

求解单调变分包含问题的 自适应-正则化方法及应用

胡洪漂¹, 李倩², 张弘飏¹, 闻道君¹

(1. 重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067; 2. 重庆工业职业技术大学 通识教育学院, 重庆 401120)

摘要: 在 Hilbert 空间中给出一种求解单调变分包含问题的自适应-正则化方法. 首先, 利用自适应规则去除现有算法收敛性分析中迭代步长对算子的依赖; 其次, 结合正则化技巧建立关于求解变分包含问题的强收敛性定理; 最后, 通过图像重建实验说明该算法的收敛性和优越性.

关键词: 变分包含问题; 自适应算法; 正则化; 强收敛; 图像重建

中图分类号: O177.91 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2026)03-0521-07

Adaptive Regularization Method for Solving Monotonic Variational Inclusion Problems and Applications

HU Hongli¹, LI Qian², ZHANG Hongyang¹, WEN Daojun¹

(1. School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;
2. School of General Educations, Chongqing Industry Polytechnic University, Chongqing 401120, China)

Abstract: We gave an adaptive regularization method for solving monotonic variational inclusion problems in Hilbert space. Firstly, we used adaptive rules to eliminate the dependence of iterative step-sizes on operators in the convergence analysis of existing algorithms. Secondly, we combined regularization technique to establish strong convergence theorems for solving variational inclusion problems. Finally, the convergence and superiority of the proposed algorithm were demonstrated through image reconstruction experiment.

Keywords: variational inclusion problem; adaptive algorithm; regularization; strong convergence; image reconstruction

0 引言

设 H 为一实 Hilbert 空间, 其内积和范数分别表示为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\| \cdot \|$, $A: H \rightarrow 2^H$ 是集值映象, $B: H \rightarrow H$ 是单值算子. 考虑变分包含问题: 求 $x^* \in H$ 满足

$$0 \in Ax^* + Bx^*.$$
(1)

用 Ω 表示变分包含问题的解, 并假设 $\Omega \neq \emptyset$. 变分包含问题包含变分不等式、平衡问题和最优化等

收稿日期: 2025-08-18. 网络首发日期: 2026-04-03.

第一作者简介: 胡洪漂(2000—), 男, 土家族, 硕士研究生, 从事数值方法及应用的研究, E-mail: hhl621798@163.com. **通信作者简介:** 闻道君(1975—), 男, 汉族, 硕士, 教授, 从事非线性算子不动点定理及其应用的研究, E-mail: daojunwen@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11471059)、重庆市自然科学基金(批准号: cstc2020jcyj-msxmX0316)和重庆工商大学研究生科研创新项目(批准号: yjsc-xx2025-269-245).

网络首发地址: <https://link.cnki.net/urlid/22.1340.o.20260401.1746.001>.

问题的统一框架(模型), 广泛应用于信号处理、图像重建、计算机断层扫描中的传感器网络和强度调制放射治疗等领域^[1-4].

近年来, 关于变分包含问题的研究主要集中在解的存在性和数值逼近解, 不动点方法和预解算子技巧是求解变分包含问题的重要方法. Combettes 等^[5]给出了一种向前-向后分裂算法:

$$x_{n+1} = J_{\gamma_n}^A(x_n - \gamma_n Bx_n), \tag{2}$$

其中 $J_{\gamma_n}^A = (I + \gamma_n A)^{-1}$, I 表示单位算子. 文献[6]在算子 B 具有强制性且 $\gamma_n \in [a, b] \subset (0, 2c)$ 的条件下证明了由式(2)定义的迭代序列 $\{x_n\}$ 弱收敛到变分包含问题(1)的解(c 为强制性常数).

但算子 B 的强制性比 Lipschitz 连续条件更严格, 导致算法(2)的应用受限, 且不能推广到更一般的变分包含问题中. 基于此, Tseng^[6]利用外推技巧建立了向前-向后-向前(forward-backward-forward)方法:

$$\begin{cases} y_n = J_{\gamma_n}^A(x_n - \gamma_n Bx_n), \\ x_{n+1} = y_n + \gamma_n(Bx_n - By_n), \end{cases} \tag{3}$$

并在算子 B 具有 L -Lipschitz 连续性且 $\gamma_n \in [a, b] \subset (0, 1/L)$ 的条件下, 证明了 $\{x_n\}$ 弱收敛到变分包含问题(1)的解. 同时, Tseng^[6]介绍了线性搜索选取 $\gamma_n = \max\{\gamma_i\}$, 其中 $\gamma_i \in \{\sigma, \sigma l, \sigma l^2, \dots\}$, $l \in (0, 1)$.

另一方面, 在无限维空间中序列的弱收敛和强收敛不同, 并且在大多数情况下强收敛比弱收敛更有理论意义. 因此, 研究者们开始关注变分包含问题的强收敛解, 尝试构造新的数值方法并在其收敛性分析中逐步减弱算子 B 的条件^[7-10]. Van Hieu 等^[10]通过引入单调算子 F 进一步建立了如下正则化迭代方法:

$$\begin{cases} y_n = J_{\gamma_n}^A[x_n - \gamma_n(Bx_n + \alpha_n Fx_n)], \\ x_{n+1} = y_n + \gamma_n(Bx_n - By_n), \\ \gamma_{n+1} = \min\left\{\gamma_n, \frac{\delta \|x_n - y_n\|}{\|Bx_n - By_n\|}\right\}, \end{cases} \tag{4}$$

并通过调整步长 γ_n 的选取方式, 降低了文献[6]中线性搜索过程的计算复杂度, 在一定条件下建立了关于求解变分包含问题(1)的强收敛性定理.

在上述研究工作的基础上, 本文利用自适应技巧改进正则化方法(4), 解决在算子 B 未知或者 Lipschitz 常数很难估计情形下逼近单调变分包含问题的数值解. 定义迭代序列 $\{x_n\}$:

$$\begin{cases} y_n = J_{\gamma_n}^A(x_n - \gamma_n Bx_n - \gamma_n \alpha_n Fx_n), \\ x_{n+1} = x_n - \sigma_n \rho[x_n - y_n - \gamma_n(Bx_n - By_n)], \\ \sigma_n = \min\left\{\sigma_{n-1}, \frac{\langle x_n - y_n, d(x_n, \gamma_n) \rangle}{\|d(x_n, \gamma_n)\|^2}\right\}, \quad \gamma_{n+1} = \min\left\{\gamma_n, \frac{\delta \|x_n - y_n\|}{\|Bx_n - By_n\|}\right\}, \end{cases} \tag{5}$$

其中 $d(x_n, \gamma_n) = x_n - y_n - \gamma_n(Bx_n - By_n)$, 且 $\{\alpha_n\}$ 为非负实数序列. 本文的目标是在 Hilbert 空间中建立关于单调变分包含问题(1)数值解的强收敛定理, 并通过数值实验说明新建立的自适应-正则化方法(5)具有收敛速度更快、在图像重建应用中效果更好的优势.

1 预备知识

设 $B: H \rightarrow H$ 为一非线性映象, 对任意的 $x, y \in H$, 如果存在常数 $\mu > 0$ 满足 $\|Fx - Fy\| \leq \mu \|x - y\|$, 则称 B 是 μ -Lipschitz 映象. 特别地, 1-Lipschitz 是非扩张映象. 如果有 $\langle Bx - By, x - y \rangle \geq 0$, 则称 B 是单调映象; 如果存在常数 $\gamma > 0$ 满足 $\langle Bx - By, x - y \rangle \geq \gamma \|x - y\|^2$, 则称 B 是 γ -强单调映象; 如果存在常数 $\theta > 0$ 满足 $\langle Bx - By, x - y \rangle \geq \theta \|Bx - By\|^2$, 则称 B 是 θ -逆强单调映象(θ -ism). 特别地, 1-ism 也称为严格非扩张映象. 显然, 如果 B 是 θ -ism, 则 B 一定是 $\frac{1}{\theta}$ -Lipschitz 映象.

设 $A: H \rightarrow 2^H$ 是一集值映象, 用 $G(A) := \{(x, u): x \in H, u \in Ax\}$ 表示 A 的图. 如果 A 单调且 $G(A)$ 不真包含于其他任何单调映象的图, 则 A 称为极大单调映象. 对任意的 $\lambda > 0$, 预解算子 $J_\lambda^A = (I + \lambda A)^{-1}$ 是单值、非扩张且严格非扩张映象^[5-6].

设 $A: H \rightarrow 2^H$ 是极大单调映象, $B: H \rightarrow H$ 是 θ -逆强单调映象, $F: H \rightarrow H$ 是 γ -强单调且 μ -Lipschitz 连续映象. 引入变分包含的正则化辅助问题: 求 $x \in H$ 满足

$$0 \in Ax + Bx + \alpha Fx, \tag{6}$$

其中正则化参数 $\alpha > 0$, 并用 x_α 表示变分包含辅助问题(6)的解.

引理 1 ^[5-6] 变分包含问题(1)等价于不动点问题 $x = J_\lambda^A(I - \lambda B)x$, 其中 I 为单位算子, $\lambda > 0$.

引理 2 ^[11] 设 $A: H \rightarrow 2^H$ 是极大单调映象, $B: H \rightarrow H$ 是单调且 Lipschitz-连续, 则 $A+B$ 是极大单调映象.

引理 3 ^[10] 设 $F: H \rightarrow H$ 是 γ -强单调映象, x_α 是变分包含辅助问题(6)的解, 则 $\{x_\alpha\}_{\alpha>0}$ 有界, 且 $\langle Fx^*, x^* - x_\alpha \rangle \geq \gamma \|x^* - x_\alpha\|^2, \quad \forall x^* \in \Omega.$

引理 4 ^[10] 设 $F: H \rightarrow H$ 是 γ -强单调映象, x_α, x_β 是变分包含辅助问题(6)的解, 则

$$\|x_\alpha - x_\beta\| \leq \frac{|\alpha - \beta|}{\alpha} \frac{\|Fx_\beta\|}{\gamma}.$$

引理 5 ^[12] 设 $\{\Phi_n\}$ 为非负实数序列, 且满足不等式 $\Phi_{n+1} \leq (1 - a_n)\Phi_n + b_n (n \geq 1)$, 如果序列 $\{a_n\} \subset (0, 1)$ 和 $\{b_n\}$ 满足下列条件:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \sum_{n=1}^\infty a_n = \infty;$

(ii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} \leq 0$ 或 $\sum_{n=1}^\infty |b_n| < \infty.$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = 0.$

引理 6 ^[13] 设 C 为 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集, $F: H \rightarrow H$ 是单调半连续映象. 如果 $\bar{u} \in C$ 是变分不等式的解, 则 $\langle F\bar{u}, u - \bar{u} \rangle \geq 0$ 等价于 $\langle Fu, u - \bar{u} \rangle \geq 0, \forall u \in C.$

2 主要结果

定理 1 设 $A: H \rightarrow 2^H$ 是极大单调映象, $B: H \rightarrow H$ 是 θ -ism, $F: H \rightarrow H$ 是 γ -强单调且 μ -Lipschitz 连续映象. 如果非负实数序列 $\{\alpha_n\}$ 满足如下条件:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \sum_{n=0}^\infty \alpha_n = \infty;$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_n^2} = 0.$

则对给定的 $\rho \in (0, 2), \delta \in (0, 1), \gamma_0 \in (0, \theta), \sigma_0 > 0$, 由式(5)定义的迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 $x^* \in \Omega$, 且

$$\langle Fx^*, u - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall u \in \Omega. \tag{7}$$

证明: 首先, 证明序列 $\{\gamma_n\}$ 和 $\{\sigma_n\}$ 有界. 由式(5)可知 $\gamma_{n+1} \leq \gamma_n (\forall n \geq 0)$. 当 $n = 0$ 时, 显然 $\gamma_0 \geq \min\{\gamma_0, \theta\delta\}$. 假设 $\gamma_n \geq \min\{\gamma_0, \theta\delta\} (\forall n > 0)$, 则当 $\gamma_{n+1} = \gamma_n$ 时, 有 $\gamma_{n+1} \geq \min\{\gamma_0, \theta\delta\}$; 否则,

$$\gamma_{n+1} = \frac{\delta \|x_n - y_n\|}{\|Bx_n - By_n\|} \geq \frac{\delta \|x_n - y_n\|}{\theta^{-1} \|x_n - y_n\|} = \theta\delta \geq \min\{\gamma_0, \theta\delta\}.$$

由数学归纳法得 $\gamma_n \geq \min\{\gamma_0, \theta\delta\} (\forall n \geq 0)$. 因此, $\min\{\gamma_0, \theta\delta\} \leq \gamma_{n+1} \leq \gamma_n \leq \gamma_0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = r \geq \min\{\gamma_0, \theta\delta\}$. 因为 $B: H \rightarrow H$ 是 θ -ism, 所以是 $\frac{1}{\theta}$ -Lipschitzian 映象. 由式(5)可得

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \langle x_n - y_n, d(x_n, \gamma_n) \rangle = \langle x_n - y_n, x_n - y_n - \gamma_n(Bx_n - By_n) \rangle = \\ &\quad \|x_n - y_n\|^2 - \gamma_n \langle x_n - y_n, Bx_n - By_n \rangle \geq \\ &\quad \|x_n - y_n\|^2 - \gamma_n \|x_n - y_n\| \|Bx_n - By_n\| \geq \|x_n - y_n\|^2 - \frac{\gamma_n}{\theta} \|x_n - y_n\|^2, \end{aligned}$$

整理可得

$$\langle x_n - y_n, d(x_n, \gamma_n) \rangle \geq \left(1 - \frac{\gamma_n}{\theta}\right) \|x_n - y_n\|^2, \tag{8}$$

其中 $1 - \frac{\gamma_n}{\theta} > 0 (\gamma_n \leq \gamma_0 \in (0, \theta))$. 又因为

$$\begin{aligned} \|d(x_n, \gamma_n)\|^2 &= \|x_n - y_n\|^2 + \gamma_n^2 \|Bx_n - By_n\|^2 - 2\gamma_n \langle x_n - y_n, Bx_n - By_n \rangle \leq \\ &\|x_n - y_n\|^2 + \frac{\gamma_n^2}{\theta^2} \|x_n - y_n\|^2 + 2 \frac{\gamma_n}{\theta} \|x_n - y_n\|^2 = \left(1 + \frac{\gamma_n}{\theta}\right)^2 \|x_n - y_n\|^2, \end{aligned} \quad (9)$$

故由式(8)和式(9)可得

$$\left(1 - \frac{\gamma_n}{\theta}\right) \|x_n - y_n\| \leq \|d(x_n, \gamma_n)\| \leq \left(1 + \frac{\gamma_n}{\theta}\right) \|x_n - y_n\|. \quad (10)$$

如果 $y_n \neq x_n$, 则结合式(8)和式(11)进一步可得

$$\frac{\langle x_n - y_n, d(x_n, \gamma_n) \rangle}{\|d(x_n, \gamma_n)\|^2} \geq \frac{1 - \gamma_n/\theta}{(1 + \gamma_n/\theta)^2} \geq M_1, \quad (11)$$

其中 $M_1 = \frac{1 - \gamma_0/\theta}{(1 + \gamma_0/\theta)^2} > 0$. 另一方面, 如果 $y_n = x_n$, 则 $\sigma_n = \sigma_{n-1}$. 进一步可得

$$\sigma_n = \min\left\{\sigma_{n-1}, \frac{\langle x_n - y_n, d(x_n, \gamma_n) \rangle}{\|d(x_n, \gamma_n)\|^2}\right\} \geq \min\{\sigma_{n-1}, M_1\} \geq \cdots \geq \min\{\sigma_0, M_1\}.$$

由式(5)得 $\sigma_n \leq \sigma_{n-1} (\forall n \geq 1)$, 故 $\sigma_n \leq \sigma_{n-1} \leq \cdots \leq \sigma_0$, 进一步可得 $\min\{\sigma_0, M_1\} \leq \sigma_n \leq \sigma_0$, 即 $\{\sigma_n\}$ 有界.

其次, 证明不等式

$$\|x_{n+1} - x_{a_n}\|^2 \leq [1 - \rho(2\gamma - \mu\epsilon)\alpha_n\gamma_n\sigma_n] \|x_n - x_{a_n}\|^2 - \left[\rho(2 - \rho)\sigma_n^2 - \frac{\mu\rho\alpha_n\gamma_n\sigma_n}{\epsilon M_2}\right] \|d(x_n, \gamma_n)\|^2,$$

其中 $\epsilon > 0$, $M_2 = \left(1 - \frac{\gamma_0}{\theta}\right)^2 > 0$. 由式(5)可得

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{a_n}\|^2 &= \|x_n - x_{a_n} - \rho\sigma_n d(x_n, \gamma_n)\|^2 = \\ &\|x_n - x_{a_n}\|^2 - 2\rho\sigma_n \langle x_n - x_{a_n}, d(x_n, \gamma_n) \rangle + \rho^2 \sigma_n^2 \|d(x_n, \gamma_n)\|^2 \leq \\ &\|x_n - x_{a_n}\|^2 - 2\rho\sigma_n \langle x_n - y_n, d(x_n, \gamma_n) \rangle - \\ &2\rho\sigma_n \langle y_n - x_{a_n}, d(x_n, \gamma_n) \rangle + \rho^2 \sigma_n^2 \|d(x_n, \gamma_n)\|^2 \leq \\ &\|x_n - x_{a_n}\|^2 - \rho(2 - \rho)\sigma_n^2 \|d(x_n, \gamma_n)\|^2 - 2\rho\sigma_n \langle y_n - x_{a_n}, d(x_n, \gamma_n) \rangle, \end{aligned} \quad (12)$$

再利用式(5)中 y_n 的定义, 有

$$x_n - y_n - \gamma_n Bx_n - \gamma_n \alpha_n Fx_n \in \gamma_n Ay_n,$$

整理得

$$x_n - y_n - \gamma_n (Bx_n - By_n) - \gamma_n \alpha_n Fx_n \in \gamma_n Ay_n + \gamma_n By_n. \quad (13)$$

结合式(13)和 $d(x_n, \gamma_n)$ 的定义得

$$\frac{d(x_n, \gamma_n)}{\gamma_n} - \alpha_n Fx_n \in Ay_n + By_n. \quad (14)$$

设 x_{a_n} 为变分包含辅助问题(6)的解, 即

$$-\alpha_n Fx_{a_n} \in Ax_{a_n} + Bx_{a_n}. \quad (15)$$

由式(14), (15)和引理 2, 有

$$\left\langle \frac{d(x_n, \gamma_n)}{\gamma_n} - \alpha_n Fx_n + \alpha_n Fx_{a_n}, y_n - x_{a_n} \right\rangle \geq 0,$$

进一步可得

$$\langle d(x_n, \gamma_n), y_n - x_{a_n} \rangle \geq \alpha_n \gamma_n \langle Fx_n - Fx_{a_n}, y_n - x_{a_n} \rangle. \quad (16)$$

另一方面, 由式(10)和 F 的 γ -强单调性可得

$$\begin{aligned} \langle Fx_n - Fx_{a_n}, y_n - x_{a_n} \rangle &= \langle Fx_n - Fx_{a_n}, y_n - x_n \rangle + \langle Fx_n - Fx_{a_n}, x_n - x_{a_n} \rangle \geq \\ &-\|Fx_n - Fx_{a_n}\| \|y_n - x_n\| + \gamma \|x_n - x_{a_n}\|^2 \geq \\ &-\mu \|x_n - x_{a_n}\| \|y_n - x_n\| + \gamma \|x_n - x_{a_n}\|^2 \geq \end{aligned}$$

$$-\frac{\mu\epsilon}{2}\|x_n - x_{a_n}\|^2 - \frac{\mu}{2\epsilon}\|y_n - x_n\|^2 + \gamma\|x_n - x_{a_n}\|^2 \geqslant \\ \frac{2\gamma - \mu\epsilon}{2}\|x_n - x_{a_n}\|^2 - \frac{\mu}{2\epsilon(1 - \gamma_n/\theta)^2}\|d(x_n, \gamma_n)\|^2,$$

其中 $\epsilon > 0$. 结合式(12), (16)可得

$$\|x_{n+1} - x_{a_n}\|^2 \leqslant \|x_n - x_{a_n}\|^2 - \rho(2 - \rho)\sigma_n^2\|d(x_n, \gamma_n)\|^2 - 2\rho\alpha_n\gamma_n\sigma_n\langle Fx_n - Fx_{a_n}, y_n - x_{a_n} \rangle \leqslant \\ [1 - \rho(2\gamma - \mu\epsilon)\alpha_n\gamma_n\sigma_n]\|x_n - x_{a_n}\|^2 - \\ \left[\rho(2 - \rho)\sigma_n^2 - \frac{\mu\rho\alpha_n\gamma_n\sigma_n}{\epsilon M_2} \right]\|d(x_n, \gamma_n)\|^2. \quad (17)$$

下面证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_{a_n}\| = 0$. 由于 $\rho \in (0, 2)$, 结合式(17)和条件 1)可知, 存在 $N > 0$, 且

$$\|x_{n+1} - x_{a_n}\|^2 \leqslant [1 - \rho(2\gamma - \mu\epsilon)\alpha_n\gamma_n\sigma_n]\|x_n - x_{a_n}\|^2, \quad n > N,$$

即

$$\|x_{n+1} - x_{a_n}\| \leqslant \left[1 - \frac{\rho(2\gamma - \mu\epsilon)\alpha_n\gamma_n\sigma_n}{2} \right]\|x_n - x_{a_n}\|, \quad n > N. \quad (18)$$

假设 x_{a_n} 和 $x_{a_{n+1}}$ 为变分包含辅助问题(6)的解, 则由引理 4 可得

$$\|x_{a_n} - x_{a_{n+1}}\| \leqslant \frac{|\alpha_n - \alpha_{n+1}|}{\alpha_n} \frac{\|Fx_{a_{n+1}}\|}{\gamma} \leqslant \frac{|\alpha_n - \alpha_{n+1}|}{\alpha_n} M_3, \quad (19)$$

其中 $M_3 = \sup \left\{ \frac{1}{\gamma} \|Fx_{a_{n+1}}\| \right\}$. 由式(18), (19)可得

$$\|x_{n+1} - x_{a_{n+1}}\| \leqslant \|x_{n+1} - x_{a_n}\| + \|x_{a_n} - x_{a_{n+1}}\| \leqslant \\ \left[1 - \frac{\rho(2\gamma - \mu\epsilon)\alpha_n\gamma_n\sigma_n}{2} \right]\|x_n - x_{a_n}\| + \frac{|\alpha_n - \alpha_{n+1}|}{\alpha_n} M_3. \quad (20)$$

记 $a_n = \frac{\rho(2\gamma - \mu\epsilon)\alpha_n\gamma_n\sigma_n}{2}$, $b_n = \frac{|\alpha_n - \alpha_{n+1}|}{\alpha_n} M_3$, 再结合条件 2)可得

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{2}{\rho(2\gamma - \mu\epsilon)\gamma_n\sigma_n} \frac{|\alpha_n - \alpha_{n+1}|}{\alpha_n^2} M_3 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

因此, 利用式(20)和引理 5 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_{a_n}\| = 0$, 即 $\{x_n\}$ 强收敛到 x_{a_n} .

最后, 证明迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 $x^\dagger \in \Omega$, 且 $x^\dagger$ 是变分不等式(7)的唯一解. 用 $\omega_w(x_a)$ 表示序列 $\{x_a\}$ 的弱聚点集, 取 $x' \in \omega_w(x_a)$, 故存在一个子列 $\{x_{a_n}\} \subset \{x_a\}$ 满足 $x_{a_n} \rightharpoonup x' (n \rightarrow \infty, \alpha_n \rightarrow 0^+)$. 假设 $(x, y) \in G(A+B)$, 即 $y \in Ax + Bx$, 并且 $-aFx_a \in Ax_a + Bx_a$. 利用 $A+B$ 的单调性得

$$\langle y, x - x_a \rangle \geqslant \alpha \langle Fx_a, x_a - x \rangle. \quad (21)$$

在式(21)中取 $\alpha = \alpha_n$, 由引理 3 可知 $\{x_{a_n}\}$ 有界且 F 是 μ -Lipschitz 连续映象, 故 $\{\langle Fx_{a_n}, x_{a_n} - x \rangle\}$ 有界. 当 $n \rightarrow \infty$ 且 $\alpha_n \rightarrow 0^+$ 时, 取极限得

$$\langle y, x - x' \rangle \geqslant 0, \quad \forall (x, y) \in G(A+B).$$

又因为 $A+B$ 是极大单调映象, 所以有 $0 \in (A+B)x'$, 即 $x' \in \Omega$. 另一方面, 再利用引理 3 可得

$$\langle Fx^*, x^* - x_a \rangle \geqslant \gamma \|x^* - x_a\|^2, \quad \forall x^* \in \Omega. \quad (22)$$

不妨在式(22)中取 $\alpha = \alpha_n$, 则结合 $x_{a_n} \rightharpoonup x' (\alpha_n \rightarrow 0^+)$ 可得 $\langle Fx^*, x^* - x' \rangle \geqslant 0, \forall x^* \in \Omega$. 利用引理 6 知 x' 是变分不等式(7)的解, 结合 F 的强单调性可知 x' 是唯一解, 即 $x' = x^\dagger$. 在式(22)中用 $x^\dagger$ 代替 x^* , 进一步可得

$$\|x^\dagger - x_{a_n}\|^2 \leqslant \frac{1}{\gamma} \langle Fx^\dagger, x^\dagger - x_{a_n} \rangle. \quad (23)$$

取极限得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{a_n} - x^\dagger\| = 0 (\alpha_n \rightarrow 0^+)$. 因此, 结合式(20)可知式(5)定义的序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 $x^\dagger \in \Omega$, 且 $x^\dagger$ 为变分不等式(7)的唯一解.

注 1 在定理 1 中, 如果出现 $y_n = x_n$ 的情形, 则式(11)不成立. 因此, 需要补充算法(5)的迭代停止规则: 如果迭代过程中出现 $y_n = x_n (n \geqslant 1)$, 则终止迭代计算.

定理 2 设 $A: H \rightarrow 2^H$ 是极大单调映象, $B: H \rightarrow H$ 是 θ -ism, $F: H \rightarrow H$ 是 γ -强单调且 μ -Lipschitz 连续映象. 设非负实数序列 $\{\alpha_n\}$ 满足定理 1 中条件 1) 和 2), 且 $\rho \in (0, 2)$, $\delta \in (0, 1)$, $\gamma_0 \in (0, \theta)$, $\sigma_0 > 0$. 如果存在 $n = N \geq 1$, 使得由式(5)定义的迭代序列 $y_N = x_N$, 则 $x_N = x^* \in \Omega$, 且 x_N 为变分不等式(7)的唯一解.

证明: 若 $y_N = x_N$, 则 $d(x_n, \gamma_n) = 0$ 且 $x_{n+1} = x_n$, $n \geq N$. 由式(5)可知 $\sigma_n = \sigma_{n-1}$, 且 $\{\sigma_n\}$ 有界. 因为

$$y_n = x_n = J_{\gamma_n}^A(x_n - \gamma_n Bx_n - \gamma_n \alpha_n Fx_n) \tag{24}$$

等价于 $0 \in Ax_n + Bx_n + \alpha_n Fx_n$, 即 x_n 是变分包含辅助问题(6)的解($\alpha = \alpha_n$). 因此, $x_{n+1} = x_n = x_{a_n}$, 且

$$x_N = x_{a_N} = x_{N+1} = x_{a_{N+1}} = x_{a_{N+2}} = \cdots.$$

此外, 由定理 1 类似可得极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_{a_n}\| = 0$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{a_n} - x^*\| = 0 (\alpha_n \rightarrow 0^+)$.

3 数值实验

为便于比较, 本文考虑文献[8, 14]中数值实验相同的线性方程组:

$$b = Ax + \xi, \tag{25}$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 为模糊矩阵, $x \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ 是初始值, $\xi \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ 是噪声项, $b \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ 是输出项. 易验证线性方程组(25)可转化为如下凸优化问题:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \left\{ \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \tau \|x\|_1 \right\},$$

其中 $\tau > 0$. 令 $A = \partial(\tau \|x\|_1)$, $B = A^T(Ax - b)$, 则凸优化问题即为本文讨论的变分包含问题(1). 因此, 可用求解变分包含问题的各种算法进行图像重建.

为说明图像重建的效果, 采用文献[8]中的峰值信噪比(PSNR)和结构相似性(SSIM)作为图像重建的质量指标. 在求解变分包含问题的算法(2)~(5)中相关参数取值如下: 算法(2)中 $\gamma_n = \frac{1}{2}$; 算法(3)中: $\delta = 0.5$, $l = 0.8$, $\gamma_n = \frac{1}{2}$; 算法(4)中: $\delta = 0.5$, $\gamma_0 = 1$, $\alpha_n = \frac{10}{\sqrt{n+1}}$; 算法(5)中: $\delta = 0.5$, $\rho = 1.5$, $\sigma_0 = 1$, $\gamma_0 = 1$, $\alpha_n = \frac{10}{\sqrt{n+1}}$.

数值实验使用的金丝猴图像(原图)来自 AI 图片创作, 实验设置最大迭代次数 $N = 2\ 000$, 对金丝猴图像重建的效果比较和质量指标分别如图 1 和图 2 所示.

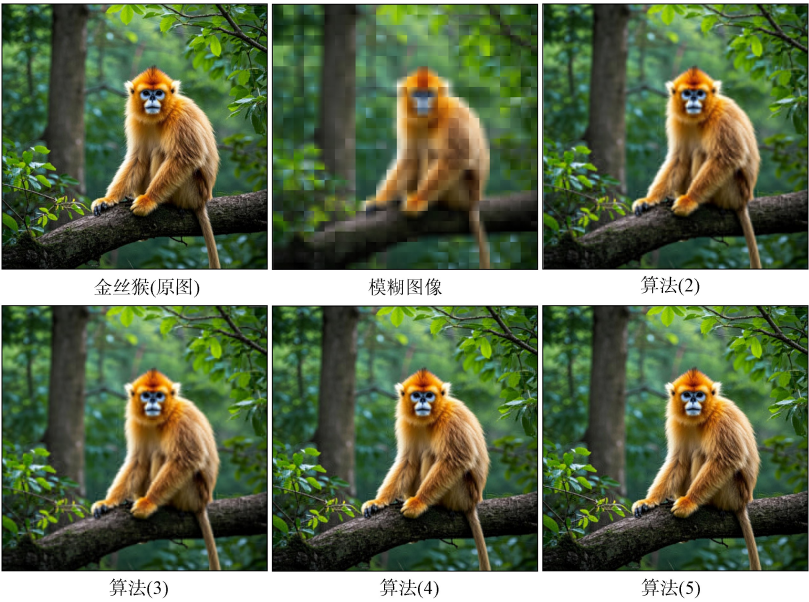


图 1 基于算法(2)~(5)的图像重建效果比较

Fig. 1 Comparison of image reconstruction effects based on algorithms (2)~(5)

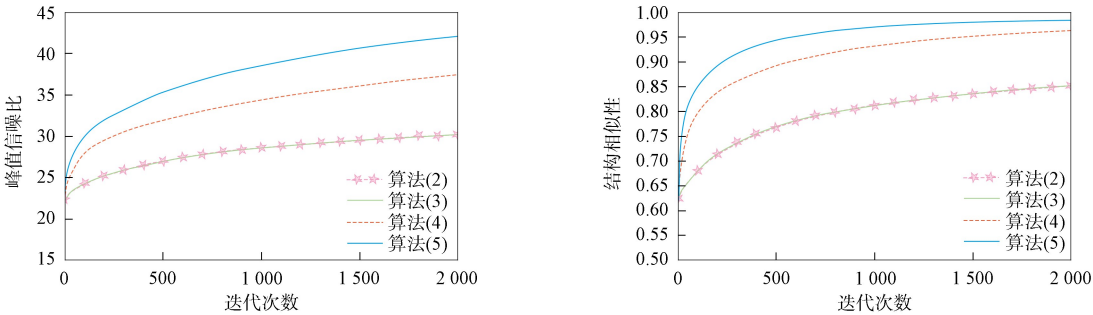


图 2 不同算法对金丝猴图像重建的迭代次数及质量指标(PSNR,SSIM)对比结果

Fig. 2 Comparison results of iterations and quality indicators (PSNR,SSIM) of image reconstruction for golden monkey by different algorithms

由图 1 和图 2 可见: 求解变分包含问题的算法(2)和(3)适用条件不同, 在图像重建应用效果方面几乎无差别; 本文提出的自适应-正则化方法(5)不仅在理论上获得了单调变分包含问题的强收敛解, 而且在迭代次数、收敛速度、计算精度以及图像重建的应用中均具有明显优势.

参 考 文 献

[1] BYRNE C. A Unified Treatment of Some Iterative Algorithms in Signal Processing and Image Reconstruction [J]. Inverse Problems, 2004, 20(1): 103-120.

[2] CENSOR Y, ELFVING T, KOPF N, et al. The Multiple-Sets Split Feasibility Problem and Its Applications for Inverse Problems [J]. Inverse Problems, 2005, 21(6): 2071-2084.

[3] CENSOR Y, BORTFELD T, MARTIN B, et al. A Unified Approach for Inversion Problems in Intensity-Modulated Radiation Therapy [J]. Phys Med Biol, 2006, 51(10): 2353-2365.

[4] 闻道君, 张蓉, 何光. 单调变分不等式问题外梯度方法的推广 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2020, 58(4): 847-852. (WEN D J, ZHANG R, HE G. Extension of Extragradient Method for Monotone Variational Inequality Problems [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2020, 58(4): 847-852.)

[5] COMBETTES P L, WAJS V R. Singnal Recovery by Proximal Forward-Backward Splitting [J]. Multiscale Model Simul, 2005, 4(4): 1168-1200.

[6] TSENG P. A Modified Forward-Backward Splitting Method for Maximal Monotone Mappings [J]. SIAM J Control Optim, 2000, 38(2): 431-446.

[7] WEN D J. Modified Krasnoselski-Mann Type Iterative Algorithm with Strong Convergence for Hierarchical Fixed Point Problem and Split Monotone Variational Inclusions [J]. J Comput Appl Math, 2021, 393: 113501-1-113501-13.

[8] SUANTAI S, INKRONG P, CHOLAMJIAK P. Forward-Backward-Forward Algorithms Involving Two Inertial Terms for Monotone Inclusions [J]. Comput Appl Math, 2023, 42(6): 255-1-255-17.

[9] DEY S, IZUCHUKWU C, TAIWO A, et al. New Iterative Algorithms for Solving Split Variational Inclusions [J]. J Glob Optim, 2025, 91(3): 587-609.

[10] VAN HIEU D, ANH P K, MUU L D, et al. Iterative Regularization Methods with New Stepsize Rules for Solving Variational Inclusions [J]. J Appl Math Comput, 2022, 68(1): 571-599.

[11] BRÉZIS H. Opérateurs Maximaux Monotoneset Semi-groupes Contractions Dans Les Espaces de Hilbert [M]. North-Holland Math Stud, No. 5. Amsterdam: North-Holland Publishing Co. , 1973: 1-183.

[12] XU H K. Iterative Algorithms for Nonlinear Operators [J]. J London Math Soc, 2002, 66(1): 240-256.

[13] COTTLE R W, YAO J C. Pseudo-monotone Complementarity Problems in Hilbert Space [J]. J Optim Theory Appl, 1992, 75(2): 281-295.

[14] ANH P K, THONG D V, DUNG V T. A Strongly Convergent Mann-Type Inertial Algorithm for Solving Split Variational Inclusion Problems [J]. Optim Eng, 2021, 22(1): 159-185.