

基于模糊等式的 Ω -BCK 代数

刘 芸¹, 周 鑫^{1,2}, 陈良云³

- (1. 伊犁师范大学 数学与统计学院, 新疆 伊宁 835000;
2. 伊犁师范大学 应用数学研究所, 新疆 伊宁 835000;
3. 东北师范大学 数学与统计学院, 长春 130024)

摘要: 在模糊等式的框架下, 引入 Ω -BCK 代数的概念. 首先, 将 BCK 代数中的清晰等式用模糊等式取代, 给出 Ω -BCK 代数的定义; 其次, 刻画 Ω -BCK 代数的子结构, 并证明 Ω -BCK 子代数判定的充分必要条件; 再次, 利用模糊同余关系得到 Ω -BCK 代数与 BCK 代数的关系; 最后, 将 BCK 代数的偏序关系进行推广, 定义 Ω -BCK 代数的 E -偏序关系.

关键词: Ω -BCK 代数; 完备格; 模糊等式; 模糊恒等式; 模糊子代数; E -偏序关系

中图分类号: O159 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2026)03-0545-06

Ω -BCK Algebras Based on Fuzzy Equalities

LIU Yun¹, ZHOU Xin^{1,2}, CHEN Liangyun³

- (1. School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining 835000, Xinjiang Uygur Autonomous Region, China;
2. Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yining 835000, Xinjiang Uygur Autonomous Region, China;
3. School of Mathematics and Statistics, Northeast Normal University, Changchun 130024, China)

Abstract: We introduced the concept of Ω -BCK algebras in the framework of fuzzy equalities. Firstly, we replaced the crisp equalities in BCK algebras with fuzzy equalities and gave the definition of Ω -BCK algebras. Secondly, we characterized the substructures of Ω -BCK algebras and proved the necessary and sufficient conditions for the determination of Ω -BCK subalgebras. Thirdly, by using fuzzy congruence relations, we obtained the relationship between Ω -BCK algebras and BCK algebras. Finally, we generalized the partial order relation of BCK algebras and defined the E -partial order relation of Ω -BCK algebras.

Keywords: Ω -BCK algebra; complete lattice; fuzzy equality; fuzzy identity; fuzzy subalgebra; E -partial order relation

在模糊集合论^[1-2]的基础上, Fourman 等^[3]首次引入了 Ω -集, 旨在为直觉主义逻辑建模. Höhle^[4]将经典等式推广, 引入了模糊等式的概念. Demirci^[5-6]提出了将代数结构模糊化的新方法, 研究了 Vague 群及相关问题. Bělohlávek 等^[7]研究了具有模糊等式的代数结构, 并系统发展了模糊泛代数理论. 模糊恒等式最早由 Šešelja 等^[8]提出, 并在文献[9-10]中得到进一步发展. 在模糊等式和模糊恒等式的框架下, Šešelja 等^[11]从 Ω 是一个完备格的 Ω -集出发, 提出了 Ω -代数的概念. 在 Ω -代数的理论基

收稿日期: 2025-08-29. 网络首发日期: 2026-04-03.

第一作者简介: 刘 芸(2000—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事代数与序结构的研究, E-mail: 3112292710@qq.com. **通信作者简介:** 周 鑫(1981—), 男, 汉族, 博士, 副教授, 从事代数与序结构的研究, E-mail: zhoux566@nenu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12471021)、伊犁师范大学提升学科综合实力专项项目(批准号: 2022XKZY08)、伊犁师范大学科研创新项目(批准号: YSD2025CX01)和伊犁师范大学高级别培育项目(批准号: YSPY2022011).

网络首发地址: <https://link.cnki.net/urlid/22.1340.O.20260402.0906.001>.

础上,经典代数结构被进一步推广, Ω -群^[12]、 Ω -格^[13]、 Ω -环^[14]、 Ω -模^[15]等结构相继被刻画,这些模糊代数结构可以满足特定的模糊恒等式,而这些恒等式的清晰版本在底层代数中无需满足.目前, Ω -代数结构的其他性质也得到广泛关注,例如,Tchoffo Foka 等^[16]从泛代数的角度研究了 Ω -代数;周鑫等^[17]从范畴的角度讨论了 Ω -群;Zhi 等^[18-19]探讨了 Ω -斜格和 Ω -半群上的模糊格林关系.

自 Iséki^[20]首次提出了 BCK 代数后,对 BCK 代数的研究及其与其他逻辑代数之间关系的探讨备受关注^[21-23].Xi^[24]首次将模糊集应用于 BCK 代数的研究,给出了模糊 BCK 代数的概念;Jun 等^[25]对模糊 BCK-理想进行了研究;Ahmed 等^[26]探讨了模糊 BCK 代数中上半格、下半格的相关性质;刘春辉^[27]对 BCK 代数的反模糊理想格结构问题进行了深入研究.

本文首先在模糊等式的框架下,从一个 $(2,0)$ 型代数 $\mathcal{X}=(X,*,0)$ 出发,使其模糊子代数 μ 满足相应的模糊恒等式,定义了 Ω -BCK 代数,这里的 $\mathcal{X}$ 不必是一个 BCK 代数.其次,刻画了 Ω -BCK 代数的子代数,给出了 Ω -BCK 子代数判定的充分必要条件.再次,通过模糊同余关系刻画了 Ω -BCK 代数的商结构,证明了 Ω -代数是 Ω -BCK 代数当且仅当任意截集构成的商结构都是经典的 BCK 代数.最后,结合模糊集和模糊关系,将 BCK 代数中的偏序关系进行推广,定义了一类 Ω -BCK 代数中的 E -偏序关系.

1 基本概念

设 $(\Omega,\leq)$ 是一个完备格,即格 Ω 的每个子集 S 都有下确界 $\bigwedge S$ 和上确界 $\bigvee S$.特别地, $\bigvee \emptyset$ 和 $\bigwedge \emptyset$ 分别是最小元和最大元,用 0 和 1 表示.本文中完备格 $(\Omega,\leq)$ 简记为 Ω . $\mathcal{A}=(A,F)$ 表示一个泛代数,其中 A 是一个集合, F 是 A 上的运算集.

定义 1^[2] 设 X 是一个集合,则映射 $\mu:X\rightarrow\Omega$ 称为 X 上的 Ω -值模糊集,简称为 X 上的模糊集.令 $\alpha\in\Omega$,则 $\mu_\alpha=\{x\in X|\mu(x)\geq\alpha\}$ 是集合 X 的子集,称为 μ 的 α -截集.设 $\mu,v:X\rightarrow\Omega$ 均为集合 X 上的模糊集,若对任意的 $x\in X$,有 $\mu(x)\leq v(x)$,则称 μ 是 v 的模糊子集,记为 $\mu\subseteq v$.

定义 2^[4] 设 X 是一个集合,则映射 $\rho:X^2\rightarrow\Omega$ 称为 X 上的模糊(二元)关系.对任意的 $\alpha\in\Omega$, $\rho_\alpha=\{(x,y)\in X^2|\rho(x,y)\geq\alpha\}$ 是集合 X^2 的子集,称为 ρ 的 α -截集, ρ_α 也称为 ρ 的切关系.

定义 3^[4] 设 X 是一个集合,映射 $\rho:X^2\rightarrow\Omega$ 为 X 上的模糊关系,对任意的 $x,y,z\in X$,若 $\rho(x,z)\wedge\rho(z,y)\leq\rho(x,y)$ 成立,则称 ρ 是传递的;若 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ 成立,则称 ρ 是对称的;若 $\rho(x,y)\leq\rho(x,x)\wedge\rho(y,y)$ 成立,则称 ρ 是严格的;若 $\rho(x,y)=\rho(x,x)=\rho(y,x)$,可得 $x=y$,则称 ρ 是可分的.若 ρ 是 X 上对称的、传递的模糊关系,则称 ρ 是 X 上的 Ω -值等式或者模糊等式.

定义 4^[11] 设 X 是一个集合, $\rho:X^2\rightarrow\Omega$ 为 X 上的模糊关系, $\mu:X\rightarrow\Omega$ 是 X 上的模糊集.若对任意的 $x,y\in X$,都有 $\rho(x,y)\leq\mu(x)\wedge\mu(y)$ 成立,则称 ρ 是 μ 上的模糊关系.若 ρ 是 μ 上的模糊关系,且对任意的 $x\in X$,有 $\rho(x,x)=\mu(x)$,则称 ρ 在 μ 上是自反的.若 ρ 是 X 上对称的、传递的模糊关系,且在 μ 上是自反的,则称 ρ 是 μ 上的模糊等式.

注 1 若 ρ 是 X 上的模糊关系,令 $\mu(x)=\rho(x,x)$,则 μ 是 X 上的模糊集,此时称 μ 由 ρ 诱导.

定义 5^[11] 设 $\mathcal{A}=(A,F)$ 是一个泛代数, $f:A^n\rightarrow A$ 是 F 中的 $n(n>0)$ 元运算.对任意的 $x_1,\cdots,x_n\in A$,如果 A 上的模糊集 $\mu:A\rightarrow\Omega$,使得 $\bigwedge_{i=1}^n\mu(x_i)\leq\mu(f(x_1,\cdots,x_n))$ 成立,且对于常量(零元运算) $c\in A$,有 $\mu(c)=1$,则 μ 称为 $\mathcal{A}$ 上的模糊子代数,简称 μ 是 $\mathcal{A}$ 上的模糊代数.

定义 6^[11] 设 $\mathcal{A}=(A,F)$ 是一个泛代数, $f:A^n\rightarrow A$ 是 F 中的 $n(n>0)$ 元运算, ρ 是 A 上的模糊关系,对任意的 $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n\in A$,如果 $\bigwedge_{i=1}^n\rho(x_i,y_i)\leq\rho(f(x_1,\cdots,x_n),f(y_1,\cdots,y_n))$ 成立,且对于常量 $c\in F$,有 $\rho(c,c)=1$,则称 ρ 与 F 中的运算是相容的.若 μ 为泛代数 $\mathcal{A}$ 上的模糊代数, ρ 是 μ 上的模糊关系,若 ρ 与 F 中的运算是相容的,则称 ρ 与 μ 是相容的.若 $E:A^2\rightarrow\Omega$ 是 μ 上的模糊等式,则称 E 是 $\mathcal{A}$ 上的模糊等式.

定义 7^[12] 设 $\mathcal{A}=(A,F)$ 是一个泛代数, $E:A^2\rightarrow\Omega$ 是 $\mathcal{A}$ 上的模糊等式,若由模糊等式 E 诱导的 $\mathcal{A}$ 上的模糊代数 $\mu:A\rightarrow\Omega$,满足 $\mu(x)=E(x,x)$,则称 $\overline{\mathcal{A}}=(\mathcal{A},E)$ 是一个 Ω -代数.

定义 8^[12] 设 $\mathcal{A}=(A,F)$ 是一个泛代数, $E: A^2 \rightarrow \Omega$ 是 $\mathcal{A}$ 上的模糊等式, $u, v: A^n \rightarrow A$ 是 A 上的 n 元运算. 对任意的 $x_1, \dots, x_n \in A$, 称 $E(u(x_1, \dots, x_n), v(x_1, \dots, x_n))$ 是 $\mathcal{A}$ 上关于 E 的模糊恒等式, 简称为模糊恒等式.

定义 9^[12] 设 $\bar{\mathcal{A}}=(\mathcal{A}, E)$ 是一个 Ω -代数, μ 是由 A 上模糊关系 $E: A^2 \rightarrow \Omega$ 诱导的, 易得 μ 为 $\mathcal{A}$ 上的模糊代数. 若对任意的 $x_1, \dots, x_n \in A$, 有

$$\bigwedge_{i=1}^n \mu(x_i) \leq E(u(x_1, \dots, x_n), v(x_1, \dots, x_n)),$$

则称模糊恒等式 $E(u(x_1, \dots, x_n), v(x_1, \dots, x_n))$ 在 $\bar{\mathcal{A}}$ 上成立.

定义 10^[13] 设 $\mathcal{A}=(A,F)$ 是一个泛代数, $\rho: A^2 \rightarrow \Omega$ 是 $\mathcal{A}$ 上的模糊关系, $E: A^2 \rightarrow \Omega$ 是 $\mathcal{A}$ 上的模糊等式. 若对任意的 $x, y \in A$, 都有 $\rho(x, y) \wedge \rho(y, x) \leq E(x, y)$, 则称 ρ 是 E -反对称的. 设 $\bar{\mathcal{A}}=(\mathcal{A}, E)$ 是一个 Ω -代数, $\mu: A \rightarrow \Omega$ 是 $\mathcal{A}$ 上的模糊代数, $\rho: A^2 \rightarrow \Omega$ 是 $\mathcal{A}$ 上的模糊关系, $E: A^2 \rightarrow \Omega$ 是 $\mathcal{A}$ 上的模糊等式. 如果 ρ 在 μ 上是自反的、传递的, 并且 ρ 是 E -反对称的, 则称 ρ 是模糊代数 $\mathcal{A}$ 的一个 E -偏序关系.

定义 11^[20] 对于一个 $(2,0)$ 型代数 $(A, *, 0)$, 如果对任意的 $a, b, c \in A$, 下列条件成立:

- 1) $((a * b) * (a * c)) * (c * b) = 0$;
- 2) $a * 0 = a$;
- 3) $0 * a = 0$;
- 4) $b * a = 0, a * b = 0$, 可得 $a = b$.

则 $(A, *, 0)$ 称为 BCK 代数.

2 Ω -BCK 代数

定义 12 设 $\mathcal{X}=(X, *, 0)$ 是一个 $(2,0)$ 型代数, $\mu: X \rightarrow \Omega$ 是 $\mathcal{X}$ 上的模糊代数, $E: X^2 \rightarrow \Omega$ 是 μ 上的模糊等式, 如果对任意的 $x, y, z \in X$, 下列模糊恒等式成立:

- 1) $E(((x * y) * (x * z)) * (z * y), 0) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge \mu(z)$;
- 2) $E(x * 0, x) \geq \mu(x)$;
- 3) $E(0 * x, 0) \geq \mu(x)$;
- 4) $E(x, y) = E(x * y, 0) \wedge E(y * x, 0)$.

则称 $\bar{\mathcal{X}}=(\mathcal{X}, E)$ 是一个 Ω -BCK 代数.

注 2 设 $\bar{\mathcal{X}}=(\mathcal{X}, E)$ 是代数 $\mathcal{X}=(X, *, 0)$ 上的 Ω -代数, μ_1 是 μ 的模糊子集, 并且是 $\mathcal{X}$ 的一个模糊子代数, 则 $\bar{\mathcal{X}}_1=(\mathcal{X}, E_1)$ 也是一个 Ω -代数, 其中 $E_1(x, y) = E(x, y) \wedge \mu_1(x) \wedge \mu_1(y)$, E_1 称为 E 在 μ_1 下的限制.

定义 13 设 $\bar{\mathcal{X}}=(\mathcal{X}, E)$ 和 $\bar{\mathcal{X}}_1=(\mathcal{X}, E_1)$ 是同一个代数 $\mathcal{X}=(X, *, 0)$ 上的 Ω -BCK 代数, E_1 是 E 在 μ_1 下的限制, 其中 μ_1 由 E_1 确定, 则称 $\bar{\mathcal{X}}_1$ 是 $\bar{\mathcal{X}}$ 的 Ω -BCK 子代数.

定理 1 设 $\bar{\mathcal{X}}=(\mathcal{X}, E)$ 是一个 Ω -BCK 代数, $E_1: X^2 \rightarrow \Omega$ 是 $\mathcal{X}$ 上的模糊关系, 满足下式:

$$E_1(x, y) = E_1(x, x) \wedge E_1(y, y) \wedge E(x, y),$$

则代数结构 $\bar{\mathcal{X}}_1=(\mathcal{X}, E_1)$ 是 $\bar{\mathcal{X}}=(\mathcal{X}, E)$ 的 Ω -BCK 子代数, 当且仅当下列条件成立:

$$E_1(x, x) \wedge E_1(y, y) = E_1(x * y, x * y).$$

证明: 充分性. 由 $E_1(x, x) \wedge E_1(y, y) = E_1(x * y, x * y)$ 可验证 E_1 是 $\mathcal{X}$ 上的模糊等式, 由假设可知 E_1 与 $\mathcal{X}$ 中的二元运算兼容, 因为

$$E_1(x, y) \wedge E_1(u, v) = E_1(x, x) \wedge E_1(y, y) \wedge E(x, y) \wedge E_1(u, u) \wedge E_1(v, v) \wedge E(u, v) \leq$$

$$E_1(x * u, x * u) \wedge E_1(y * v, y * v) \wedge E(x * u, y * v) = E_1(x * u, x * u),$$

所以结构 $\bar{\mathcal{X}}_1=(\mathcal{X}, E_1)$ 是一个 Ω -代数. 下面证明 $\bar{\mathcal{X}}_1=(\mathcal{X}, E_1)$ 满足定义 12 中 1)~4), 用 μ 和 μ_1 分别表示由 E 和 E_1 确定的 $\bar{\mathcal{X}}$ 和 $\bar{\mathcal{X}}_1$ 的子代数. 先证明定义 12 中 1) 成立, 根据 E_1 的定义有

$$E_1(((x * y) * (x * z)) * (z * y), 0) = E_1(((x * y) * (x * z)) * (z * y), ((x * y) * (x * z)) * (z * y)) \wedge E_1(0, 0) \wedge E(((x * y) * (x * z)) * (z * y), 0) \geq$$

$$\mu_1(((x * y) * (x * z)) * (z * y), ((x * y) * (x * z)) * (z * y)) \wedge \\ \mu_1(0, 0) \wedge \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge \mu(z) \geq \mu_1(x) \wedge \mu_1(y) \wedge \mu_1(z).$$

类似地, 可证明定义 12 中 2) 和 3) 成立. 下面证明定义 12 中 4) 成立. 由 $E_1(x, x) \wedge E_1(y, y) = E_1(x * y, x * y)$, 可得

$$E_1(x, y) = E_1(x, x) \wedge E_1(y, y) \wedge E(x, y) = \\ E_1(x, x) \wedge E_1(y, y) \wedge E_1(y, y) \wedge E_1(x, x) \wedge E(x, y) = \\ E_1(x * y, x * y) \wedge E_1(y * x, y * x) \wedge E(x * y, 0) \wedge E(y * x, 0) = \\ E_1(x * y, 0) \wedge E_1(y * x, 0).$$

反之, 若 $\bar{\mathcal{X}}_1 = (\mathcal{X}, E_1)$ 是 $\bar{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}, E)$ 的 Ω -BCK 子代数, 则 $E_1(x, x) \wedge E_1(y, y) = E_1(x * y, x * y)$ 显然成立.

引理 1 设 $\bar{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}, E)$ 是 Ω -BCK 代数, $\mu: X \rightarrow \Omega$ 是 $\mathcal{X}$ 上的模糊代数, $E: X^2 \rightarrow \Omega$ 是 μ 上的模糊等式, 则对任意的 $\alpha \in \Omega$, 切关系 E_α 是 μ_α 上的同余关系, 其中 $E_\alpha = \{(x, y) \in X^2 \mid E(x, y) \geq \alpha\}$.

证明: 首先, 证明 E_α 是 μ_α 上的等价关系. 对任意的 $x \in \mu_\alpha$, 有 $E(x, x) = \mu(x) \geq \alpha$, 则 $(x, x) \in E_\alpha$, 自反性成立. 对任意的 $x, y \in \mu_\alpha$, 若 $(x, y) \in E_\alpha$, 即 $E(x, y) \geq \alpha$, 而 $E(y, x) = E(x, y) \geq \alpha$, 则 $(y, x) \in E_\alpha$, 对称性成立. 对任意的 $x, y, z \in \mu_\alpha$, 若 $(x, y) \in E_\alpha, (y, z) \in E_\alpha$, 根据 E 的传递性, 有 $E(x, z) \geq E(x, y) \wedge E(y, z) \geq \alpha$, 则 $(x, z) \in E_\alpha$, 传递性成立.

其次, 证明 E_α 与 μ_α 上的运算相容. 取 $x, y, z, w \in \mu_\alpha$, 假设 $(x, y) \in E_\alpha, (z, w) \in E_\alpha$, 即 $E(x, y) \geq \alpha, E(z, w) \geq \alpha$, 又由 $E(x * z, y * w) \geq E(x, y) \wedge E(z, w) \geq \alpha$, 有 $(x * z, y * w) \in E_\alpha$, 所以 E_α 与 μ_α 上的运算相容.

定理 2 设 $\bar{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}, E)$ 是 Ω -代数, $\mu: X \rightarrow \Omega$ 是 X 上的模糊代数, $E: X^2 \rightarrow \Omega$ 是 μ 上的模糊等式, 则 $\bar{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}, E)$ 是 Ω -BCK 代数当且仅当对任意的 $\alpha \in \Omega$, 其商结构 μ_α/E_α 是 BCK 代数.

证明: 充分性. 假设对任意的 $\alpha \in \Omega$, 其商结构 μ_α/E_α 是 BCK 代数, 则只需证明 $\bar{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}, E)$ 是 Ω -BCK 代数.

先证明定义 12 中 1) 成立. 设 $\mu(x) \wedge \mu(y) \wedge \mu(z) = \alpha$, 则 $x, y, z \in \mu_\alpha$. 由于假设 μ_α/E_α 是 BCK 代数, 有

$$((\lfloor x \rfloor_{E_\alpha} * \lfloor y \rfloor_{E_\alpha}) * (\lfloor x \rfloor_{E_\alpha} * \lfloor z \rfloor_{E_\alpha})) * (\lfloor z \rfloor_{E_\alpha} * \lfloor y \rfloor_{E_\alpha}) = (\lfloor x * y \rfloor_{E_\alpha} \lfloor x * z \rfloor_{E_\alpha}) * \lfloor z * y \rfloor_{E_\alpha} = \\ \lfloor ((x * y) * (x * z)) * (z * y) \rfloor_{E_\alpha} = \lfloor 0 \rfloor_{E_\alpha},$$

则 $((x * y) * (x * z)) * (z * y), 0 \in E_\alpha$, 从而

$$E(((x * y) * (x * z)) * (z * y), 0) \geq \alpha = \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge \mu(z).$$

同理可证明定义 12 中 2) 和 3) 也成立.

下面证明定义 12 中 4) 成立. 设 $E(x * y, 0) \wedge E(y * x, 0) = \alpha$, 则 $(x * y, 0) \in E_\alpha, (y * x, 0) \in E_\alpha$, 即 $\lfloor x * y \rfloor_{E_\alpha} = \lfloor x \rfloor_{E_\alpha} * \lfloor y \rfloor_{E_\alpha} = \lfloor 0 \rfloor_{E_\alpha}$, 且 $\lfloor y * x \rfloor_{E_\alpha} = \lfloor y \rfloor_{E_\alpha} * \lfloor x \rfloor_{E_\alpha} = \lfloor 0 \rfloor_{E_\alpha}$. 由 BCK 代数的定义, 有 $\lfloor x \rfloor_{E_\alpha} = \lfloor y \rfloor_{E_\alpha}$, 即 $(x, y) \in E_\alpha$, 则

$$E(x, y) \geq \alpha = E(x * y, 0) \wedge E(y * x, 0).$$

同理, 设 $E(x, y) = \alpha$, 可得 $E(x * y, 0) \wedge E(y * x, 0) \geq \alpha = E(x, y)$. 因此, $E(x * y, 0) \wedge E(y * x, 0) = E(x, y)$.

必要性. 假设 $\bar{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}, E)$ 是 Ω -BCK 代数, 证明对任意的 $\alpha \in \Omega$, μ_α/E_α 是 BCK 代数. 取任意的 $\lfloor x \rfloor_{E_\alpha}, \lfloor y \rfloor_{E_\alpha}, \lfloor z \rfloor_{E_\alpha} \in \mu_\alpha/E_\alpha$, 由于

$$E(((x * y) * (x * z)) * (z * y), 0) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge \mu(z) \geq \alpha,$$

所以 $((x * y) * (x * z)) * (z * y), 0 \in E_\alpha$, 则有

$$((\lfloor x \rfloor_{E_\alpha} * \lfloor y \rfloor_{E_\alpha}) * (\lfloor x \rfloor_{E_\alpha} * \lfloor z \rfloor_{E_\alpha})) * (\lfloor z \rfloor_{E_\alpha} * \lfloor y \rfloor_{E_\alpha}) = \\ ((\lfloor x \rfloor_{E_\alpha} * \lfloor y \rfloor_{E_\alpha}) * (\lfloor x \rfloor_{E_\alpha} * \lfloor z \rfloor_{E_\alpha})) * (\lfloor z \rfloor_{E_\alpha} * \lfloor y \rfloor_{E_\alpha}) = \\ (\lfloor x * y \rfloor_{E_\alpha} * \lfloor x * z \rfloor_{E_\alpha}) * \lfloor z * y \rfloor_{E_\alpha} = \lfloor (x * y) * (x * z) \rfloor_{E_\alpha} * \lfloor z * y \rfloor_{E_\alpha} = \\ \lfloor ((x * y) * (x * z)) * (z * y) \rfloor_{E_\alpha} = \lfloor 0 \rfloor_{E_\alpha}.$$

同理可证明定义 11 中 2) 和 3) 成立. 下面证明定义 11 中 4) 成立. 对任意的 $[x]_{E_a}, [y]_{E_a} \in \mu_a/E_a$, 若有 $[x]_{E_a} * [y]_{E_a} = [x * y]_{E_a} = [0]_{E_a}$, 且 $[y]_{E_a} * [x]_{E_a} = [y * x]_{E_a} = [0]_{E_a}$, 则 $(x * y, 0), (y * x, 0) \in E_a$, 即 $E(x * y, 0) \wedge E(y * x, 0) \geq \alpha$. 又因为 $E(x, y) = E(x * y, 0) \wedge E(y * x, 0) \geq \alpha$, 所以 $(x, y) \in E_a$, $[x]_{E_a} = [y]_{E_a}$.

3 Ω -BCK 代数中的 E -偏序关系

引理 2^[13] 设 $\bar{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}, E)$ 是 Ω -BCK 代数, $\mu: X \rightarrow \Omega$ 是 $\mathcal{X}$ 上的模糊代数, $E: X^2 \rightarrow \Omega$ 是 μ 上的模糊等式, $\rho: X^2 \rightarrow \Omega$ 是 $\mathcal{X}$ 上的模糊关系, 定义为 $\rho(x, y) := \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge E(x * y, 0)$. 任取 $\alpha \in \Omega$, 若对任意的 $x, y \in \mu_a$, $[x]_{E_a}, [y]_{E_a} \in \mu_a/E_a$, 则 $[x]_{E_a} \leq [y]_{E_a}$ 当且仅当 $\rho(x, y) \geq \alpha$.

定理 3 设 $\bar{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}, E)$ 是 Ω -BCK 代数, $\mu: X \rightarrow \Omega$ 是 $\mathcal{X}$ 上的模糊代数, $E: X^2 \rightarrow \Omega$ 是 μ 上的模糊等式, $\rho: X^2 \rightarrow \Omega$ 是 $\mathcal{X}$ 上的模糊关系, $\rho(x, y) := \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge E(x * y, 0)$, 则模糊关系 ρ 是 Ω -BCK 代数 $\bar{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}, E)$ 上的 E -偏序关系.

证明: 首先, 有 $\rho(x, x) = \mu(x) \wedge \mu(x) \wedge E(x * x, 0) \geq \mu(x)$, 而 $\rho(x, x) \leq \mu(x) \wedge \mu(x) = \mu(x)$, 因此 $\rho(x, x) = \mu(x)$, 所以 ρ 在 μ 上是自反的.

其次, 假设 $\rho(x, y) \wedge \rho(y, x) = \alpha \in \Omega$, 则根据 ρ 的定义知, $\mu(x) \geq \alpha, \mu(y) \geq \alpha$, 从而 $x, y \in \mu_a$. 并且 $\rho(x, y) \geq \alpha, \rho(y, x) \geq \alpha$, 根据引理 2, 有 $[x]_{E_a} \leq [y]_{E_a}, [y]_{E_a} \leq [x]_{E_a}$, 所以 $[x]_{E_a} = [y]_{E_a}$, 从而 $(x, y) \in E_a$, 即 $E(x, y) \geq \alpha = \rho(x, y) \wedge \rho(y, x)$.

最后, 为验证传递性, 将验证 ρ 的所有切关系作为普通关系在对应 μ 的截集上是传递的. 令 $\alpha \in \Omega$, 假设 $(x, y) \in \rho_a, (y, z) \in \rho_a$. 由 ρ 的定义可得 $x, y, z \in \mu_a, (x * y, 0), (y * z, 0) \in E_a$. 由 E 的定义, 有

$$\begin{aligned} E(x * z, ((x * z) * 0) * 0) &\geq E(x * z, (x * z) * 0) \wedge E((x * z) * 0, ((x * z) * 0) * 0) \geq \\ &\mu(x * z) \wedge \mu((x * z) * 0) \geq \mu(x) \wedge \mu(z) \geq \alpha. \end{aligned}$$

根据 E 与运算 $*$ 的相容性, 有

$$\begin{aligned} E(((x * z) * 0) * 0, ((x * z) * (x * y)) * (y * z)) &\geq \\ E(x * z, x * z) \wedge E(0, x * y) \wedge E(0, y * z) &\geq \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge \mu(z) \geq \alpha. \end{aligned}$$

由定义 12 中 1), 可得

$$E(((x * z) * (x * y)) * (y * z), 0) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge \mu(z) \geq \alpha,$$

由 E 的传递性可得 $E(x * z, 0) \geq \alpha$, 即 $(x * z, 0) \in E_a$, 所以所有的截集都是传递的.

令 $\rho(x, y) \wedge \rho(y, z) = \alpha \in \Omega$, 则 $\rho(x, y) \geq \alpha, \rho(y, z) \geq \alpha$, 所以 $(x, y), (y, z) \in \rho_a$, 而 ρ_a 是传递的, 因此 $(x, z) \in \rho_a$, 即 $\rho(x, z) \geq \alpha = \rho(x, y) \wedge \rho(y, z)$.

综上所述, 本文在模糊等式的框架下, 引入了 Ω -BCK 代数的概念, 刻画了 Ω -BCK 代数的子结构和商结构, 并讨论了其相关性质. 通过定义 Ω -BCK 代数中的 E -偏序关系, 推广了经典 BCK 代数的序结构. 后续研究可进一步基于模糊等式讨论其他逻辑代数的推广, 并讨论这些模糊逻辑代数结构之间的关系.

参 考 文 献

- [1] ZADEH L A. Fuzzy Sets [J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.
- [2] GOGUEN J A. L-Fuzzy Sets [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1967, 18(1): 145-174.
- [3] FOURMAN M P, SCOTT D S. Sheaves and Logic [M]//Applications of Sheaves. Berlin: Springer, 1979: 302-401.
- [4] HÖHLE U. Quotients with Respect to Similarity Relations [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1988, 27(1): 31-44.
- [5] DEMIRCI M. L-Equivalence Relations on L-Fuzzy Sets, L-Partitions of L-Fuzzy Sets and Their One-to-One Connections [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2019, 111: 21-34.
- [6] DEMIRCI M. Vague Groups [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1999, 230(1): 142-156.
- [7] BĚLOHLÁVEK R, VYCHODIL V. Algebras with Fuzzy Equalities [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(2): 161-201.

- [8] ŠEŠELJA B, TEPAVČEVIĆ A. Fuzzy Identities [C]//2009 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. [S.l.]: IEEE, 2009: 1660-1664.
- [9] BUDIMIROVIĆ B, BUDIMIROVIĆ V, ŠEŠELJA B, et al. Fuzzy Equational Classes Are Fuzzy Varieties [J]. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 2013, 10(4): 1-18.
- [10] BUDIMIROVIĆ B, BUDIMIROVIĆ V, ŠEŠELJA B, et al. Fuzzy Identities with Application to Fuzzy Semigroups [J]. Information Sciences, 2014, 266: 148-159.
- [11] ŠEŠELJA B, TEPAVČEVIĆ A. Ω -Algebras [C]//2015 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence. [S.l.]: IEEE, 2015: 971-975.
- [12] BUDIMIROVIĆ B, BUDIMIROVIĆ V, ŠEŠELJA B, et al. E -Fuzzy Groups [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2016, 289: 94-112.
- [13] ŠEŠELJA B, TEPAVČEVIĆ A. L - E -Fuzzy Lattices [J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2015, 17(3): 366-374.
- [14] JIMENEZ J, SERRANO M L, ŠEŠELJA B, et al. Omega-Rings [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2023, 455(C): 183-197.
- [15] 周鑫, 刘森. 基于 L -值泛代数的 L -值模 [J]. 山东大学学报(理学版), 2023, 58(3): 48-54. (ZHOU X, LIU M. L -Valued Modules Based on L -Valued Universal Algebras [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2023, 58(3): 48-54.)
- [16] TCHOFFO FOKA S V, TONGA M. A Note on the Algebraicity of L -Fuzzy Subalgebras in Universal Algebra [J]. Soft Computing, 2020, 24(2): 895-899.
- [17] 周鑫, 刘森. 范畴视角下的 L -值群结构 [J]. 模糊系统与数学, 2024, 38(6): 55-61. (ZHOU X, LIU M. Structures of L -Valued Groups from Category Theory Perspective [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2024, 38(6): 55-61.)
- [18] ZHI Y, LI Q G, ZHOU X N. Fuzzy Green's Relations and Its Applications in E -Fuzzy Semigroups [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2025, 517: 109482-1-109482-21.
- [19] ZHI Y, ZHOU X N, LI Q G. Green's Relations in L - E -Fuzzy Skew Lattices [J]. Soft Computing, 2022, 26(14): 6481-6494.
- [20] ISĖKI K. An Algebra Related with a Propositional Calculus [J]. Proceedings of the Japan Academy, 1966, 42(1): 26-29.
- [21] 汪国军, 姜秀燕. 阶 $n \leq 5$ 有条件(S)的真 BCI 代数结构 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2006, 44(6): 913-915. (WANG G J, JIANG X Y. The Structure of Proper BCI-Algebras with Order $n \leq 5$ and Condition (S) [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2006, 44(6): 913-915.)
- [22] CIUNGU L C. Results in L -Algebras [J]. Algebra Universalis, 2021, 82(1): 1-16.
- [23] AALY KOLOGANI M. Relations between L -Algebras and Other Logical Algebras [J]. Journal of Algebraic Hyperstructures and Logical Algebras, 2023, 4(1): 27-46.
- [24] XI O G. Fuzzy BCK-Agebras [J]. Mathematica Japonica, 1991, 36(5): 935-942.
- [25] JUN Y B, MENG J, XIN X L. On Fuzzy BCK-Filters [J]. The Korean Journal of Computational and Applied Mathematics, 1998, 5(1): 91-97.
- [26] AHMED M A, AMHED E A. Fuzzy BCK-Algebras [J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, 2020, 8(5): 927-932.
- [27] 刘春辉. BCI/BCK 代数的反模糊(闭)理想格 [J]. 模糊系统与数学, 2025, 39(1): 21-32. (LIU C H. Lattice of Anti-fuzzy (Closed) Ideals in a Civen BCI/BCK-Algebra [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2025, 39(1): 21-32.)

(责任编辑: 赵立芹)