsto g(u)x(u) \tag{6}$$

定义了 Y($\mathfrak{g}_2$)的一个自同构.

设 $\mu(u)=1+\mu^{(1)}u^{-1}+\mu^{(2)}u^{-2}+\cdots$是一个关于 u^{-1}的形式幂级数. Y($\mathfrak{g}_2$)的 Verma 模为 Y($\mathfrak{g}_2$)商去所有 $e^{(i)}$和 $h^{(i)}-\mu^{(i)}$生成的左理想，Y($\mathfrak{g}_2$)的 Verma 模 $M(\mu(u))$是最高权模，其中最高权为 $\mu(u)$，最高权向量是 Y($\mathfrak{g}_2$)中的元素 1 在商中的像，记为 $\mathbf{1}_{\mu(u)}$. 形如

$$f^{(r_1)}\cdots f^{(r_k)}\mathbf{1}_{\mu(u)} \tag{7}$$

的有序向量构成了 $M(\mu(u))$ 的一组基，这里 $k\geqslant 0$.

2　定理 1 必要性的证明

引理 1[13]　设复系数形式幂级数 $\mu(u)=1+\mu^{(1)}u^{-1}+\mu^{(2)}u^{-2}+\cdots$. 如果存在一个正整数 N 和一组不全为零的复数 $c_0,c_1,\cdots,c_m$，使形式幂级数 $\mu(u)$的系数 $u^{(r)}$，对任意的 $r\geqslant N$，均满足

$$c_0\mu^{(r)}+c_1\mu^{(r+1)}+\cdots+c_m\mu^{(r+m)}=0, \tag{8}$$

则 $\mu(u)$是一个形如$\dfrac{P(u)}{Q(u)}$的有理函数在 $u=\infty$处的 Laurent 展开，其中 $P(u)$和 $Q(u)$是同次的首 1 多项式.

命题 2　如果 Y($\mathfrak{g}_2$)的 Verma 模 $M(\mu(u))$可约，则式(2)成立，其中 $P(u)$和 $Q(u)$是同次的首 1 多项式.

证明：设

$$g(u)=\frac{4u}{(2u+1)\mu(u)+(2u-1)\mu(-u)},$$

且 $\nu(u)=g(u)\mu(u)$. 易见 $g(u)=g(-u)$，且常数项为 1. 根据自同构(6)可知，$M(\mu(u))$和 $M(\nu(u))=M(g(u)\mu(u))$具有相同的可约性. 即研究 $M(\mu(u))$的可约性等价于研究 $M(\nu(u))$的可约性.

设 K 是 $M(\nu(u))$的非平凡子模. 下面分 5 步证明.

1) K 继承 $M(\nu(u))$的权空间分解.

如果将 $M(\nu(u))$视为一个 $\mathfrak{g}_2$-模，其中 $\mathfrak{g}_2=\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{h^{(1)}\}$，则可得它的一个权空间分解

$$M(\nu(u))=\oplus_\nu M(\nu(u))_\nu,$$

其中 $M(\nu(u))_\nu=\{\eta\in M(\nu(u))\,|\,h^{(1)}\eta=\nu\eta\}$. 事实上，它的权 ν 形如 $\nu^{(1)}+2k$，其中 k 是一个非负整数. 根据$[h^{(1)},f^{(r)}]=2f^{(r)}$可知，单项式(7)对某个确定的 k 构成了 $M(\nu(u))_\nu$ 的一组基，其中 $\nu=\nu^{(1)}+2k$. 如果 K 是 $M(\nu(u))$的一个非平凡子模，则可得 K 的权空间分解

$$K=\oplus_\nu K_\nu,\qquad K_\nu=K\cap M(\nu(u))_\nu, \tag{9}$$

这是因为

$$K=K\cap M(\nu(u))=K\cap(\oplus_\nu M(\nu(u))_\nu)=\oplus_\nu(K\cap M(\nu(u))_\nu).$$

对于权 $\nu=\nu^{(1)}+2k$，可以选定最小整数 k 使得 $K_\nu\neq\{0\}$. 显然 $k\geqslant 1$，否则 $\mathbf{1}_{\nu(u)}\in K$. 因为$K_\nu\neq\{0\}$，所以存在非零向量

$$\boldsymbol{\zeta}=\sum_r c_r f^{(r_1)}\cdots f^{(r_k)}\mathbf{1}_{\nu(u)}\in K_\nu,\qquad c_r\in\mathbb{C}, \tag{10}$$

其中 k 元数组 $r=(r_1,\cdots,r_k)$，$1\leqslant r_1\leqslant\cdots\leqslant r_k$，并满足 $\max\limits_r\{r_1+\cdots+r_k\}$存在.

2) $e^{(t)}\boldsymbol{\zeta}=0$.

对任意的非零向量 $\boldsymbol{\xi}\in K_\nu$，均有 $e^{(t)}\boldsymbol{\xi}=0$. 否则，有

$$h^{(1)}e^{(t)}\boldsymbol{\xi}=[h^{(1)},e^{(t)}]\boldsymbol{\xi}+e^{(t)}h^{(1)}\boldsymbol{\xi}=(\nu-2)e^{(t)}\boldsymbol{\xi},$$

表明非零向量 $e^{(t)}\boldsymbol{\xi}\in K_{\nu-2}=\{0\}$，从而有 $e^{(t)}\boldsymbol{\zeta}=0$.

3) $e^{(t)}\boldsymbol{\zeta}=\sum\limits_r d_r f^{(r_1)}\cdots f^{(r_{k-1})}\mathbf{1}_{\nu(u)}$.

注意到

$$e^{(t)}f^{(r_1)}\cdots f^{(r_k)}\mathbf{1}_{\nu(u)}=\sum_{i=1}^{k}f^{(r_1)}\cdots f^{(r_{i-1})}[e^{(t)},f^{(r_i)}]f^{(r_{i+1})}\cdots f^{(r_k)}\mathbf{1}_{\nu(u)}. \tag{11}$$

根据式(4)以及定义关系 $h_1^{(2r-1)}=-h^{(2r-1)}$ 和 $h_1^{(2r)}=h^{(2r)}+h^{(2r-1)}$，可将 $[e^{(t)},f^{(r_i)}]$ 写成一些 $h^{(r')}h^{(t')}$ 和的形式；再利用式(5)，又可将 $h^{(t')}f^{(m)}=[h^{(t')},f^{(m)}]+f^{(m)}h^{(t')}$ 写成一些 $f^{(r'')}h^{(t'')}$ 和的形式. 因此，将式(11)右端适当整理后，可写成一些单项式 $f^{(r_1)}\cdots f^{(r_{k-1})}\mathbf{1}_{\nu(u)}$ 线性组合的形式.

设 $N=\max\limits_{r}\{r_1+\cdots+r_k\}$，且式(10)中 $f^{(m_1)}\cdots f^{(m_k)}\mathbf{1}_{\nu(u)}$ 的系数 $c_m\neq0$，其中 $m_1\leqslant\cdots\leqslant m_k$，且 $m_1+\cdots+m_k=N$. 本文考虑 $t\geqslant N$ 的情形.

4) 当 $t\geqslant N$ 时，$e^{(t)}\zeta$ 展开项中 $f^{(m_1)}\cdots f^{(m_{k-1})}\mathbf{1}_{\nu(u)}$ 的系数 $d_m=a_0\nu^{(t)}+a_1\nu^{(t+1)}+\cdots+a_{N-k}\nu^{(t+N-k)}=0$，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_{N-k}$ 是一些常值复数.

利用式(4)和式(5)，再结合定义关系 $h_1^{(2r-1)}=-h^{(2r-1)}$ 和 $h_1^{(2r)}=h^{(2r)}+h^{(2r-1)}$ 计算 $e^{(t)}\zeta$，可得单项式 $f^{(m_1)}\cdots f^{(m_{k-1})}\mathbf{1}_{\nu(u)}$ 的系数 d_m. 注意到 $m_1+\cdots+m_{k-1}\leqslant N-1$，且 $1\leqslant m_k\leqslant N-k+1$，所以易见 d_m 是 $\nu^{(t)},\nu^{(t+1)},\cdots,\nu^{(t+N-k)}$ 的线性组合，即 $d_m=a_0\nu^{(t)}+a_1\nu^{(t+1)}+\cdots+a_{N-k}\nu^{(t+N-k)}$. 根据 2) 和 3) 可知，$d_m=0$，即有 $a_0\nu^{(t)}+a_1\nu^{(t+1)}+\cdots+a_{N-k}\nu^{(t+N-k)}=0$.

事实上，每个 $\nu^{(t+i)}$ 的系数 a_i 都是复系数 c_r 的线性组合，每个 c_r 的系数又是 $1,\nu^{(1)},\nu^{(2)},\cdots,\nu^{(N-k)}$ 的线性组合. 当 $t\geqslant N$ 时，a_i 的计算方式完全相同，且与 t 的取值无关，即 $a_0,a_1,\cdots,a_{N-k}$ 是一些常值复数.

5) $\nu^{(t+m_k-1)}$ 的系数 $a_{m_k-1}\neq0$.

通过计算 $e^{(t)}\zeta$ 展开项中单项式 $f^{(m_1)}\cdots f^{(m_{k-1})}\mathbf{1}_{\nu(u)}$ 的系数 d_m 可知，$\nu^{(t+m_k-1)}$ 的系数 a_{m_k-1} 仅由 $c_me^{(t)}f^{(m_1)}\cdots f^{(m_k)}\mathbf{1}_{\nu(u)}$ 提供. 事实上，这是因为 $e^{(t)}f^{(r_1)}\cdots f^{(r_k)}\mathbf{1}_{\nu(u)}$ 按照式(11)展开，当 $r_1+\cdots+r_k<N$ 时，无法提供 $\nu^{(t+m_k-1)}f^{(m_1)}\cdots f^{(m_{k-1})}\mathbf{1}_{\nu(u)}$ 这一项；当 $r_1+\cdots+r_k=N$ 时，计算 $f^{(m_1)}\cdots f^{(m_{k-1})}\mathbf{1}_{\nu(u)}$ 的系数，即

$$\begin{aligned}
e^{(t)}\zeta=&\sum_r c_re^{(t)}f^{(r_1)}\cdots f^{(r_k)}\mathbf{1}_{\nu(u)}=\\
&\sum_r\Big(c_r\sum_{i=1}^{k}f^{(r_1)}\cdots f^{(r_{i-1})}[e^{(t)},f^{(r_i)}]f^{(r_{i+1})}\cdots f^{(r_k)}\mathbf{1}_{\nu(u)}\Big)=\\
&\sum_r\Big(c_r\sum_{i=1}^{k}f^{(r_1)}\cdots f^{(r_{i-1})}f^{(r_{i+1})}\cdots f^{(r_k)}[e^{(t)},f^{(r_i)}]\mathbf{1}_{\nu(u)}\Big)=\\
&\sum_r\Big(-4c_r\sum_{i=1}^{k}f^{(r_1)}\cdots f^{(r_{i-1})}f^{(r_{i+1})}\cdots f^{(r_k)}h^{(t+r_i-1)}\mathbf{1}_{\nu(u)}\Big)=\\
&\sum_r\Big(-4c_r\sum_{i=1}^{k}\nu^{(t+r_i-1)}f^{(r_1)}\cdots f^{(r_{i-1})}f^{(r_{i+1})}\cdots f^{(r_k)}\mathbf{1}_{\nu(u)}\Big)=\\
&-4mc_m\nu^{(t+m_k-1)}f^{(m_1)}\cdots f^{(m_k-1)},
\end{aligned}$$

其中 m 是指标 $1\leqslant j\leqslant k$ 时 $m_j=m_k$ 的个数，显然 $m\geqslant1$；这里“=”右端表示可能参与组成系数 a_{m_k-1} 的项. 因此，当 $m_1,\cdots,m_{k-1}$ 确定时，可得 $a_{m_k-1}=-4c_m\neq0$. 根据引理 1 可知 $\nu(u)$ 是有理函数 $\dfrac{P(u)}{Q(u)}$ 在 $u=\infty$ 处的 Laurent 展开，即式(2)成立，其中 $P(u)$ 和 $Q(u)$ 是同次的首 1 多项式.

3 定理 1 充分性的证明

命题 3 如果式(2)成立，则 $\mathrm{Y}(\mathfrak{o}_2)$ 的 Verma 模 $M(\mu(u))$ 可约，其中 $P(u)$ 和 $Q(u)$ 是同次的首 1 多项式.

证明：设 $\deg(P(u))=\deg(Q(u))=p$，下面分 4 步证明.

1) 假设 $\mathrm{Y}(\mathfrak{o}_2)$ 的 Verma 模 $M(\mu(u))$ 的权 $\mu(u)$ 是关于 u^{-1} 的次数不超过 $2p$ 的多项式.

设

$$\nu(u)=\frac{(-1)^p 4uQ(u)Q(-u)u^{-2p}}{(2u+1)\mu(u)+(2u-1)\mu(-u)},$$

易见 $\nu(u)=\nu(-u)$且常数项为 1，即 $\nu(u)=1+\nu^{(2)}u^{-2}+\nu^{(4)}u^{-4}+\cdots$. 对于 Y($\mathfrak{o}_2$)的 Verma 模 $M(\mu(u))$，利用自同构(6)，可得一个 Y($\mathfrak{o}_2$) 的模，且这个模与 Y($\mathfrak{o}_2$)的 Verma 模 $M(\nu(u)\mu(u))$具有相同的可约性，其中

$$\nu(u)\mu(u)=(-1)^p P(u)Q(-u)u^{-2p}$$

是一个关于 u^{-1}的次数不超过 $2p$ 的多项式.

因此，研究 $M(\mu(u))$的可约性即等价于研究 $M(\nu(u)\mu(u))$的可约性. 不失一般性，假设 $\mu(u)$是一个关于 u^{-1}的次数不超过 $2p$ 的多项式，可见对任意正整数 $m>2p$，均有 $h^{(m)}\mathbf{1}_{\mu(u)}=h_1^{(m)}\mathbf{1}_{\mu(u)}=0$.

注意到 Verma 模 $M(\mu(u))$由向量 $f^{(r_1)}\cdots f^{(r_k)}\mathbf{1}_{\mu(u)}$线性张成，且如有必要可对 $f^{(r_i)}$进行任意排序，所以本文假设 $r_1\leqslant\cdots\leqslant r_k$. 设 $M(\mu(u))$的子空间 $K=\underset{\mathbb{C}}{\operatorname{span}}\{f^{(r_1)}\cdots f^{(r_k)}\mathbf{1}_{\mu(u)}\mid r_k>2p\}$，根据 Y($\mathfrak{o}_2$)的定义关系可知，对任意的正整数 r 恒有 $e^{(2r-1)}=f^{(2r-1)}=0$，所以这里的 r_i 全部取偶数即可. 下面的证明默认 r_i 是偶数且 $r_k>2p$.

2) $h^{(t)}f^{(r_1)}\cdots f^{(r_k)}\mathbf{1}_{\mu(u)}\in K$.

使用数学归纳法证明，设 $k=1$. 定义关系(5)等价于

$$\begin{aligned}[f^{(r_1)},h^{(t)}]=&-\sum_{a=1}^{t}(f^{(r_1+a-1)}h^{(t-a)}-f^{(t-a)}h^{(r_1+a-1)})+\\&\sum_{b=1}^{t}(-1)^b(f^{(r_1+b-1)}h^{(t-b)}-f^{(t-b)}h_1^{(r_1+b-1)})-\\&\sum_{c=1}^{[t/2]}(f^{(r_1+2c-2)}h^{(t-2c)}-f^{(t-2c)}h^{(r_1+2c-2)}).\end{aligned}\tag{12}$$

因为对任意的正整数 $m>2p$，均有 $h^{(m)}\mathbf{1}_{\mu(u)}=h_1^{(m)}\mathbf{1}_{\mu(u)}=0$，所以

$$\begin{aligned}[f^{(r_1)},h^{(t)}]\mathbf{1}_{\mu(u)}=&-\sum_{a=1}^{t}(f^{(r_1+a-1)}h^{(t-a)}\mathbf{1}_{\mu(u)}-f^{(t-a)}h^{(r_1+a-1)}\mathbf{1}_{\mu(u)})+\\&\sum_{b=1}^{t}(-1)^b(f^{(r_1+b-1)}h^{(t-b)}\mathbf{1}_{\mu(u)}-f^{(t-b)}h_1{}^{(r_1+b-1)}\mathbf{1}_{\mu(u)})-\\&\sum_{c=1}^{[t/2]}(f^{(r_1+2c-2)}h^{(t-2c)}\mathbf{1}_{\mu(u)}-f^{(t-2c)}h^{(r_1+2c-2)}\mathbf{1}_{\mu(u)})=\\&-\sum_{a=1}^{t}\mu^{(t-a)}f^{(r_1+a-1)}\mathbf{1}_{\mu(u)}+\sum_{b=1}^{t}(-1)^b\mu^{(t-b)}f^{(r_1+b-1)}\mathbf{1}_{\mu(u)}-\\&\sum_{c=1}^{[t/2]}\mu^{(t-2c)}f^{(r_1+2c-2)}\mathbf{1}_{\mu(u)}.\end{aligned}$$

因此$[f^{(r_1)},h^{(t)}]\mathbf{1}_{\mu(u)}\in K$. 又因为 $f^{(r_1)}h^{(t)}\mathbf{1}_{\mu(u)}=\mu^{(t)}f^{(r_1)}\in K$，所以 $h^{(t)}f^{(r_1)}\mathbf{1}_{\mu(u)}\in K$.

假设 $h^{(t)}f^{(r_1)}\cdots f^{(r_{k-1})}\mathbf{1}_{\mu(u)}\in K$. 下面证明 $h^{(t)}f^{(r_1)}\cdots f^{(r_k)}\mathbf{1}_{\mu(u)}\in K$. 计算可得

$$h^{(t)}f^{(r_1)}\cdots f^{(r_k)}\mathbf{1}_{\mu(u)}=-[f^{(r_1)},h^{(t)}]f^{(r_2)}\cdots f^{(r_k)}\mathbf{1}_{\mu(u)}+f^{(r_1)}h^{(t)}f^{(r_2)}\cdots f^{(r_k)}\mathbf{1}_{\mu(u)}.$$

根据诱导假设可知，对任意的正整数 r，均有 $f^{(r)}h^{(t)}f^{(r_2)}\cdots f^{(r_k)}\mathbf{1}_{\mu(u)}\in K$. 由定义关系 $h_1^{(2r-1)}=-h^{(2r-1)}$，$h_1^{(2r)}=h^{(2r)}+h^{(2r-1)}$以及式(12)可知$[f^{(r_1)},h^{(t)}]f^{(r_2)}\cdots f^{(r_k)}\mathbf{1}_{\mu(u)}\in K$. 因此，由数学归纳法可知

$$h^{(t)}f^{(r_1)}\cdots f^{(r_k)}\mathbf{1}_{\mu(u)}\in K.$$

3) $e^{(t)}f^{(r_1)}\cdots f^{(r_k)}\mathbf{1}_{\mu(u)}\in K$.

根据定义关系(4)，可得

$$[e^{(t)},f^{(r)}]\mathbf{1}_{\mu(u)}=-\sum_{a=1}^{r-1}(h^{(r+t-1-a)}h_1^{(a)}\mathbf{1}_{\mu(u)}-h^{(a)}h_1^{(r+t-1-a)}\mathbf{1}_{\mu(u)})+$$

$$\sum_{b=1}^{r-1}(-1)^b(h_1{}^{(r+t-1-b)}h_1^{(b)}\mathbf{1}_{\mu(u)}-h^{(b)}h^{(r+t-1-b)}\mathbf{1}_{\mu(u)})-$$

$$\sum_{c=1}^{[r/2]}(h^{(r+t-2c)}h_1^{(2c-2)}\mathbf{1}_{\mu(u)}-h^{(2c-2)}h^{(r+t-2c)}\mathbf{1}_{\mu(u)})-4h^{(r+t-1)}\mathbf{1}_{\mu(u)}.$$

与2)类似，利用数学归纳法，可以证明 $e^{(t)}f^{(r_1)}\cdots f^{(r_k)}\mathbf{1}_{\mu(u)}\in K$.

4) K 是 $M(\mu(u))$的非平凡子模.

易见子空间 K 的生成元在 $\mathrm{Y}(\mathfrak{o}_2)$的作用下是稳定的. 事实上，易知 $f^{(t)}$ 对 K 的作用是稳定的；由2)和3)可知，K 在 $h^{(t)}$ 和 $e^{(t)}$ 下的作用也是稳定的. 又因为 K 是 $M(\mu(u))$的非平凡子空间，所以可知 K 是 $M(\mu(u))$的非平凡子模.

参 考 文 献

[1] CHEN H J, GUAY N, MA X G. Twisted Yangians, Twisted Quantum Loop Algebras and Affine Hecke Algebras of Type BC [J]. Trans Amer Math Soc, 2014, 366(5): 2517-2574.

[2] GUAY N, REGELSKIS V, WENDLANDT C. Representations of Twisted Yangians of Types B,C,D: Ⅰ [J]. Selecta Math New Ser, 2017, 23(3): 2071-2156.

[3] GUAY N, REGELSKIS V, WENDLANDT C. Representations of Twisted Yangians of Types B,C,D: Ⅱ [J]. Transform Groups, 2019, 24(4): 1015-1066.

[4] GUAY N, REGELSKIS V. Twisted Yangians for Symmetric Pairs of Types B, C, D [J]. Math Z, 2016, 284(1/2): 131-166.

[5] MOLEV A. Yangians and Classical Lie Algebras [M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 2007: 45-184.

[6] MOLEV A. Finite-Dimensional Irreducible Representations of Twisted Yangians [J]. J Math Phys, 1998, 39(10): 5559-5600.

[7] MOLEV A. Skew Representations of Twisted Yangians [J]. Selecta Math New Ser, 2006, 12(1): 1-38.

[8] ARNAUDON D, MOLEV A, RAGOUCY E. On the R-Matrix Realization of Yangians and Their Representations [J]. Ann Henri Poincaré, 2006, 7(7/8): 1269-1325.

[9] 刘晓华，谭易兰，夏利猛. Twisted Yangian $\mathrm{Y}(\mathfrak{sp}_2)$的单权模 [J]. 东北师大学报(自然科学版)，2024，56(1)：1-7. (LIU X H, TAN Y L, XIA L M. Simple Weight Modules of Twisted Yangian $\mathrm{Y}(\mathfrak{sp}_2)$ [J]. Journal of Northeast Normal University (Natural Science Edition), 2024, 56(1): 1-7.)

[10] TAN Y L, XIA L M, ZHOU Y K. Simple Weight Modules for Yangian $\mathrm{Y}(\mathfrak{sl}_2)$ [J/OL]. J Algebra Appl, (2023-07-20)[2024-01-05]. DOI: 10.1142/s0219498824502347.

[11] 吴青云，谭易兰，夏利猛. 量子 Loop 代数 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$的单权模 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2024，62(2)：256-262. (WU Q Y, TAN Y L, XIA L M. Simple Weight Modules of Quantum Loop Algebra $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2024, 62(2): 256-262.)

[12] TAN Y L. Verma Modules for Twisted Yangians [J]. Comm Algebra, 2020, 48(1): 210-217.

[13] BILLIG Y, FUTORNY V, MOLEV A. Verma Modules for Yangians [J]. Lett Math Phys, 2006, 78(1): 1-16.

(责任编辑：李 琦)