

基于 OWA 算子的模糊 n -cell 数排序方法

刘焱[†], 叶国菊, 刘尉

(河海大学 数学学院, 江苏 南京 211100)

摘 要: 针对基于模糊 n -cell 数的多属性排序问题, 提出了一种基于有序加权平均算子(OWA 算子)的模糊 n -cell 数排序方法。该方法首先根据样本数据对评估对象的属性构造模糊 n -cell 数, 其次根据均值将属性按照从大到小排列, 然后选取合适的权重向量, 应用 OWA 算子进行信息聚合得到综合模糊 n -cell 数, 接着根据各分量均值得到排序结果。最后, 将该方法运用到实例中, 并传统的均值方法进行了比较。结果表明该方法不仅灵活有效, 可根据具体情况选择不同的 OWA 权重来消除部分不合理的情况, 使结果更有说服力, 还弥补了传统均值方法的不足。

关键词: 模糊 n -cell 数; 有序加权平均算子; 排序; 权重

中图分类号: O159

文献标识码: A

Fuzzy n -cell Number Ranking Based on OWA Operator

LIU Yan[†], YE Guoju, LIU Wei

(School of Mathematics, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 211100, China)

Abstract: To deal with the multi-attribute ranking problem based on fuzzy n -cell numbers, a fuzzy n -cell number ranking method based on the ordered weighted average operator (OWA operator) is proposed. The method first constructs fuzzy n -cell numbers based on sample data for the attributes of evaluation objects, secondly ranks the attributes according to the mean value from largest to smallest, then selects appropriate weight vectors, applies the OWA operator for information aggregation to obtain the integrated fuzzy n -cell numbers, and then obtains the ranking results based on the mean value of each component. Finally, the method is applied to the example and compared with the traditional mean value method. The results show that the method is not only flexible and effective, and different OWA weights can be chosen according to the specific situation to eliminate some unreasonable cases and make the results more convincing, but also makes up for the shortcomings of the traditional mean value method.

Key words: fuzzy n -cell number; ordered weighted averaging operator; ordering; weight

由于客观事物的复杂性和不确定性, 人们通常不能对事物作出明确的评价信息, 或者说现实世界并不是非此即彼的。由此 Zadeh^[1] 在 1965 年提出了“模糊集”的概念, 用数学方法来描述模糊现象, 这就是模糊数学的开端。在过去几十年中, 围绕模糊理论已经开展了许多研究并获得了巨大的发展,

该理论已广泛地应用于专家系统、模式识别、信息融合等领域^[2-3]。王桂祥等^[4] 于 2002 年提出了一种特殊的 n -维模糊数, 并将其称为模糊 n -cell 数。该模糊数具有比一般 n 维模糊数更加优良的性质^[5-8], 随后王桂祥等人将其应用于分类与模式识别等方面并取得了较好的效果^[9-11]。模糊 n -cell

收稿日期: 2023-04-14

基金项目: 国家冰川冻土沙漠科学数据中心开放基金资助(2021kf03); 湖北省教育厅重点项目资助(D20192501)

作者简介: 刘焱(1998—), 男, 安徽淮北人, 硕士研究生, 研究方向: 模糊决策。

[†] 通信联系人, E-mail: liuy11123@163.com

数的排序在实际应用中十分重要,一直受到学者的广泛关注,到目前为止,有关模糊 n -cell 数的排序已获得一些成果^[12-13],但其方法基本都是基于模糊数本身的特征如均值等建立起来的。

在实际决策时,常常需要考虑不同决策人的偏好问题,进而将决策人的偏好信息集结起来,而有序加权平均 OWA 算子^[14]能够灵活有效应对各种复杂的情况,故其是一种重要的多属性综合决策方法,通常应用于管理与决策领域。秦伟等^[15]建立了 OWA 与相对熵理论相结合的工程项目承包商优选评价决策模型;章俊等^[16]提出了一种基于 OWA 算子和 BP 神经网络的绿色施工评价方法。然而,将 OWA 算子与模糊 n -cell 数相结合进行的研究很少。

因此,本文基于 OWA 算子提出了一种新的模糊 n -cell 数的排序方法,为模糊 n -cell 数的排序提供了一种新思路。该方法既可以通过选择 OWA 算子权重来影响每个属性的重要程度,进而影响排序结果,又可以通过 OWA 算子位置特性消除部分不合理的情况。最后通过关于农产品选择的具体算例说明该排序方法的可行性和有效性。

1 预备知识

本节主要介绍模糊 n -cell 数和 OWA 算子的有关概念与性质。

1.1 模糊 n -cell 数的基本概念

定义 1^[1] 给定论域 X ,称映射 $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ 为 X 上的一个模糊集合(可简称为模糊集),模糊集可以记为 A . 对于任意 $x \in X$,称值 $\mu_A(x)$ 为 x 对 A 的隶属程度,函数 $\mu_A(x)$ 称为模糊集 A 的隶属函数。 X 上的模糊集的全体构成的集合记为 $F(X)$ 。

定义 2 设 $u \in F(R^n)$ (论域 R^n 上的模糊集合的全体),若 u 是一个正规的凸模糊集,且 $u(x)$ 是上半连续函数, u 的支集 $\text{supp}u$ 的闭包 $[u]^0 = \overline{\{x \in R^n: u(x) > 0\}}$ 是紧的,则称 u 是一个 n 维模糊数,由所有 n 维模糊数的全体构成 n 维模糊数空间,记为 E^n 。

模糊 n -cell 数是一种特殊的 n 维模糊数。

定义 3^[4] 如果 $u \in E^n$,并且对于任意的 $r \in [0,1]$, $[u]^r$ 是一个 n 维方体,即 $[u]^r$ 可表示为

$\prod_{i=1}^n [\underline{u}_i(r), \bar{u}_i(r)]$ 的形式,其中 $\underline{u}_i(r), \bar{u}_i(r) \in R$, 满足 $\underline{u}_i(r) \leq \bar{u}_i(r)$, $r \in [0,1]$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则称 u 是一个模糊 n -cell 数。用 $L(E^n)$ 表示由所有的模糊 n -cell 数构成的集合。通常使用均值和离散度来度量一个模糊 n -cell 数。

定义 4^[17] 设 $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in L(E^n)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in R^n$ 且满足 $\alpha_i \geq 0$ 及 $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, 则称 u 的(关于权重 α 的加权)均值为:

$$M_\alpha(u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^1 r [\underline{u}_i(r) + \bar{u}_i(r)] dr \quad (1)$$

定义 5^[17] 设 $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in L(E^n)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in R^n$ 且满足 $\alpha_i \geq 0$ 及 $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, 则称 u 的(关于权重 α 的加权)离散度为:

$$D_\alpha(u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^1 r [\bar{u}_i(r) - \underline{u}_i(r)] dr \quad (2)$$

1.2 模糊 n -cell 数的构造

本节介绍了基于数据均值和左右离散度构造模糊 n -cell 数的方法^[17]。

假设 $D_\alpha(u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^1 r [\bar{u}_i(r) - \underline{u}_i(r)] dr$ 具有 n 个不同的属性 $o_1, o_2, \dots, o_n$, 先根据实际情况给每个 $o_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 确定一个取值范围 D_i , 任取 $D_\alpha(u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^1 r [\bar{u}_i(r) - \underline{u}_i(r)] dr$ 的 m 个样本,并对第 $j (j = 1, 2, \dots, m)$ 个样本的 n 个属性分别获得一个观测值 $(o_{1j}, o_{2j}, \dots, o_{nj})^T$, 可以得到:

$$O = \begin{pmatrix} o_{11} & o_{12} & \dots & o_{1m} \\ o_{21} & o_{22} & \dots & o_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ o_{n1} & o_{n2} & \dots & o_{nm} \end{pmatrix}$$

首先,对于每个 $i = (1, 2, \dots, n)$ 分别计算每个属性的均值 μ_i 及左右离散度 $L\sigma_i$ 和 $R\sigma_i$, 即:

$$\begin{aligned} \mu_i &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m o_{ik} \\ L\sigma_i &= \frac{1}{N_{L_i}} \sum_{o_{ij} < \mu_i} (\mu_i - o_{ij}) \end{aligned} \quad (3)$$

$$R\sigma_i = \frac{1}{N_{R_i}} \sum_{o_{ij} > \mu_i} (o_{ij} - \mu_i)$$

其中, N_{L_i} 和 N_{R_i} 分别为满足 $o_{ij} < \mu_i$ 和 $o_{ij} > \mu_i$ 的 o_{ij} 的个数。

其次,对于每个 $i(1,2,\cdots,n)$ 构造 1 维三角模糊数 u_i ,即:

$$u_i = \begin{cases} \frac{x - (\mu_i - \alpha L \sigma_i)}{\alpha L \sigma_i}, & x \in [\mu_i - \alpha L \sigma_i, \mu_i] \cap D_i \\ \frac{(\mu_i + \alpha R \sigma_i) - x}{\alpha R \sigma_i}, & x \in (\mu_i, \mu_i + \alpha R \sigma_i] \cap D_i \\ 0, & x \notin [\mu_i - \alpha L \sigma_i, \mu_i + \alpha R \sigma_i] \cap D_i \end{cases} \quad (4)$$

其中, α 为参数,可根据实际情况在区间 $[2,4]$ 中选取。

最后,构造模糊 n -cell 数: $u(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \min \{u_1(x_1), u_2(x_2), \cdots, u_n(x_n)\}$ (5)

即有 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$,则可用模糊 n -cell

数 u 来表示 $D_\alpha(u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^1 r [\bar{u}_i(r) - \underline{u}_i(r)] dr$.

1.3 OWA 算子

定义 6^[14] 设 $f: R^n \rightarrow R$, 若

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j \quad (6)$$

其中 $W = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ 是与 f 相关联的加权向量 $w_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, 且 b_j 是数据 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 中第 j 大的元素,则称 f 函数是 n 维有序加权平均(OWA)算子。

(1)当 $W = W^* = (1, 0, \cdots, 0)$ 时,其相应的 OWA 算子为:

$f^*(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \max_i a_i$, 则该 OWA 算子为最大值算子。

(2)当 $W = W_* = (0, 0, \cdots, 1)$ 时,其相应的 OWA 算子为:

$f_*(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \min_i a_i$, 则该 OWA 算子为最小值算子。

(3)当 $W = W_{ave} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n})$ 时,其相应的 OWA 算子为:

$$f_{ave}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j$$

则该 OWA 算子为算术平均算子。

OWA 算子相对于传统的聚合算子的优点: OWA 算子的系数与属性排序后的位置相关,因此可以有效消除一些不合理的情况。此外,选择不同的权重可以生成不同的 OWA 算子,因此可根据实际问题来进行权重的选择,提高最终结果的可

信度。

2 基于 OWA 算子的模糊 n -cell 数排序

本节基于 OWA 算子提出了一种新的模糊 n -cell 数的排序方法,并通过实例将该方法与传统均值方法进行比较。

2.1 问题描述

假设有 k 个目标 $O_1, O_2, \cdots, O_k$, 每个目标根据 n 个属性 $o_1, o_2, \cdots, o_n$ 选取 m 个样本分别获得观测值 $(o_{1j}, o_{2j}, \cdots, o_{nj})^T (j = 1, 2, \cdots, m)$, 组成 k 组数据,然后根据所得数据对目标 $O_1, O_2, \cdots, O_k$ 进行排序,即:

$$O_1 = \begin{pmatrix} o_{11}^1 & o_{11}^1 & o_{12}^1 & \cdots & o_{1m}^1 \\ o_{21}^1 & o_{21}^1 & o_{22}^1 & \cdots & o_{2m}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ o_{n1}^1 & o_{n1}^1 & o_{n2}^1 & \cdots & o_{nm}^1 \end{pmatrix}$$

$$O_k = \begin{pmatrix} o_{11}^k & o_{11}^k & o_{12}^k & \cdots & o_{1m}^k \\ o_{21}^k & o_{21}^k & o_{22}^k & \cdots & o_{2m}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ o_{n1}^k & o_{n1}^k & o_{n2}^k & \cdots & o_{nm}^k \end{pmatrix}$$

2.2 算法步骤

本文根据 OWA 算子的特点提出一种新的模糊排序方法,即先利用模糊 n -cell 数的排序方法确定属性的不增排列顺序,然后对其进行加权集结。权重 $W = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ 与特定的属性无关,而是与排序后的位置有关,故权重 W 也被称为位置权重向量。

第一步:首先对属性 $o_1, o_2, \cdots, o_n$ 归一化,然后构造 n 个模糊 k -cell 数,对其求均值后由大到小排列属性。

第二步:选取权重,并对排列后的属性矩阵应用 OWA 算子进行聚合,得到聚合结果。

第三步:根据聚合结果构造一个综合 k -cell 数,比较其分量的各均值大小即可得到原目标的排序。

2.3 算法实例

假设在某农业区只种植两种小麦,分别记为 O_1 和 O_2 . 它们分别有四个属性:抽穗期(用 o_1 表示),株高(用 o_2 表示),穗粒数(用 o_3 表示),百粒重(用 o_4 表示)。假设通过随机抽样调查,获得下面两组分别来自 O_1 和 O_2 的数据:

$$\mathbf{O}_1 = \begin{pmatrix} & o_1 & o_2 & o_3 & o_4 \\ 1 & 8.8 & 67.8 & 40.7 & 4.2 \\ 2 & 7.6 & 81.1 & 51.6 & 3.5 \\ 3 & 9.9 & 77.5 & 46.5 & 3.8 \\ 4 & 6.2 & 78.6 & 46.8 & 3.6 \\ 5 & 8.4 & 68.8 & 47.2 & 4.4 \\ 6 & 8.5 & 75.6 & 45.3 & 4.5 \\ 7 & 7.9 & 64.2 & 44.2 & 3.8 \\ 8 & 8.4 & 77.6 & 48.8 & 3.2 \\ 9 & 9.1 & 79.5 & 42.1 & 3.2 \\ 10 & 8.4 & 77.8 & 49.8 & 4.6 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{O}_2 = \begin{pmatrix} & o_1 & o_2 & o_3 & o_4 \\ 1 & 7.0 & 83.8 & 48.3 & 3.9 \\ 2 & 6.9 & 81.3 & 37.1 & 3.7 \\ 3 & 5.1 & 88.9 & 43.7 & 3.5 \\ 4 & 8.9 & 72.2 & 34.8 & 3.4 \\ 5 & 6.8 & 82.5 & 50.2 & 3.6 \\ 6 & 7.2 & 76.8 & 41.3 & 3.2 \\ 7 & 8.7 & 73.3 & 39.3 & 4.1 \\ 8 & 5.9 & 70.3 & 45.8 & 4.0 \\ 9 & 8.4 & 75.1 & 46.4 & 3.3 \\ 10 & 7.5 & 84.8 & 42.8 & 3.8 \end{pmatrix}$$

第一步:首先对属性 o_1, o_2, o_3, o_4 归一化,然后构造 4 个模糊 2-cell 数,对其求均值后由大到小排列属性。

$$\mathbf{o}_1 = \begin{pmatrix} 0.889 & 0.787 \\ 0.768 & 0.775 \\ 1.000 & 0.573 \\ 0.626 & 1.000 \\ 0.848 & 0.764 \\ 0.859 & 0.809 \\ 0.797 & 0.978 \\ 0.848 & 0.663 \\ 0.919 & 0.944 \\ 0.848 & 0.843 \end{pmatrix} \quad \mathbf{o}_2 = \begin{pmatrix} 0.836 & 0.943 \\ 1.000 & 0.915 \\ 0.956 & 1.000 \\ 0.969 & 0.812 \\ 0.848 & 0.928 \\ 0.932 & 0.864 \\ 0.792 & 0.825 \\ 0.957 & 0.791 \\ 0.980 & 0.845 \\ 0.959 & 0.954 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{o}_3 = \begin{pmatrix} 0.789 & 0.962 \\ 1.000 & 0.739 \\ 0.901 & 0.871 \\ 0.907 & 0.693 \\ 0.915 & 1.000 \\ 0.878 & 0.823 \\ 0.857 & 0.783 \\ 0.946 & 0.912 \\ 0.816 & 0.924 \\ 0.965 & 0.853 \end{pmatrix} \quad \mathbf{o}_4 = \begin{pmatrix} 0.913 & 0.951 \\ 0.761 & 0.902 \\ 0.826 & 0.854 \\ 0.783 & 0.829 \\ 0.957 & 0.878 \\ 0.978 & 0.780 \\ 0.826 & 1.000 \\ 0.696 & 0.976 \\ 0.696 & 0.805 \\ 1.000 & 0.927 \end{pmatrix}$$

构造 2-cell 数:

$$u_{o_1} = (u_{o_{11}}, u_{o_{12}}), u_{o_2} = (u_{o_{21}}, u_{o_{22}}), u_{o_3} = (u_{o_{31}}, u_{o_{32}}), u_{o_4} = (u_{o_{41}}, u_{o_{42}})$$

则其均值分别为:

$$M(o_1) = 0.809, M(o_2) = 0.881,$$

$$M(o_3) = 0.865, M(o_4) = 0.865,$$

则得到属性大小: $o_2 > o_3 > o_4 > o_1$.

第二步:为消除取样偏差对最终结果的影响,对过高和过低的样本都给予一定的“惩罚”,即给予的权重偏小,为此确定权重向量为 $W = (0.15, 0.35, 0.35, 0.15)$.

分别将权重与排列后的属性矩阵相乘并求和,即 $w_1 o_2 + w_2 o_3 + w_3 o_4 + w_4 o_1$,聚合可得:

$$\begin{pmatrix} 0.854 & 0.929 \\ 0.882 & 0.828 \\ 0.898 & 0.840 \\ 0.831 & 0.805 \\ 0.910 & 0.911 \\ 0.918 & 0.812 \\ 0.828 & 0.895 \\ 0.845 & 0.879 \\ 0.814 & 0.874 \\ 0.959 & 0.893 \end{pmatrix}$$

第三步:根据聚合结果构造一个综合模糊 2-cell 数,比较其分量的各均值大小即可得到原目标的排序。两目标均值分别为:

$$M(O_1) = 0.874, M(O_2) = 0.856$$

可得 $O_1 > O_2$,即 O_1 的品质更好,且其区分度更高。

2.4 结果对比

根据传统的均值方法^[16]可得: $M(O_1) = 0.86, M(O_2) = 0.86$,则上述问题无法获得排序结果。然而,本文提出的方法可解决该问题,其原因是基于 OWA 算子的模糊 n -cell 数排序方法可以在排序时考虑得更加全面,选用 $W = (0.15, 0.35, 0.35, 0.15)$ 作为权重可以对极端值赋予稍低的权重,进而可以削弱极端值对最终结果的影响,这样得到的结果更具说服力,在遇到不同情况时也可根据具体情况选择合适的权重得到合理的排序结果。

3 结 论

模糊 n -cell 数的排序方法在其应用中占据重

要地位,如何合理地排序自然而然成为模糊 n -cell 数研究的重点,在以往研究中大多是根据离散度与均值进行排序的方法,本文则将 OWA 算子应用到模糊 n -cell 数的排序中,为模糊 n -cell 数的排序提供了一种新思路。根据具体情况或者实际要求选取不同的权重时,可以相应生成不同的 OWA 算子,在实际应用中更加灵活,更加贴合实际地考虑到每个属性的重要程度,同时对使用传统方法不能解决的问题可以给出一种合理的结果。

参考文献

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965(8): 338—353.

[2] 徐泽水. 几类多属性决策方法研究[D]. 南京:东南大学, 2003.

[3] DE MIGUEL L, SESMA-SARA M, ELKANOI M, et al. An algorithm for group decision making using n -dimensional fuzzy sets,admissible orders and OWA operators [J]. Information Fusion, 2017, 37: 126—131.

[4] WANG G X,WU C X. Fuzzy n -cell numbers and the differential of fuzzy n -cell number value mappings[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 130(3): 367—381.

[5] 黄天琦. 模糊 n -方体数空间上的微分方程的解的若干性质 [D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2016.

[6] 李雨奇. 一类特殊 n -维模糊数空间上的弱序[D]. 杭州:杭州电子科技大学,2011.

[7] 刘晓芬,黄欢. 模糊 n -cell 数近似大于等于关系的性质[J]. 集美大学学报(自然科学版),2019,24(5):378—381.

[8] 高新妮,王桂祥. 四棱锥形模糊数[J]. 杭州电子科技大学学报(自然科学版),2009,29(4):91—94.

[9] WANG G X, LI Y M, WEN C L. On fuzzy n -cell numbers and n -dimension fuzzy vectors [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158(1): 71—84.

[10] WANG G X, SHI P, MESSENGER P. Representation of uncertain multichannel digital signal spaces and study of pattern recognition based on metrics and difference values on fuzzy n -cell number spaces [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2009, 17(2): 421—439.

[11] WANG G X, SHI P, WEN C L. Fuzzy approximation relations on fuzzy n -cell number space and their applications in classification [J]. Information Sciences, 2011, 181(18): 3846—3860.

[12] 王晓连,王桂祥. 基于质心值及离散度的模糊数排序[J]. 杭州电子科技大学学报(自然科学版),2017,37(6): 91—94.

[13] 高新妮. 模糊数的二元关系及其应用[D]. 杭州:杭州电子科技大学,2009.

[14] YAGER R R. Constrained OWA aggregation [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 81(1): 89—101.

[15] 秦伟,陈安亮. 基于 OWA 算子和相对熵的工程项目承包商优选评价研究[J]. 项目管理技术,2023,21(1):73—76.

[16] 章俊,胡龙伟,孙雨,等. 基于 OWA 算子与 BP 神经网络的绿色施工评价研究[J]. 青岛理工大学学报,2021,42(6):29—34.

[17] 王桂祥. 模糊数理论及应用[M]. 北京:国防工业出版社, 2011.