doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024086

具有射影向量场的近 Ricci-Bourguignon 孤立子

张晓丽, 刘建成
(西北师范大学 数学与统计学院, 兰州 730070)

摘要: 用几何分析的方法, 研究具有射影向量场的近 Ricci-Bourguignon 孤立子. 首先, 证明势向量场是射影向量场的近 Ricci-Bourguignon 孤立子的 Cotton 张量场为零, Bach 张量场散度自由, Ricci 张量场是共形 Killing 张量场; 其次, 证明势向量场为射影向量场的 K-切触近 Ricci-Bourguignon 孤立子是 Einstein 流形.

关键词: 近 Ricci-Bourguignon 孤立子; 射影向量场; 共形 Killing; K-切触
中图分类号: O186.12 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2024)06-1359-04

Ricci-Bourguignon Almost Solitons with Projective Vector Field

ZHANG Xiaoli, LIU Jiancheng
(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: By using the method of geometric analysis, we study Ricci-Bourguignon almost solitons with projective vector field. Firstly, if the potential vector field is projective one, we prove that the Ricci-Bourguignon almost solitons have vanishing Cotton tensor field, divergence-free Bach tensor field and Ricci tensor field is conformal Killing tensor field. Secondly, we prove the K-contact Ricci-Bourguignon almost soliton whose potential vector field is a projective vector field is an Einstein mainfold.

Keywords: Ricci-Bourguignon almost soliton; projective vector field; conformal Killing; K-contact

1 引言及主要结果

设$(M^n,\boldsymbol{g})$是 n 维 Riemann 流形, $n\geqslant 3$. 若 M^n 上存在光滑向量场 $\boldsymbol{V}$, 光滑函数 λ 和常数 ρ, 使得

$$\mathbf{Ric}+\frac{1}{2}\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{g}-\rho R\boldsymbol{g}=\lambda\boldsymbol{g}, \tag{1}$$

则$(M^n,\boldsymbol{g})$称为近 Ricci-Bourguignon 孤立子(简称近 RB 孤立子), 记为$(M,\boldsymbol{g},V,\lambda,\rho)$[1], 其中 $\mathbf{Ric}$, R 分别表示 M^n 的 Ricci 曲率张量场和数量曲率, $\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{g}$ 表示度量 $\boldsymbol{g}$ 沿 $\boldsymbol{V}$ 方向的 Lie 导数. 特别地, 当 $\rho=0$ 时, 方程(1)即为近 Ricci 孤立子方程.

若在$(M^n,\boldsymbol{g})$上存在光滑函数 σ, 使得 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{g}=2\sigma\boldsymbol{g}$ 成立, 则称 $\boldsymbol{V}$ 是共形向量场. 特别地, 当 $\sigma=0$ 时, 称 $\boldsymbol{V}$ 是 Killing 向量场. 在$(M^n,\boldsymbol{g})$上定义一个(1,2)-型张量场 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\nabla:\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M)$, 使得

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\nabla(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})=\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}(\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Z})-\nabla_{\boldsymbol{Y}}(\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{Z})-\nabla_{[\boldsymbol{V},\boldsymbol{Y}]}\boldsymbol{Z},$$

其中 $\mathscr{X}(M)$表示流形 M 上的全体光滑向量场, $\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\in\mathscr{X}(M)$. 若存在 1-形式 $\boldsymbol{P}$, 使得向量场 $\boldsymbol{V}$ 满足

收稿日期: 2024-03-04.

第一作者简介: 张晓丽(2000—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事微分几何的研究, E-mail: 812305238@qq.com. **通信作者简介:** 刘建成(1968—), 男, 汉族, 博士, 教授, 从事微分几何与几何分析的研究, E-mail: liujc@nwnu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12161078).

$$(\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\nabla)(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{X}, \tag{2}$$

则势向量场 $\boldsymbol{V}$ 称为射影向量场[2]. 特别地，若 $\boldsymbol{P}=0$，则称 $\boldsymbol{V}$ 是仿射 Killing 的. 射影向量场是 Killing 向量场和仿射 Killing 向量场的推广.

文献[1]首次提出了近 RB 孤立子的概念，证明了：如果近 RB 孤立子的势向量场 $\boldsymbol{V}$ 是一个非平凡的共形向量场，则 R 和 $\lambda-\sigma$ 是常数；对于紧致的近 RB 孤立子，如果势向量场 $\boldsymbol{V}$ 是一个非平凡的共形向量场，则孤立子等距于欧氏球面. 自 Sharma[3]研究了切触流形上的 Ricci 孤立子以来，关于切触流形的研究目前也取得了一些成果[4-5]. 受上述工作的启发，本文将文献[6]中近 Ricci 孤立子情形下的定理 1 和定理 4 推广到近 RB 孤立子的情形，得到如下结果.

定理 1 设 $(M^n,\boldsymbol{g},\boldsymbol{V},\lambda,\rho)$ 是近 RB 孤立子，如果势向量场 $\boldsymbol{V}$ 是射影向量场，则：

1) M^n 的 Cotton 张量场为零；

2) M^n 的 Bach 张量场散度自由；

3) M^n 的 Ricci 张量场 **Ric** 是共形 Killing 张量场，$\mathbf{Ric}-\dfrac{2R}{n+2}\boldsymbol{g}$ 是 Killing 张量场.

定理 2 设 $(M^{2m+1},\boldsymbol{g},\boldsymbol{V},\lambda,\rho)$ 是 K-切触近 RB 孤立子，如果势向量场 $\boldsymbol{V}$ 是射影向量场，则 $(M^{2m+1},\boldsymbol{g})$ 是 Einstein 流形.

2 预备知识

如果在 Riemann 流形 $(M^n,\boldsymbol{g})$ 上存在 1-形式 $\boldsymbol{k}$，使得二阶对称张量 $\boldsymbol{T}$ 满足

$$(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})+(\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X})+(\nabla_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{k}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})+\boldsymbol{k}(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X})+\boldsymbol{k}(\boldsymbol{Z})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}), \tag{3}$$

则 $\boldsymbol{T}$ 称为二阶共形 Killing 张量场[7]. 当 $\boldsymbol{k}=0$ 时，称 $\boldsymbol{T}$ 是一个 Killing 张量场.

在 $(M^n,\boldsymbol{g})$ 上选取局部标准正交标架场 $\{\boldsymbol{e}_i\}$，用 R_{ijkl}，R_{ij}，R 分别表示 M^n 的 Riemann 曲率张量的分量、Ricci 曲率张量的分量和数量曲率，则 Weyl 张量场 $\boldsymbol{W}$[8]可局部地表示为

$$W_{ijkl}=R_{ijkl}-\frac{1}{n-2}(R_{jk}g_{il}-R_{ik}g_{jl}+g_{jk}R_{il}-g_{ik}R_{jl})+\frac{1}{(n-1)(n-2)}(g_{jk}g_{il}-g_{ik}g_{jl}).$$

二阶无迹对称 Bach 张量场 $\boldsymbol{B}$[9]可局部地表示为

$$B_{ij}=\frac{1}{n-1}\nabla_k\nabla_l W_{iklj}+\frac{1}{n-2}R_{kl}W_{iklj}.$$

类似地，由文献[10]可知，Riemann 流形上的 Cotton 张量场 $\boldsymbol{C}$ 可局部地表示为

$$C_{ijk}=\nabla_i R_{jk}-\nabla_j R_{ik}-\frac{1}{2(n-1)}(g_{jk}\nabla_i R-g_{ik}\nabla_j R).$$

文献[11]证明了 Cotton 张量场 $\boldsymbol{C}$ 与 Weyl 张量场 $\boldsymbol{W}$ 和 Bach 张量场 $\boldsymbol{B}$ 的如下关系：

$$C_{ijk}=-\frac{n-2}{n-3}\sum_l\nabla_l W_{ijkl},\qquad \sum_j\nabla_j B_{ij}=\frac{n-4}{(n-2)^2}\sum_{j,k}C_{ijk}R_{jk}. \tag{4}$$

设 M^n 是一个 $n=2m+1$ 维的光滑流形，若该流形上存在一个(1,1)-型张量场 $\boldsymbol{\phi}$、向量场 $\boldsymbol{\xi}$ 及 1-形式 $\boldsymbol{\eta}$，满足

$$\boldsymbol{\phi}^2=-\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\xi},\qquad \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi})=1, \tag{5}$$

则称三元组 $(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 是一个近切触结构. 由式(5)易见 $\boldsymbol{\phi\xi}=0$，$\boldsymbol{\eta}\circ\boldsymbol{\phi}=0$. 赋予近切触结构的流形称为近切触流形. 如果近切触流形上存在 Riemann 度量 $\boldsymbol{g}$，满足

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\phi X},\boldsymbol{\phi Y})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})-\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{Y}), \tag{6}$$

则 $\boldsymbol{g}$ 称为 M^n 上的相容度量. 赋予相容度量的近切触流形称为近切触度量流形. 在式(6)中令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{\xi}$，可得

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{X}).$$

进一步，定义一个斜对称张量 $\boldsymbol{\Phi}$，使得 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\phi Y})=-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\phi X},\boldsymbol{Y})$. 如果 $\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\Phi}$，则 $\boldsymbol{\eta}$ 即为一个切触形式，即 $\boldsymbol{\eta}\wedge(\mathrm{d}\boldsymbol{\eta})^n\neq0$，此时 M^n 称为切触度量流形. 特别地，当 $\boldsymbol{\xi}$ 是 Killing 向量场时，M^n 称为 K-切触度量流形，此时有如下等式成立：

$$\nabla_X\xi=-\phi X, \tag{7}$$

$$\mathbf{Ric}(\xi,X)=2mg(\xi,X). \tag{8}$$

3　主要结果的证明

3.1　定理 1 的证明

由文献[2]知，关于任意切向量场 X,Y 和势向量场 V，有

$$(\mathscr{L}_V\nabla_X g-\nabla_X\mathscr{L}_V g-\nabla_{[V,X]}g)(Y,Z)=-g((\mathscr{L}_V\nabla)(X,Y),Z)-g((\mathscr{L}_V\nabla)(X,Z),Y). \tag{9}$$

将近 RB 孤立子方程(1)和射影向量场满足的方程(2)代入式(9)，得

$$-2(\nabla_X\mathbf{Ric})(Y,Z)+2\nabla_X(\lambda+\rho R)g(Y,Z)=$$
$$g(P(X)Y+P(Y)X,Z)+g(P(X)Z+P(Z)X,Y). \tag{10}$$

利用 Ricci 算子 Q 的定义式 $\mathbf{Ric}(X,Y)=g(QX,Y)$，式(10)可改写为

$$-2(\nabla_X Q)Y+2(X\lambda)Y+2\rho(XR)Y=2P(X)Y+P(Y)X+g(X,Y)\bar{P}, \tag{11}$$

其中 $\bar{P}$ 是使得 $g(\bar{P},X)=P(X)$ 成立的向量场.

设$\{e_i\}$是 M^n 上的一个局部标准正交标架场，在式(11)中令 $Y=e_i$，并与 e_i 做内积，再关于 i 求和得

$$\sum_{i=1}^{n}(-2g((\nabla_X Q)e_i,e_i)+2(X\lambda)g(e_i,e_i)+2\rho(XR)g(e_i,e_i))=$$
$$\sum_{i=1}^{n}(2P(X)g(e_i,e_i)+2P(e_i)g(X,e_i)).$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{n}g(Qe_i,e_i)=R,\qquad P(e_i)g(X,e_i)=P(X),$$

由向量场 X 的任意性，得

$$n\mathrm{d}\lambda+(\rho n-1)\mathrm{d}R=(n+1)P, \tag{12}$$

其中 d 为外微分算子. 同理，在式(11)中令 $X=e_i$，再关于 i 求和，并由 Y 的任意性知

$$2\mathrm{d}\lambda+(2\rho-1)\mathrm{d}R=(n+3)P. \tag{13}$$

结合式(12),(13)可得

$$P=\frac{2-n}{(n-1)(n+2)}\mathrm{d}R,\qquad \mathrm{d}\lambda=\left(\frac{2}{(n-1)(n+2)}-\rho\right)\mathrm{d}R. \tag{14}$$

将式(14)代入式(11)，得

$$(\nabla_X Q)Y=\frac{1}{(n-1)(n+2)}\left(n(XR)Y+\frac{(n-2)}{2}((YR)X+g(X,Y)\nabla R)\right), \tag{15}$$

其中∇R 为数量曲率 R 的梯度. 关于 X,Y 反对称化作用式(15)，得

$$(\nabla_Y Q)X=\frac{1}{(n-1)(n+2)}\left(n(YR)X+\frac{(n-2)}{2}((XR)Y+g(X,Y)\nabla R)\right),$$

从而

$$(\nabla_X Q)Y-(\nabla_Y Q)X=\frac{1}{2(n-1)}((XR)Y-(YR)X). \tag{16}$$

于是 Cotton 张量场 C 可表示为

$$C(X,Y,Z)=(\nabla_X Q)Y-(\nabla_Y Q)X-\frac{1}{2(n-1)}((XR)Y-(YR)X)=0.$$

结论 1)得证. 从而由式(4)可知当 Cotton 张量场 C 为零时，div $B=0$. 结论 2)得证. 最后，由式(15)可得

$$(\nabla_X\mathbf{Ric})(Y,Z)+(\nabla_Y\mathbf{Ric})(Z,X)+(\nabla_Z\mathbf{Ric})(X,Y)=$$
$$\frac{2}{n+2}((XR)g(Y,Z)+(YR)g(X,Z)+(ZR)g(X,Y)), \tag{17}$$

再由式(3)可知 **Ric** 是共形 Killing 的. 此外,式(17)也可以写为

$$\left(\nabla_{\boldsymbol{X}}\left(\mathbf{Ric}-\frac{2R}{n+2}\boldsymbol{g}\right)\right)(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})+\left(\nabla_{\boldsymbol{Y}}\left(\mathbf{Ric}-\frac{2R}{n+2}\boldsymbol{g}\right)\right)(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X})+\left(\nabla_{\boldsymbol{Z}}\left(\mathbf{Ric}-\frac{2R}{n+2}\boldsymbol{g}\right)\right)(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=0,$$

从而 $\mathbf{Ric}-\frac{2R}{n+2}\boldsymbol{g}$ 是 Killing 的. 定理 1 证毕.

3.2 定理 2 的证明

在 K-切触度量流形中,$\boldsymbol{\xi}$ 是 Killing 的,所以 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{Q}=0$,于是

$$(\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{X}=\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Q}(\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{X})=\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}-\nabla_{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{Q}(\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{X}-\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\xi})=(\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{X}-\nabla_{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{Q}\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\xi},$$

从而

$$(\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{X}=\nabla_{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{Q}\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\xi}. \tag{18}$$

将式(7)代入式(18)得

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{Q}. \tag{19}$$

在式(16)中令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{\xi}$,由于 $\boldsymbol{\xi}$ 是 Killing 的,因此 $\boldsymbol{\xi}R=0$,从而式(16)可化为

$$(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\xi}-(\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{X}=\frac{1}{4m}(\boldsymbol{X}R)\boldsymbol{\xi}. \tag{20}$$

根据 Ricci 算子 $\boldsymbol{Q}$ 的定义,式(8)可改写为 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\xi}=2m\boldsymbol{\xi}$. 对该式沿 $\boldsymbol{X}$ 方向求协变导数,并利用式(8)可得

$$(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{X}-2m\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{X}. \tag{21}$$

整理式(19)~(21),得

$$\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}-2m\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{X}=\frac{1}{4m}(\boldsymbol{X}R)\boldsymbol{\xi}. \tag{22}$$

用 $\boldsymbol{\phi}$ 作用式(22)并利用式(5),(8)可得 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}=2m\boldsymbol{X}$,即 $(M^{2m+1},\boldsymbol{g})$ 是 Einstein 流形. 定理 2 证毕.

参 考 文 献

[1] DWIVEDI S. Some Results on Ricci-Bourguignon Solitons and Almost Solitons [J]. Canadian Mathematical Bulletin, 2021, 64(3): 591-604.

[2] YANO K. Integral Formulas in Riemannian Geometry [M]. New York: Marcel Dekker Inc, 1970: 31-56.

[3] SHARMA R. Certain Results on K-Contact and (k,μ)-Contact Manifolds [J]. Journal of Geometry, 2008, 89(1/2): 138-147.

[4] BEJAN C L, CRASMAREANU M. Ricci Solitons in Manifolds with Quasi-contact Curvature [J]. Publicationes Mathematicae, 2011, 78(1): 235-243.

[5] CHEN B Y, DESHMUKH S. Geometry of Compact Shrinking Ricci Solitons [J]. Balkan Journal of Geometry and Its Applications, 2014, 19(1): 13-21.

[6] SHARMA R, DESHMUKH S. Ricci Almost Solitons with Associated Projective Vector Field [J]. Advances in Geometry, 2022, 22(1): 1-8.

[7] WALD R M. General Relativity [M]. Chicago: University of Chicago Press, 1984: 12-491.

[8] GALLOT S, HULIN D, LAFONTAINE J. Riemannian Geometry [M]. [S. l.]: Springer-Verlag, 1990: 1-245.

[9] BACH R. Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung des Krümmungstensorbegriffs [J]. Mathematische Zeitschrift, 1921, 9(1/2): 110-135.

[10] YANG F, ZHANG L D. Rigidity of Gradient Shrinking and Expanding Ricci Solitons [J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2017, 54(3): 817-824.

[11] 陈佳蕊,刘建成. 完备非紧梯度扩张 Ricci 孤立子的刚性 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2019, 57(6): 1403-1406. (CHEN J R, LIU J C. Rigidity of Complete Non-compact Gradient Expanding Ricci Solitons [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2019, 57(6): 1403-1406.)

(责任编辑:赵立芹)