doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023218

一类由变分不等式驱动的模糊分数阶微分包含系统解的存在性

李慧敏, 顾海波
(新疆师范大学 数学科学学院, 乌鲁木齐 830017)

摘要: 考虑一类动态模糊系统, 该系统由模糊 Atangana-Baleanu 分数阶微分包含和变分不等式组成, 称为模糊分数阶微分变分不等式(FFDVI), 它包括了模糊分数阶微分包含和变分不等式两个领域的研究, 拓宽了模糊环境下的可研究问题, 该模型在同一框架内捕获了模糊分数微分包含和分数微分变分不等式的期望特征. 利用 Krasnoselskii 不动点定理, 得到了 FFDVI 在某些温和条件下解的存在性.

关键词: Atangana-Baleanu 分数阶导数; 分数阶模糊微分变分不等式; Krasnoselskii 不动点定理; 解的存在性
中图分类号: O175.14 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2024)02-0222-15

Existence of Solutions for a Class of Fuzzy Fractional Differential Inclusion Systems Driven by Variational Inequalities

LI Huimin, GU Haibo
(*School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi* 830017, *China*)

Abstract: We considered a class of dynamic fuzzy systems, which consisted of fuzzy Atangana-Baleanu fractional differential inclusion and variational inequalities, called fuzzy fractional differential variational inequalities (FFDVI). It included the two fields of fuzzy fractional differential inclusion and variational inequalities, expanding the researchable problems in fuzzy environments. The model captured the desired features of the fuzzy fractional differential inclusion and fractional differential variational inequalities within the same framework. By using Krasnoselskii fixed point theorem, the existence of solutions of FFDVI under some mild conditions was obtained.

Keywords: Atangana-Baleanu fractional derivative; fractional fuzzy differential variational inequality; Krasnoselskii fixed point theorem; existence of solution

0 引 言

分数阶微积分作为经典整数阶微积分的一种自然推广, 近年来备受关注. 由于整数阶微分方程具

收稿日期: 2023-06-02. **网络首发日期:** 2024-03-02.

第一作者简介: 李慧敏(1997—), 女, 回族, 硕士研究生, 从事微分方程理论及其应用的研究, E-mail: 1275013458@qq.com.
通信作者简介: 顾海波(1982—), 男, 汉族, 博士, 教授, 从事微分方程理论及其应用的研究, E-mail: hbgu_math@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11961069)、新疆优秀青年科技人才培训计划项目(批准号: 2019Q022)、新疆维吾尔自治区自然科学基金(批准号: 2019D01A71)和新疆师范大学青年拔尖人才计划项目(批准号: XJNUQB2022-14).
网络首发地址: https://link.cnki.net/urlid/22.1340.o.20240228.1502.003.

有一定的局限性，而分数阶模糊微分方程在应用中比整数阶模糊微分方程更贴合实际，因此对分数阶模糊变分不等式系统的研究很有必要，已广泛应用于电动力学、生物技术、空气动力学、分布式螺旋桨设计和控制动力系统中[1-8]. 最常用的分数式积分和微分算子是 Riemann-Liouville，Hadamard，Grunwald-Letnikov，Caputo 和 Riesz-Caputo. Atangana 和 Baleanu[9]引入了一种新的分数阶导数，它包含由 Mittag-Leffler 函数描述的非局部和非奇异核，Atangana-Baleanu 分数阶微积分[9-10]是一种强大的数学工具，可以解释和描述各种复杂的物理现象、化学反应过程、种群动力学行为等问题[11-15].

近年来，Caputo 和 Fabrizio[16]基于实值函数空间中的幂函数核，引入了 Caputo 意义上的分数阶导数新定义如下：

$$^{\mathrm{CF}}D_{a+}^{\alpha}x(t)=\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\int_a^t \exp\left\{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)\right\}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $\alpha\in(0,1)$，$M(\alpha)$是满足 $M(0)=M(1)=1$ 的归一化常数. 目前，Caputo-Fabrizio(CF)[17-18]分数阶导数已经在扩散建模和质量弹簧-阻尼器系统领域得到广泛应用.

最近，研究者提出了一个新的分数阶导数概念，基于将 CF 分数阶导数公式中的函数核 $\exp\{z\}$替换为函数(一个参数)$E_{\alpha,1}(z)$，这个概念被称为定义在 Caputo 意义上的 Atangana-Baleanu 分数阶导数(ABC)[9,19]：

$$^{\mathrm{ABC}}D_{a+}^{\alpha}x(t)=\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\int_a^t E_{\alpha,1}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)^{\alpha}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x(s)\mathrm{d}s,$$

ABC 分数阶导数在传热、变分问题、混沌理论和经济模型等领域应用广泛.

模糊微分包含在人工智能、人口动力学、石油工程、力学、医学等领域[20-21]的不确定现象建模方面有许多重要应用. 最早，Hüllermeier[22]基于在知识系统中的应用，介绍并研究了以下一类模糊微分包含：

$$\begin{cases} x'(t)\in[F_{(t,x(t))}]_{\alpha}, & \alpha\in[0,1],\\ x(0)\in[x_0]_{\alpha}. \end{cases}$$

Guo 等[23]建立了模糊脉冲泛函微分包含的一些存在性结果，并在模糊总体模型中提供了一个应用；Min 等[24]研究了一类隐式模糊微分包含，并给出了其在钻井石油工程动力学中的应用；Majumdar 等[25]讨论了模糊微分包含问题在大气和医学控制论中的应用；Liu 等[26]进一步讨论了模糊延迟微分包含；Wu 等[27]建立了半线性模糊微分包含的一些存在性结果；Dai 等[28]研究了一类通用振子模糊微分方程；Liu 等[26]给出了模糊过程、混合过程和不确定过程的一些基本概念，并发展了一种模糊微积分，提出了一类新的模糊微分方程；Hung 等[29]研究了 Banach 空间中一类具有可解算子的模糊微分包含体.

变分不等式理论是优化理论的重要组成部分，它作为一种数学规划工具广泛应用于建模等许多优化和决策问题中[30-31]. 但在数学优化、控制理论、运筹学和博弈论等领域中出现许多决策问题，其面临着不确定性. 针对这些不确定性，Zadeh[32]首先提出并研究了模糊集的概念. 模糊集理论由于可作为建模不确定问题的有力工具，也获得了广泛关注. Chang 等[33]提出了模糊映射的概念和简单的模糊变分不等式，而这种模糊变分不等式之所以能引起研究者的广泛关注，是因为它可以解决如图像处理、接触力学和动态交通网络等问题，包括 Chang 等[34]引入并研究了由模糊映射驱动的向量拟变分不等式；Chang[35]证明了模糊向量拟变分类不等式解的存在性；在适当的条件下，Huang 等[36]应用 F-KKM定理研究了一类 f 互补问题；Tang 等[37]研究了有限维空间中具有模糊映射的摄动变分不等式的存在定理.

基于上述分析，本文研究一种新的动态模糊系统，即分数阶模糊变分不等式，该系统由 Atangana-Baleanu 模糊分数阶微分包含和变分不等式相结合，即具有 Atangana-Baleanu 分数阶导数的模糊分数阶微分变分不等式：

$$\begin{cases} {}_0^{\mathrm{ABC}}D^{\gamma}x(t)\in[F_{(t,x(t))}]_{\alpha}+Q(t,x(t))u(t), & t\in[0,T],\\ u(t)\in \mathrm{SOL}(K,g(t,x(t))+G,\varphi), & t\in[0,T],\\ x(a)=x'(a)=0, \end{cases} \tag{1}$$

其中：${}_0^{\mathrm{ABC}}D^{\gamma}x(t)$为 Caputo 型 Atangana-Baleanu 分数阶导数，$\gamma\in(1,2]$；$\alpha\in[0,1]$；$x(t)$：$[0,T]\to\mathbb{R}^n$；$u(t)$：$[0,T]\to K$，K 是$\mathbb{R}^m$空间中的非空紧凸集；F：$[0,T]\times\mathbb{R}^n\to E^n$为模糊映射；$Q$：$[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times m}\times\mathbb{R}^m$；$\mathrm{SOL}(K,g(t,x(t))+G(\cdot),\varphi)$表示$\mathbb{R}^m$空间中以下广义混合变分不等式的解集，即对给定的$t\in[0,T]$和$x(t)\in\mathbb{R}^n$，存在一个$u(t)\in K$，使得

$$\langle g(t,x(t))+G(u(t)),v-u(t)\rangle+\varphi(v)-\varphi(u(t))\geqslant 0,\qquad \forall v\in K,$$

式中$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示$\mathbb{R}^m$空间中向量的标准内积，$G$：$K\to\mathbb{R}^{m*}$，$g$：$[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，$\varphi$：$K\to\overline{\mathbb{R}}:=\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

本文将给出$\gamma\in(1,2]$阶的 Atangana-Baleanu 型分数阶模糊变分不等式系统解的存在性条件，该系统可作为模糊分数阶微分包含与之前研究的分数阶微分变分不等式的一些扩展. 本文研究拓宽了在模糊环境下的可研究问题，为发酵动力学等问题的应用研究提供了理论支持.

1 预备知识

设$\|\cdot\|$是$\mathbb{R}^n$空间中的 Euclid 范数，$L^1[0,T]$为所有 Lebesgue 可积函数x：$[0,T]\to\mathbb{R}^n$的 Banach 空间，范数定义为$\|x\|_{L^1}=\int_0^T\|x(t)\|\mathrm{d}t$，$C[0,T]$为所有连续函数$x(t)$：$[0,T]\to\mathbb{R}^n$的 Banach 空间，范数定义为$\|x\|_{C[0,T]}=\sup\limits_{t\in[0,T]}\|x(t)\|$.

设Ξ是基空间X中的一个非空子集. 考虑一个函数ω：$X\to[0,1]$是X的一个模糊集，映射F：$\Xi\to\mathscr{F}(X)$是一个模糊映射，其中$\mathscr{F}(X)$是所有模糊集的集合. $F(u)$(下面用F_u表示)是每个$u\in\Xi$上的模糊集合，$F_u(x)$是模糊集合F_u中元素x的隶属度，定义

$$[\omega]_\alpha=\{x\in X:\omega(x)\geqslant\alpha\},\qquad \alpha\in(0,1],$$

表示X上的模糊集ω的α-阶集，并且模糊集的支集$[\omega]_0$定义为$[\omega]_0=\overline{\bigcup\limits_{\alpha\in(0,1]}[\omega]_\alpha}$，其中$\overline{\bigcup\limits_{\alpha\in(0,1]}[\omega]_\alpha}$是$\bigcup\limits_{\alpha\in(0,1]}[\omega]_\alpha$的闭包.

设E^n(E为一个 Banach 空间)为表示满足以下假设的$\mathbb{R}^n$中所有模糊子集ω的空间：

(i) ω是正态的，即$[\omega]_1\neq\varnothing$；

(ii) $\mathrm{supp}[\omega]_0=\overline{\bigcup\limits_{\alpha\in(0,1]}[\omega]_\alpha}=\overline{\{x\in\mathbb{R}^n:\omega(x)>0\}}$是紧的；

(iii) $[\omega]_\alpha=\{x\in\mathbb{R}^n:\omega(x)\geqslant\alpha\}(\alpha\in(0,1])$是闭的；

(iv) ω是模糊凸的，即

$$\omega(kv_1+(1-k)v_2)\geqslant\min\{\omega(v_1),\omega(v_2)\},\quad \forall v_1,v_2\in\mathbb{R}^n,\quad k\in[0,1].$$

注意到模糊向量空间E^n以其特征函数的形式包含了$\mathbb{R}^n$的所有非空紧凸子集. 显然，模糊向量空间E^n和$\mathbb{R}^n$上的模糊集$\mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$空间有以下关系：$E^n\subset\mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$.

设(Λ,d)是一个度量空间. 对$\forall\xi\in\Lambda$和$\forall A,B\in 2^\Lambda$，定义ξ与B的距离为

$$d(\xi,B)=\begin{cases}\inf\limits_{b\in B}d(\xi,B), & B\neq\varnothing,\\ +\infty, & B=\varnothing;\end{cases}\tag{2}$$

定义A,B之间的 Hausdorff 距离为

$$H(A,B)=\max\{\sup_{b\in B}d(b,A),\sup_{a\in A}d(a,B)\}.$$

若(Λ,d)是完备度量空间，则有$(P_f(\Lambda),W)$，其中$P_f(\Lambda)$是Λ中所有非空闭子集的空间. 在E^n上的度量定义为

$$W(u,v)=\sup\{W([\omega]_\alpha,[\omega]_\alpha):\alpha\in[0,1]\},\qquad \forall u,v\in E^n.$$

则(E^n,W)是完备的度量空间.

设Ψ：$Y\to 2^Y\backslash\{\varnothing\}$是一个集值映射，其中$Y$是 Banach 空间. 若$y\in\Psi(y)$，则称点$y\in Y$是$\Psi$的不动点. 下面给出$\Psi$的性质：

1) 若$\Psi(y)$对所有的$y\in Y$为紧(凸，闭)的，则Ψ有紧(凸，闭)值；

2) 若对于每个 $y\in Y$，集合 $\Psi(y)$是 Y 中的一个非空闭子集，并且对任意 Y 中的开集 V 有 $\Psi(y)\subset V$，其中在 y 中有一个开邻域 N，使得 $\Psi(N)\subset V$，则 Ψ 在 Y 上是上半连续(u. s. c)的；

3) 若 $\Psi(V)$对任意有界子集 $V\subset Y$ 都是相对紧的，则 Ψ 是完全连续的.

若 Ψ 是有紧值且完全连续的，则是上半连续(u. s. c)的. 当且仅当 Ψ 有一个闭图，即 $x_n\to x^*$，$y_n\to y^*$ 和 $y_n\in\Psi(x_n)$有 $y^*\in\Psi(x^*)$.

设 Z 是一个可分的度量空间，(I,U)是一个可测空间. 若 $\varphi^{-1}(V)\in\mathcal{U}$ 对任意闭集 $V\subset Z$，其中 $\varphi^{-1}(V)=\{z\in Z:\varphi(z)\subseteq V\}$，则具有闭值的一个集值映射 $\varphi: I\to 2^Z\backslash\{\varnothing\}$称为弱可测的；若 $\varphi^{-1}(V)\in\mathcal{U}$ 对任意开集 $U\subset Z$，则具有闭值的一个集值映射 $\varphi: I\to 2^Z\backslash\{\varnothing\}$称为可测的. 如果 φ 有紧值，则 φ 的弱可测性和可测性等价.

设 $\gamma\in(0,1)$，$b>0$，则 γ 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分定义为

$$(I_{0+}^{\gamma}x)(t)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}x(s)\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,b],$$

其中 Γ 为 Gamma 函数，定义为 $\Gamma(\gamma)=\int_0^{\infty}t^{\gamma-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. γ 阶 Caputo 分数阶导数为

$$({}^{\mathrm{C}}D_{0+}^{\gamma}x)(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t(t-s)^{-\gamma}x'(s)\mathrm{d}s,\quad t\in[0,b],\quad s\in\mathbb{R}^+.$$

函数 $x:[0,T]\to\mathbb{R}^n$ 从 0 开始的 γ 阶的 Atangana-Baleanu 分数积分定义为

$$({}^{\mathrm{AB}}I_0^{\gamma}x)(t)=\frac{1-\gamma}{B(\gamma)}x(t)+\frac{\gamma}{B(\gamma)}(I_0^{\gamma}x)(t),\qquad t\in[0,b].$$

函数 $x:[0,T]\to\mathbb{R}^n$ 的 γ 阶的 Caputo 型 Atangana-Baleanu 分数阶导数定义为

$$({}^{\mathrm{ABC}}D_0^{\gamma}x)(t)=\frac{B(\gamma)}{1-\gamma}\int_0^t x'(s)E_{\gamma}\left[-\gamma\frac{(t-s)^{\gamma}}{1-\gamma}\right]\mathrm{d}s,\quad t\in[0,b],\quad s\in\mathbb{R}^+,$$

其中 $B(\gamma)$是一个满足 $B(0)=B(1)$的标准归一化正函数，E_{γ} 是 Mittag-Leffler 函数，定义为

$$E_{\gamma}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(n\gamma+1)},$$

设 $\gamma\in(m,m+1]$，$m\in N_0$，$b>0$，函数 $x^{(n)}$ 为 n 阶导数. 设 $\delta=\gamma-n$，$\delta\in(0,1]$. 则 γ 阶的 Caputo 型 Atangana-Baleanu 分数阶导数定义为

$$({}^{\mathrm{ABC}}D_0^{\gamma}x)(t)=({}^{\mathrm{ABC}}D_0^{\delta}x^{(n)})(t).$$

由 $x^{(0)}(t)=x(t)$，对 $\gamma\in(0,1)$有$({}^{\mathrm{ABC}}D_0^{\gamma}x)(t)=({}^{\mathrm{ABC}}D_0^{\gamma}x)(t)$. 相应的分数积分由下式给出：

$$({}^{\mathrm{ABC}}I_0^{\gamma}x)(t)=I_0^m({}^{\mathrm{ABC}}I_0^{\gamma}x)(t).$$

对 $x(t)\in[0,T]$，$\gamma\in(m,m+1]$，存在 $m\in N_0$，有

$$({}^{\mathrm{ABC}}I_0^{\gamma}\ {}^{\mathrm{ABC}}D_0^{\gamma}x)(t)=x(t)-\sum_{k=0}^{m}\frac{x^{(k)}}{k!}(t-0)^k.$$

给定一个 Banach 空间 E，用 $C([0,b];E)$表示从$[0,b]$到 E 所有连续函数的空间. 设 X 和 Y 是两个拓扑向量空间，D 是 X 的子集，用 2^X 表示 X 中的所有子集的集合，则：

(i) 函数 $A: X\to[0,1]$，称为 X 上的模糊集，并用 $\mathcal{F}(X)$表示 X 上所有模糊集的集合；

(ii) 从 $D\to\mathcal{F}(Y)$的函数 F，即 $F: D\to\mathcal{F}(Y)$，称为 D 上的模糊映射.

注 1　如果 $F: D\to\mathcal{F}(Y)$是模糊映射，则对任意 $x\in D$，$F(x)\in\mathcal{F}(Y)$是 Y 上的模糊集，即 $F(x)$是从 Y 映射到$[0,1]$的函数. 对任意 $y\in Y$，通常 $F_x(y)$称为 y 在模糊集合 F_x 上的隶属度，其中对所有 $x\in D$和 $y\in Y$ 有 $F_x(y)=F(x,y)$.

定义 1　若函数 $x\in(C[0,T],E^n)$，可积函数 $u:[0,T]\to K$ 和函数 $f\in S_F^1(x)$满足：

$$\begin{cases}x(t)=\dfrac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\displaystyle\int_0^t[f(s)+Q(s,x(s))u(s)]\mathrm{d}s+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}[f(s)+Q(t,x(s))u(s)]\mathrm{d}s,\\ \langle g(t,x(t))+G(u(t)),v-u(t)\rangle+\varphi(v)-\varphi(u(t))\geqslant 0,\quad\forall v\in K,\quad t\in[0,T].\end{cases}$$

其中，

$$S^1_{\widetilde{F}}(x)=\{f\in L^1([0,T],\mathbb{R}^n):\ f(t)\in \widetilde{F}(t,x(t))=[F_{(t,x(t))}]_\alpha,\ t\in[0,T]\}. \tag{3}$$

则称函数对(x,u)是系统(1)的解，x称为温和轨迹，u是变分控制轨迹.

定义2 设$\Phi:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to 2^{\mathbb{R}^n}$，定义为

$$\Phi(t,x(t))=\{Q(t,x(t))u(t):\ u(t)\in \mathrm{SOL}(K,g(t,x(t))+G,\varphi)\}, \tag{4}$$

其中

$$\mathrm{SOL}(K,g(t,x(t))+G,\varphi)=\{u\in K:\langle g(t,x(t))+G(u(t)),v-u(t)\rangle+\varphi(v)-\varphi(u(t))\geqslant 0,\ \forall v\in K\}, \tag{5}$$

$$x(t)=\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t[f(s)+g(s)]\mathrm{d}s+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}[f(s)+g(s)]\mathrm{d}s,$$

$f\in S^1_{\widetilde{F}}(x)$，$g\in S^1_{\Phi}(x)$，且

$$S^1_{\Phi}(x)=\{z\in L^1([0,T],\mathbb{R}^n):\ z(t)\in\Phi(t,x(t)),\ t\in[0,T]\}. \tag{6}$$

定义3[15] 设Λ为一个度量空间. 一个集值映射$\Phi:\Lambda\to 2^{\Lambda}$有闭值，且若存在一个常数$\omega\in(0,1)$，使得

$$H(\Phi(x),\Phi(y))\leqslant\omega\|x-y\|,\qquad \forall x,y\in\Lambda.$$

则该映射称为Λ上的集值收缩.

定义4[15] 若对任意$\alpha\in[0,1]$，有具有紧凸值的集值映射$[F_t]_\alpha:[0,T]\to 2^{\mathbb{R}^n}\setminus\{\varnothing\}$是Lebesgue可测的，则模糊映射$F:[0,T]\to E^n$称为是强可测的.

定义5[15] 设$(X,\|\cdot\|)$是一个Banach空间，若具有有界闭值的集值映射$\Psi:[0,T]\times X\to 2^X\setminus\{\varnothing\}$满足下列条件：

1) 对任意$x\in X$，映射$t\mapsto\Psi(t,x)$是可测的；

2) 对任意$t\in[0,T]$，映射$x\mapsto\Psi(t,x)$是上半连续(u. s. c)的.

则Ψ称为Carathéodory的. 此外，若Ψ满足以下条件：对每个$r>0$，存在一个函数$\varphi_r\in L^1([0,T],\mathbb{R}^+)$，使得

$$\|\Psi(t,x)\|=\sup\{\|z\|:z\in\Psi(t,x(t))\},\quad t\in[0,T],\quad \|x\|\leqslant r.$$

则Ψ称为L^1-Carathéodory.

定义6[15] 给定一个Banach空间X，如果$\dim(X)<\infty$和$\Psi:[0,T]\times X\to 2^X\setminus\{\varnothing\}$是一个具有有界闭值的$L^1$-Carathéodory集值映射，则对任意$x\in X$，有

$$S^1_{\Psi}(x)=\{z\in L^1([0,T],X):\ z(t)\in\Psi(t,x(t)),\ t\in[0,T]\}\neq\varnothing.$$

引理1[17] 设$\omega\in E^n$，则：

1) 对一切$\alpha\in[0,1]$有$\varnothing\neq[\omega]_\alpha\subset\mathbb{R}^n$是紧凸集；

2) 当$0\leqslant\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant 1$时，有$[\omega]_{\alpha_1}\subset[\omega]_{\alpha_2}$；

3) 若一个非递减序列$\{\alpha_k\}$趋近α，则$[\omega]_\alpha=\bigcap\limits_{k\geqslant 1}[\omega]_{\alpha_k}$.

如果集族$\{A_\alpha:\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1\}\subset\mathbb{R}^n$满足1)～3)，则存在$\omega\in E^n$，使得

$$[\omega]_0=\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}A_\alpha}\subset A_0,\qquad [\omega]_\alpha=A_\alpha(\alpha\in[0,1]).$$

引理2[18] 给定一个Banach空间Y，设$\Psi:Y\to 2^Y$是一个集值映射. 对任何给定的$y\in Y$，如果$\Psi(y)$是紧的，则Ψ在$y\in Y$是上半连续(u. s. c.)的，当且仅当当$y_n\to y$时有序列$\{y_n\}\subset Y$，对任意$z_n\in\Psi(y_n)$，存在$z\in\Psi(y)$和z_n的子序列z_{n_k}，使得$z_{n_k}\to z$.

引理3[18] 设$A_1,A_2:[0,T]\to 2^{\mathbb{R}^n}$是两个可测映射，在Hausdorff度量$W$中具有紧值，$f:[0,T]\to\mathbb{R}^n$是$A_1$的一个可测选择. 则存在一个可测选择$g:[0,T]\to\mathbb{R}^n$，使得对所有的$t\in[0,T]$，有

$$\|f(t)-g(t)\|\leqslant W(A_1(t),A_2(t)).$$

引理4[18] 设X是一个可分的Banach空间，具有有界闭值的集值映射$\Psi:[0,T]\times X\to 2^X\setminus\{\varnothing\}$满足以下条件：

1) 对每个$x\in X$，$\Psi(\cdot,x)$是可测的；

2) 对每个 $t\in[0,T]$，有

$$W(\Psi(t,x),\Psi(t,y))\leqslant\psi(t,\|x-y\|),\qquad\forall x,y\in X,$$

其中 $\psi:[0,T]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是单值函数，$\psi(\cdot,s)$ 对任意 $s\geqslant 0$ 是可测的，$\psi(t,\cdot)$ 对任意 $t\in[0,T]$ 是右连续不递减的，对任意 $s>0$，$t\in[0,T]$，有 $\psi(t,s)<s$.

则对任何可测的 $\omega:[0,T]\to X$，具有有界闭值的集值映射 $\Psi(t,\omega(t)):[0,T]\to 2^X\backslash\{\varnothing\}$ 是可测的.

引理 5[18]　设 X 和 Y 是两个度量空间，$\Psi:\mathbb{R}^n\to 2^{\mathbb{R}^n}$ 是集值映射，对任意闭集 $C\subset Y$，有 X 中的闭集 $\Psi^-(C):=\{x\in X:\Psi(x)\cap C\neq\varnothing\}$ 存在，则 Ψ 是上半连续的.

引理 6[9]　设 E 是一个 Banach 空间，$\Omega\neq\varnothing$ 是另一个 Banach 空间的子集，集值映射 $\Psi:\Omega\to 2^E\backslash\{\varnothing\}$ 有弱紧凸值，并且当 $x_n\to x_0\in\Omega$ 时，有 $\{x_n\}\subset\Omega$，$y_n\in\Psi(x_n)$ 且 $y_n\to y_0\in\Psi(x_0)$ 弱收敛到子序列，则 Ψ 是弱上半连续映射.

引理 7[9]　给定一个 Banach 空间 X，设 $\Psi:[0,T]\times X\to 2X\backslash\{\varnothing\}$ 是一个具有有界闭值且 $S^1_\psi(x)\neq\varnothing$ 的 Carathéodory 集值映射. 设 $\Theta:L^1([0,T],X)\to C([0,T],X)$ 是一个线性连续映射，其上算子定义为

$$\Theta\circ S^1_\psi:C([0,T],X)\to 2^{C([0,T],X)},\qquad x\mapsto(\Theta\circ S^1_\psi)(x)=\Theta(S^1_\psi),$$

则在 $C([0,T],X)\times C([0,T],X)$ 上有一个闭图.

引理 8(Krasnoselskii 不动点定理)[19]　设 $B_r(0)$ 和 $\overline{B_r(0)}$ 分别表示以原点为中心和半径为 r 的 Banach 空间 X 中的开球和闭球，如果 $A:\overline{B_r(0)}\to 2^X\backslash\{\varnothing\}$ 是具有有界闭凸值的集值映射，$B:\overline{B_r(0)}\to 2^X\backslash\{\varnothing\}$ 是具有紧凸值条件的集值映射，且 A 是一个集值收缩，B 是上半连续的(u. s. c.)和完全连续的. 则下列结论之一成立：

(i) $A+B$ 在 $\overline{B_r(0)}$ 上有一个不动点存在；

(ii) 存在一个元素 $u\in X$，$\|u\|=r$，使得 $\lambda x\in Ax+Bx$(其中 $\lambda>1$).

2　模糊混合变分不等式解集的性质

设 $\mathbb{R}^m$ 是一个实自反 Banach 空间，其对偶空间为 $\mathbb{R}^{m^*}$，K 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个非空闭凸子集. $\mathbb{R}^n$ 为可分的 Banach 空间. 首先考虑下列广义混合变分不等式(Ⅵ)：找到 $u\in K$，使得

$$\langle\omega+G(u),v-u\rangle+\varphi(v)-\varphi(u)\geqslant 0,\qquad\forall v\in K,\tag{7}$$

其中 $\omega\in\mathbb{R}^{m^*}$，$G:K\to\mathbb{R}^{m^*}$. 为简单，用 $\mathrm{SOL}(K,\omega+G(\cdot),\varphi)$ 表示混合变分不等式(7)的解集.

引理 9[38]　假设 $H(G):G:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{m^*}$ 在 K 上是单调的和半连续的；$H(\varphi):\varphi:\mathbb{R}^m\to\overline{\mathbb{R}}:=\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. 则存在一个 $u\in K$，使得 $u\in\mathrm{SOL}(K,\omega+G(\cdot),\varphi)$ 当且仅当 u 是下列 Minty 混合变分不等式问题的解：

$$\langle\omega+G(v),v-u\rangle+\varphi(v)-\varphi(u)\geqslant 0,\qquad\forall v\in K.\tag{8}$$

定理 1　假设 $H(G)$ 和 $H(\varphi)$ 满足引理 9 的条件，且假设 $H(S):H(\mathrm{SOL}(K,\omega+G(\cdot),\varphi))$：存在 $v^*\in K\bigcap D(\varphi)$，使得

$$\liminf_{u\in K,\|u\|_{\mathbb{R}^m}\to\infty}\frac{\langle G(u),u-v^*\rangle+\varphi(u)-\varphi(v^*)}{\|u\|_{\mathbb{R}^m}}\to\infty,\tag{9}$$

则 $\mathrm{SOL}(K,\omega+G(\cdot),\varphi)$ 对任意 $\omega\in\mathbb{R}^{m^*}$ 是有界非空闭凸的.

证明：由 K 的定义知，其为自反 Banach 空间 $\mathbb{R}^m$ 的一个闭凸子集，因此由文献[2]中定理 4.1 可知，$\mathrm{SOL}(K,\omega+G(\cdot),\varphi)$ 是非空的. 下面证明 $\mathrm{SOL}(K,\omega+G(\cdot),\varphi)$ 是有界的.

反证法. 假设存在一个序列 $\{u_n\}\subset\mathrm{SOL}(K,\omega+G(\cdot),\varphi)$，使得当 $n\to\infty$ 时，有 $\|u_n\|_{\mathbb{R}^m}\to\infty$. 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 有 $\|u_n\|>n$. 由式(9)知，存在一个函数 $r:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$，使得当 $k\to+\infty$ 时，有 $r(k)\to+\infty$，并存在常数 $M>0$，使得对任意 $\|u\|_{\mathbb{R}^m}\geqslant M$，有

$$\langle G(u),u-v^*\rangle+\varphi(u)-\varphi(v^*)\geqslant r(\|u\|_{\mathbb{R}^m})\|u\|_{\mathbb{R}^m}.$$

因此，如果 n 足够大，使得

$$r(n)>\frac{\|\omega\|_{\mathbb{R}^{m^*}}\|v^*\|_{\mathbb{R}^m}}{n}+\|\omega\|_{\mathbb{R}^{m^*}},$$

则有

$$0\leqslant\langle G(u_n)+\omega,v^*-u_n\rangle+\varphi(v^*)-\varphi(u_n)\leqslant$$
$$[\|\omega\|_{\mathbb{R}^{m^*}}-r(\|u_n\|_{\mathbb{R}^m})]\|u_n\|_{\mathbb{R}^m}+\|\omega\|_{\mathbb{R}^{m^*}}\|v^*\|_{\mathbb{R}^m}<0,$$

矛盾. 因此,SOL(K,ω+$G(\cdot)$,φ)是有界的. 下面证 SOL(K,ω+$G(\cdot)$,φ)对任意 $\omega\in\mathbb{R}^{m^*}$ 是闭凸的.

设序列$\{u_n\}\subset$SOL(K,ω+$G(\cdot)$,φ),使得在 K 中有 $u_n\to u$. 则对任意 $n\in\mathbb{N}$,有

$$\langle G(u_n)+\omega,v-u_n\rangle+\varphi(v)-\varphi(u_n)\geqslant 0,\qquad\forall v\in K,\tag{10}$$

由引理 9,式(10)可等价为

$$\langle G(\cdot)+\omega,v-u_n\rangle+\varphi(v)-\varphi(u_n)\geqslant 0,\qquad\forall v\in K,\tag{11}$$

因为在 K 中有 $u_n\to u$,代入式(11)可得

$$\langle G(\cdot)+\omega,v-u\rangle+\varphi(v)-\varphi(u)\geqslant 0,\qquad\forall v\in K,$$

再由引理 9 可得 $u\in$SOL(K,ω+$G(\cdot)$,φ),因此 SOL(K,ω+$G(\cdot)$,φ)是闭的. 同理,可通过 φ 的凸性证明 SOL(K,ω+$G(\cdot)$,φ)是凸的. 证毕.

实际上,SOL(K,ω+$G(\cdot)$,φ)的有界性取决于 ω 的有界性.

定理 2 在定理 1 的假设下,对所有的 $w\in\bar{B}(n,\mathbb{R}^{m^*})=\{w\in\mathbb{R}^{m^*}:\|\omega\|_{\mathbb{R}^{m^*}}\leqslant n\}$,存在一个依赖于 n 的常数 $M_n>0$,使得

$$\|u\|_{\mathbb{R}^m}\leqslant M_n,\qquad\forall u\in\mathrm{SOL}(K,\omega+G(\cdot),\varphi).\tag{12}$$

证明:反证法. 假设存在 $N_0>0$,有

$$\sup_{w\in\bar{B}(N_0,\mathbb{R}^{m^*})}\{\|u\|_{\mathbb{R}^m}:u\in\mathrm{SOL}(K,\omega+G(\cdot),\varphi)\}=+\infty.$$

从而存在 $\omega_k\in\bar{B}(N_0,\mathbb{R}^{m^*})$,$u_k\in$SOL($K$,$\omega_k$+$G(\cdot)$,$\varphi$),使得 $\|u_k\|_{\mathbb{R}^m}>k(k=1,2,\cdots)$. 根据假设条件 $H(S)$可知,存在一个函数 $r:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$,使得当 $k\to+\infty$时,有 $r(k)\to+\infty$,存在一个常数 $M>0$,使得对于任意 $\|u\|_{\mathbb{R}^m}\geqslant M$,有

$$\langle G(u),u-v^*\rangle+\varphi(u)-\varphi(v^*)\geqslant r(\|u\|_{\mathbb{R}^m})\|u\|_{\mathbb{R}^m}.$$

因此,对于 $k>M$ 足够大,使得 $r(k)>\frac{N_0\|v^*\|_{\mathbb{R}^m}}{k}+N_0$,有

$$0\leqslant\langle G(u_k)+\omega_k,v^*-u_k\rangle+\varphi(v^*)-\varphi(u_k)\leqslant$$
$$[\|\omega_k\|_{\mathbb{R}^{m^*}}-r(\|u_k\|_{\mathbb{R}^m})]\|u_k\|_{\mathbb{R}^m}+\|\omega_k\|_{\mathbb{R}^{m^*}}\|v^*\|_{\mathbb{R}^m}\leqslant$$
$$[N_0-r(\|u_k\|_{\mathbb{R}^m})]\|u_k\|_{\mathbb{R}^m}+N_0\|v^*\|_{\mathbb{R}^m}<0,$$

矛盾. 证毕.

设 $g:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{m^*}$. 集值映射 $U:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to P(K)$定义为

$$U(t,x):=\{u\in K:u\in\mathrm{SOL}(K,g(t,x)+G(\cdot),\varphi)\}.\tag{13}$$

根据定理 2 可知,对任意$(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$,$U(t,x)$是非空有界闭凸的.

定理 3 在定理 1 的假设下,若函数 $g:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{m^*}$ 是一个有界的(即它将有界集映射为有界集)连续函数,则:

1) U 是弱的上半连续的;

2) 对于 $C([0,T];\mathbb{R}^n)$的每个有界子集 Ω,存在一个常数 M_Ω,使得

$$\|U(t,x(t))\|:=\sup\{\|u\|_{\mathbb{R}^m},u\in U(t,x(t))\}\leqslant M_\Omega,\quad\forall t\in[0,T],\quad x\in\Omega.\tag{14}$$

证明:用引理 5 证明 u 的上半连续性. 对任意弱闭集 $C\subset\mathbb{R}^m$,设$(t_n,x_n)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$ 满足当 $n\to\infty$时,有$(t_n,x_n)\to(t^*,x^*)$,且

$$(t_n,x_n)\in U^{-1}(C):=\{(t,x):C\cap U(t,x)\neq\varnothing\}.$$

因此,对任意 $n\in\mathbb{N}$,存在 $u_n\in C\cap U(t_n,x_n)$,使得

$$\langle g(t_n,x_n)+G(u_n),v-u_n\rangle+\varphi(v)-\varphi(u_n)\geqslant 0,\qquad\forall v\in K,\tag{15}$$

由引理 9，式(15)可等价于

$$\langle g(t_n,x_n)+G(\cdot),v-u_n\rangle+\varphi(v)-\varphi(u_n)\geqslant 0,\qquad \forall v\in K, \tag{16}$$

根据 g 的连续性和定理 2 知$\{u_n\}$是有界的. 在一般情况下，由 $\mathbb{R}^m$ 的自反性，假设在 $\mathbb{R}^m$ 中 $u_m\rightharpoonup u^*\in C$. 将 lim sup 代入式(16)，有

$$\langle g(t^*,x^*)+G(\cdot),v-u^*\rangle+\varphi(v)-\varphi(u^*)\geqslant 0,\qquad \forall v\in K.$$

再利用引理 9 可知，$u^*\in U(t^*,x^*)\bigcap C$ 在 C 中是弱闭性的，即

$$(t^*,x^*)\in U^{-1}(C):=\{(t,x):C\bigcap U(t,x)\neq\emptyset\},$$

从而 U 是弱上半连续的.

对于 $C([0,T];\mathbb{R}^n)$的任意有界子集 Ω，由 g 的有界性知，在 $\mathbb{R}^m$ 中有

$$g_\Omega:=\{g(t,x(t)):t\in[0,T],\ x\in\Omega\}.$$

从而由定理 2 知对任意 $t\in[0,T]$，$x\in\Omega$，有 $U(t,x(t))$是有界的，因此，存在一个常数 $M_\Omega>0$，使得式(14)成立. 证毕.

3　温和解的存在唯一性

下面研究基于 Krasnoselskii 不动点定理的集值版本的系统(1)解的存在性. 假设：

$H(\psi)$：对任意 $t\in[0,T]$，有 $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$，$W(F_{(t,x_2)},F_{(t,x_1)})\leqslant\psi(t,\|x_2-x_1\|)$，其中 $\psi:[0,T]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$是单值函数，$\psi(\cdot,s)$对任意 $s\geqslant 0$ 是可测的，$\psi(t,\cdot)$对任意 $t\in[0,T]$是右连续不递减的，对任意 $s>0$，$t\in[0,T]$，$\psi(t,s)<s$；

$H(F_{(\cdot,x)})$：对任意 $x\in\mathbb{R}^n$，$F_{(\cdot,x)}$都有强可测性；

$H(p_r)$：对任意 $r>0$，存在 $p_r\in L^1([0,T],\mathbb{R}^+)$，使得对任意 $t\in[0,T]$，有

$$\|F_{(t,x)}\|\leqslant\{f:f(t)\in\widetilde{F}(t,x)\}\leqslant p_r(t),$$

且对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 有 $x\leqslant r$，其中 $\|F\|=H(F,\tilde{0})$，$\tilde{0}$ 表示模糊集，定义为当 $y\neq 0$ 时 $\tilde{0}(y)=0$，当 $y=0$ 时 $\tilde{0}(y)=1$；

$H(Q)$：函数 $Q:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times m}\times\mathbb{R}^m$ 是连续函数，使得

$$\|Q(t,x)\|\leqslant\eta_Q,\quad \forall t\in[0,T],\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

其中 $\eta_Q>0$；

$H(U)$：$\|U(t,x(t))\|:=\sup\{\|u\|_{\mathbb{R}^m},u\in U(t,x(t))\}\leqslant M_\Omega$.

注 2　由假设 $H(Q)$，$H(U)$与式(2)中 $\Phi:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to 2^{\mathbb{R}^n}$的定义为非空紧凸值的上半连续的集值映射[35]，可得

$$\|\Phi(t,x)\|=\sup\{\|\omega\|:\omega\in\Phi(t,x)\}\leqslant\|Q(t,x)\|M_\Omega\leqslant\eta_Q M_\Omega. \tag{17}$$

引理 10　假设 $H(\psi)$成立，则集值映射 $\widetilde{F}:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to 2^{\mathbb{R}^n}$定义为

$$\widetilde{F}(t,x)=[F_{(t,x)}]_\alpha=\{y\in\mathbb{R}^n:F_{(t,x)}(y)\geqslant\alpha\},$$

具有非空紧凸值，且对任意 $t\in[0,T]$，$\widetilde{F}(t,\cdot)$为上半连续(u. s. c.)的. 此外，对任意 $b\in\widetilde{F}(t,x)$，$x\in\mathbb{R}^n$，有

$$\|b\|\leqslant\|x\|+\|\widetilde{F}(t,0)\|,\qquad t\in[0,T].$$

证明：类似于文献[39]中引理 2.2 可知，$\widetilde{F}$ 是具有非空紧凸值的集值映射，则只需证明 $\widetilde{F}$ 是上半连续的集值映射.

对任意给定的 $\varepsilon>0$，$t\in[0,T]$，$x_1\in\mathbb{R}^n$，$\widetilde{F}(t,x)$的邻域可定义为

$$N(\widetilde{F}(t,x_1),\varepsilon)=\{z\in\mathbb{R}^n:d(z,\widetilde{F}(t,x_1))<\varepsilon\},$$

其中距离 d,W 定义如式(2). 设 $V=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x-x_1\|<\varepsilon\}$是 x_1 的邻域. 根据假设 $H(\psi)$，对任意 $x_1\in V$，$a\in\widetilde{F}(t,x_2)$，有

$$d(a,\widetilde{F}(t,x_1))\leqslant W(\widetilde{F}(t,x_1),\widetilde{F}(t,x_2))=W([F_{(t,x_1)}]_\alpha,[F_{(t,x_2)}]_\alpha)\leqslant$$
$$W(F_{(t,x_2)},F_{(t,x_1)})\leqslant\psi(t,\|x_2-x_1\|)\leqslant\|x_2-x_1\|<\varepsilon,$$

所以 $\widetilde{F}(t,V)\subset N(\widetilde{F}(t,x_1),\varepsilon)$，因此对任意 $t\in[0,T]$，有 $\widetilde{F}(t,\cdot)$为上半连续(u. s. c.)的.

下面证明第二个结论成立. 设有任意 $x\in\mathbb{R}^n$. 根据三角形不等式和假设 $H(\psi)$，则有

$$\begin{aligned}\|b\|\leqslant\|\widetilde{F}(t,x)\|&=W(\widetilde{F}(t,x),0)\leqslant W(\widetilde{F}(t,x),\widetilde{F}(t,0))+W(\widetilde{F}(t,0),0)=\\&W([F_{(t,x)}]_\alpha,[F_{(t,0)}]_\alpha)+\|\widetilde{F}(t,0)\|\leqslant\\&W(F_{(t,x)},F_{(t,0)})+\|\widetilde{F}(t,0)\|\leqslant\\&\psi(t,\|x\|)+\|\widetilde{F}(t,0)\|\leqslant\|x\|+\|\widetilde{F}(t,0)\|,\end{aligned}$$

因此对任意 $t\in[0,T]$，结论成立.

引理 11 设 $H(Q)$和 $H(U)$成立，则对任意 $x\in\mathbb{R}^n$，$t\mapsto\Phi(t,x)$都是可测的，其中 Φ 定义如式(4).

证明：由文献[18]中命题 19.3 知，只需证明对任意 $x,y\in\mathbb{R}^n$，$t\mapsto d(y,\Phi(t,x))$是可测的. 因此需先证明对任意 $\lambda\geqslant0$，$L_\lambda=\{t\in[0,T]:d(y,\Phi(t,x)>\lambda\}$都是可测的. 事实上，若能证明 L_λ 是开的，则结论自然成立.

设$\{t_n\}\subset(L_\lambda)^C=[0,T]\backslash L_\lambda$，使得 $t_n\to t$. 对任意 $n\in\mathbb{N}$有 $d(y,\Phi(t,x))\leqslant\lambda$. 因为对任意$(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$，$\Phi(t,x)$是非空紧凸的，由注 2 可知，对任意 $n\in\mathbb{N}$，存在 $z_n\in\Phi(t_n,x)$，使得

$$\|y-z_n\|<\lambda+\frac{1}{n},$$

$$\|z_n\|\leqslant\eta_Q M_\Omega.$$

所以存在一个$\{z_n\}$的收敛子序列(为简单，仍记为$\{z_n\}$本身)，使得$\{z_n\}\to z\in K$. 由定理 3 知 $z\in\Phi(t,x)$. 从而有

$$d(y,\Phi(t,x))\leqslant\|z-y\|=\lim_{n\to\infty}\|z_n-y\|\leqslant\lambda,$$

则 $t\subset(L_\lambda)^C$ 且$[0,T]\backslash L_\lambda$ 是闭的. 因此，对任意 $\lambda\geqslant0$，L_λ 都是开的. 表明对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 有 $t\mapsto d(y,\Phi(t,x))$是可测的.

引理 12 设上述假设都成立，则 $S^1_{\widetilde{F}}(x)\neq\varnothing$，$S^1_\Phi(x)\neq\varnothing$，其中 $S^1_{\widetilde{F}}(x)$,$S^1_\Phi(x)$分别如式(3),(6)所定义.

证明：第一步需证明 $S^1_{\widetilde{F}}(x)\neq\varnothing$，根据假设 $H(p_r)$和文献[39]中定理 3.3 知，对任意 $r>0$，$x\in\mathbb{R}^n$，$t\in[0,T]$，当 $\|x\|\leqslant r$ 时，有

$$\|F_{(t,x)}\|=H(F_{(t,x)},\tilde{0})=\sup_{y\in[F_{(t,x)}]_0}\|y\|\leqslant p_r(t).$$

由引理 1 知，

$$[F_{(t,x)}]_\alpha\subset[F_{(t,x)}]_0\quad(\alpha\in[0,1]).$$

因此

$$\|\widetilde{F}(t,x)\|=\sup\{\|z\|:z\in\widetilde{F}(t,x)=[F_{(t,x)}]_\alpha\}\leqslant p_r(t).\tag{18}$$

结合引理 9，由假设 $H(F_{(\cdot,x)})$和式(18)知，$\widetilde{F}:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to2^{\mathbb{R}^n}$ 是一个具有有界闭值的 L^1-Carathéodory集值映射. 因此，定义 6 表明 $S^1_{\widetilde{F}}(x)$是非空的.

第二步证明 $S^1_{\widetilde{F}}(x)\neq\varnothing$，由定理 1 即得证.

引理 13 若上述假设条件都成立，且存在一个常数 $r>0$，使得

$$r>\frac{\dfrac{(2-\gamma)(L+\eta_Q M_\Omega)T}{B(\gamma-1)}+\dfrac{(\gamma-1)(L+\eta_Q M_\Omega)}{B(\gamma-1)\Gamma(\gamma)}T^\gamma}{1-\left[\dfrac{(2-\gamma)T}{B(\gamma-1)}+\dfrac{(\gamma-1)T^\gamma}{B(\gamma-1)\Gamma(\gamma)}\right]},\tag{19}$$

$$\frac{(2-\gamma)T}{B(\gamma-1)}+\frac{(\gamma-1)T^\gamma}{B(\gamma-1)\Gamma(\gamma)}<1.$$

其中 $L=\sup\limits_{t\in[0,T]}\|\widetilde{F}(t,0)\|$，则模糊变分不等式系统(1)在$[0,T]$上至少存在一个解.

证明：设

$$B_r(0)=\{x\in(C[0,T],E^n):x<r\},\qquad\overline{B_r(0)}=\{x\in C[0,T]:x\leqslant r\},$$

其中 r 满足不等式(19). 在 $\overline{B_r(0)}$ 上定义两个集值映射 A 和 B：

$$Ax=\left\{u\in C[0,T]:\ u(t)=\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t f(s)\mathrm{d}s+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\ \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}f(s)\mathrm{d}s\right\},\tag{20}$$

$$Bx=\left\{u\in C[0,T]:\ u(t)=\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t g(s)\mathrm{d}s+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\ \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}g(s)\mathrm{d}s\right\},\tag{21}$$

其中 $u\in C[0,T]$，$t\in[0,T]$，$f\in S^1_{\widetilde{F}}(x)$，$g\in S^1_{\Phi}(x)$，$S^1_{\widetilde{F}}(x)$，$S^1_{\Phi}(x)$ 如式(3)，(6)所定义. 由引理 12 可知，$S^1_{\widetilde{F}}(x)$，$S^1_{\Phi}(x)$ 定义是有效的. 由定义 2、式(20)，(21)和引理 8 可知，证明 $A+B$ 有一个不动点等价于找到模糊变分不等式系统(1)的解. 下面证明 $A+B$ 在 $\overline{B_r(0)}$ 中有一个不动点，分五步证明.

1) 证明对任意 $x\in\overline{B_r(0)}$ 有 Ax 是有界闭凸集. 设任意 $x\in\overline{B_r(0)}$，$u\in Ax$，则有 $f\in S^1_{\widetilde{F}}(x)$，使得

$$u(t)=\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t f(s)\mathrm{d}s+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\ \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}f(s)\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,T].$$

根据假设 $H(p_r)$ 和式(18)，有

$$\begin{aligned}\|u(t)\|&\leqslant\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t|f(s)|\mathrm{d}s+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\ \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}|f(s)|\mathrm{d}s\leqslant\\&\left(\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\ \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\right)\int_0^t|f(s)|\mathrm{d}s\leqslant\\&\left(\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\ \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\right)\|f\|_{L^1},\end{aligned}$$

对任意 $t\in[0,T]$，取 t 的上限，有

$$\|u\|_{C[0,T]}\leqslant\left(\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\ \frac{T^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\right)\|f\|_{L^1}.$$

因此，对任意 $x\in\overline{B_r(0)}$，Ax 是有界的.

再设 $\{y_n\}\subset Ax$，$y_n\to y$，则存在一个序列 $\{f_n\}\subset S^1_{\widetilde{F}}(x)$，$f_n\to f$，使得

$$y_n(t)=\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t f_n(s)\mathrm{d}s+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\ \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}f_n(s)\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,T].$$

根据引理 10 可知，对任意 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$，$\widetilde{F}(t,x)$ 是闭的. 若 $\widetilde{F}$ 有闭值，则 $S^1_{\widetilde{F}}(x)$ 是闭的. 所以对 $f\in S^1_{\widetilde{F}}(x)$，有

$$y(t)=\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t f(s)\mathrm{d}s+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\ \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}f(s)\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,T].$$

因此，Ax 对任意 $x\in\overline{B_r(0)}$ 是闭的.

为证明 A 的凸性，设 $u_1,u_2\in Ax$，则有 $f_1,f_2\in S^1_{\widetilde{F}}(x)$，使得

$$u_1(t)=\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t f_1(s)\mathrm{d}s+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\ \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}f_1(s)\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,T],$$

$$u_2(t)=\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t f_2(s)\mathrm{d}s+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\ \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}f_2(s)\mathrm{d}s,\quad t\in[0,T].$$

因此，对任意 $\lambda\in[0,1]$，有

$$\begin{aligned}\lambda u_1(t)+(1-\lambda)u_2(t)=&\lambda\left(\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t f_1(s)\mathrm{d}s+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\ \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}f_1(s)\mathrm{d}s\right)+\\&(1-\lambda)\left(\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t f_2(s)\mathrm{d}s+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\ \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}f_2(s)\mathrm{d}s\right)=\\&\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t(\lambda f_1(s)+(1-\lambda)f_2(s))\mathrm{d}s+\\&\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\ \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}(\lambda f_1(s)+(1-\lambda)f_2(s))\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

根据引理 10 可知，对任意 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$，$\widetilde{F}(t,x)$ 是凸的. 由文献[40]中注 2.1 可知，当且仅当 $S^1_{\widetilde{F}}$ 是凸集时，$\widetilde{F}(t,x)$ 为凸集. 因此，有

$$\lambda f_1(t)+(1-\lambda)f_2(t)\in S^1_{\widetilde{F}}(x).$$

因为 $\lambda u_1(t)+(1-\lambda)u_2(t)\in Ax$，所以 A 在 $\overline{B_r(0)}$ 上有凸值. 综上，$A:\overline{B_r(0)}\to 2^{C[0,T]}$ 是一个非空有界闭凸值的集值映射.

2) 证明 A 是 $\overline{B_r(0)}$ 上的一个集值收缩映射.

对任意 $x_1,x_2\in\overline{B_r(0)}$，$x_1\neq x_2$，若 $H(\psi)$，$H(F_{(\cdot,x)})$ 成立且满足引理 4 的条件，则可得 $\widetilde{F}(t,x_1(t))$ 和 $\widetilde{F}(t,x_2(t))$ 是可测的. 另一方面，对任意 $e_1\in Ax_1$，存在 $f_1\in S^1_{\widetilde{F}}(x)$，使得

$$e_1(t)=\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t f_1(s)\mathrm{d}s+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}f_1(s)\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,T].\tag{22}$$

由式(8)、引理 4 和引理 10 可知，存在一个可测选择 $f_2\in\widetilde{F}(t,x_2(t))$，使得对任意 $t\in[0,T]$，有

$$\|f_1(t)-f_2(t)\|\leqslant H(\widetilde{F}(t,x_1(t)),\widetilde{F}(t,x_2(t)))<\|x_1(t)-x_2(t)\|.\tag{23}$$

根据假设 $H(p_r)$ 和式(18)，可得 $\|f_2(t)\|\leqslant p_r(t)$ 且 $f_2(t)$ 是 Lebesgue 可积的. 设

$$e_2(t)=\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t f_2(s)\mathrm{d}s+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}f_2(s)\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,T],\tag{24}$$

其中 $e_2\in Ax_2$. 此外，由式(22)～(24)有

$$\begin{aligned}\|e_1(t)-e_2(t)\|&=\left\|\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t(f_1(s)-f_2(s))\mathrm{d}s+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}(f_1(s)-f_2(s))\mathrm{d}s\right\|\leqslant\\&\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t\|f_1(s)-f_2(s)\|\mathrm{d}s+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}\|f_1(s)-f_2(s)\|\mathrm{d}s<\\&\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t\|x_1(s)-x_2(s)\|\mathrm{d}s+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}\|x_1(s)-x_2(s)\|\mathrm{d}s\leqslant\\&\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\|x_1-x_2\|_{C[0,T]}+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{t^\gamma}{\Gamma(\gamma)}\|x_1-x_2\|_{C[0,T]}.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\|e_1-e_2\|_{C[0,T]}&=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|e_1(t)-e_2(t)\|\leqslant\\&\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\|x_1-x_2\|_{C[0,T]}+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{T^\gamma}{\Gamma(\gamma)}\|x_1-x_2\|_{C[0,T]}.\end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned}d(e_1,Ax_2)&=\inf_{e_2\in Ax_2}\|e_1-e_2\|_{C[0,T]}\leqslant\\&\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\|x_1-x_2\|_{C[0,T]}+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{T^\gamma}{\Gamma(\gamma)}\|x_1-x_2\|_{C[0,T]}.\end{aligned}$$

因为 $e_1\in Ax_1$ 是任意的，所以有

$$\sup_{e_1\in Ax_1}d(e_1,Ax_2)\leqslant\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\|x_1-x_2\|_{C[0,T]}+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{T^\gamma}{\Gamma(\gamma)}\|x_1-x_2\|_{C[0,T]}.$$

同理可得

$$\sup_{e_2\in Ax_2}d(Ax_1,e_2)\leqslant\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\|x_1-x_2\|_{C[0,T]}+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{T^\gamma}{\Gamma(\gamma)}\|x_1-x_2\|_{C[0,T]}.$$

使用 Hausdorff 度量的定义，可得

$$W(Ax_1,Ax_2)\leqslant\|x_1-x_2\|_{C[0,T]}\left(\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{T^\gamma}{\Gamma(\gamma)}\right).$$

表明当 $\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{T^\gamma}{\Gamma(\gamma)}<1$ 时，A 是 $\overline{B_r(0)}$ 上的一个集值收缩映射.

3) 证明 B 是完全连续的，且在 $\overline{B_r(0)}$ 上有紧凸值.

设 Ω 是 $\overline{B_r(0)}$ 的一个子集. 对任意 $x\in\Omega$ 有 $\|x\|\leqslant r$. 首先需证明 $B(\Omega)$ 是一致有界的. 设有任意 $x\in\Omega$，对一切 $u\in Bx$，存在 $g\in S^1_\Phi(x)$，使得

$$u(t)=\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t g(s)\mathrm{d}s+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}g(s)\mathrm{d}s.$$

若注 2 成立，则可得

$$\| u(t) \leqslant \frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t \| g(s) \| \mathrm{d}s + \frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\,\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t (t-s)^{\gamma-1} \| g(s) \| \mathrm{d}s \leqslant$$

$$\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t \eta_Q M_\Omega \mathrm{d}s + \frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\,\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t (t-s)^{\gamma-1}\eta_Q M_\Omega \mathrm{d}s \leqslant$$

$$\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\eta_Q M_\Omega T + \frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\,\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\eta_Q M_\Omega T^\gamma \leqslant$$

$$\eta_Q M_\Omega\left(\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}T + \frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\,\frac{1}{\Gamma(\gamma)}T^\gamma\right),$$

对任意 $t\in[0,T]$，$x\in\Omega$. 因此，$B(\Omega)$是一致有界的. 下面证明在 $\Omega\in\overline{B_r(0)}$中 $B(\Omega)$是等度连续的. 设 $0\leqslant\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant T$，$x\in\Omega$. 对任意 $y\in Bx$，有

$$y(\tau_i) = \frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^{\tau_i} g(s)\mathrm{d}s + \frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\,\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^{\tau_i}(\tau_i-s)^{\gamma-1}g(s)\mathrm{d}s, \qquad i=1,2,$$

其中 $g(\cdot)\in S_\Phi^1(x)$. 由

$$y(\tau_2)-y(\tau_1) = \frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_{\tau_1}^{\tau_2} g(s)\mathrm{d}s + \frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\,\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\tau_2-s)^{\gamma-1}g(s)\mathrm{d}s + \right.$$

$$\left.\int_0^{\tau_1}((\tau_2-s)^{\gamma-1}-(\tau_1-s)^{\gamma-1})g(s)\mathrm{d}s\right),$$

再由 $(\tau_2-s)^{\gamma-1}\leqslant(\tau_1-s)^{\gamma-1}$ 且 $\gamma-1<0$，可得

$$\| y(\tau_2)-y(\tau_1) \| \leqslant \frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \| g(s) \| \mathrm{d}s + \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\tau_2-s)^{\gamma-1} \| g(s) \| \mathrm{d}s + \right.$$

$$\left.\int_0^{\tau_1} |(\tau_2-s)^{\gamma-1}-(\tau_1-s)^{\gamma-1}| \| g(s) \| \mathrm{d}s\right) \leqslant$$

$$\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\eta_Q M_\Omega(\tau_2-\tau_1) + \frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\,\frac{\eta_Q M_\Omega}{\Gamma(\gamma)} \times$$

$$\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\tau_2-s)^{\gamma-1}\mathrm{d}s + \int_0^{\tau_1}((\tau_2-s)^{\gamma-1}-(\tau_1-s)^{\gamma-1})\mathrm{d}s\right) =$$

$$\frac{\eta_Q M_\Omega(2-\gamma)(\tau_2-\tau_1)}{B(\gamma-1)} + \frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\,\frac{\eta_Q M_\Omega}{\Gamma(\gamma+1)}((\tau_2-\tau_1)^\gamma+\tau_1^\gamma+(\tau_2-\tau_1)^\gamma-\tau_2^\gamma) \leqslant$$

$$\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\eta_Q M_\Omega(\tau_2-\tau_1) + \frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\,\frac{2\eta_Q M_\Omega}{\Gamma(\gamma+1)}(\tau_2-\tau_1)^\gamma,$$

表明在 $\Omega\in\overline{B_r(0)}$中 $B(\Omega)$是等度连续的. 根据 Arzela-Ascoli 定理可知，$B(\Omega)$是相对紧的. 因此，B 在 $\overline{B_r(0)}$上是完全连续的. 与 1)的证明类似，可知 B 在 $\overline{B_r(0)}$上有闭凸值. 此外，若 $\Omega=\{x\}$且 $x\in\overline{B_r(0)}$，则 Bx 也是相对紧的. 所以 Bx 在 $\overline{B_r(0)}$上是紧的. 因此 B 是完全连续的，并且 B 在 $\overline{B_r(0)}$上有紧凸值.

4) 证明 B 有闭图.

设 $\{x_n\}$是 $\overline{B_r(0)}$中的一个序列，使得 $x_n\to x^*$，$y_n\in Bx_n$，$y_n\to y^*$. 需证明 $y^*\in Bx^*$. 由 $y_n\in Bx_n$ 知，存在 $g_n\in S_\Phi^1(x)$，使得

$$y_n(t) = \frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t g_n(s)\mathrm{d}s + \frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\,\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t (t-s)^{\gamma-1}g_n(s)\mathrm{d}s, \qquad t\in[0,T].$$

显然有

$$\| y_n-y^* \|_{C[0,T]}\to 0, \qquad n\to\infty.$$

考虑连续线性算子 Θ：$L^1[0,T]\to C[0,T]$，定义为

$$(\Theta g)(t) = \frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t g(s)\mathrm{d}s + \frac{\gamma}{B(\gamma)\Gamma(\gamma)}\int_0^t (t-s)^{\gamma-1}g(s)\mathrm{d}s.$$

由 Θ 的定义可知 $y_n(t)\in\Theta\circ S_\Phi^1(x_n)$. 由式(17)、引理 11 和引理 12 可知，Φ 是一个有紧值的 Carathéodory 集值映射，且 $S_\Phi^1(x)\neq\varnothing$. 此外，由引理 7 可知 $\Theta\circ S_\Phi^1$ 有一个闭图. 由 $x_n\to x^*$，$y_n\to y^*$ 知，存在 $g^*\in S_\Phi^1(x^*)$，使得 $y^*=\Theta g^*$. 从而 $y^*\in Bx^*$，且 B 有一个闭图.

5) 证明引理8的第二个结论不成立.

设 $u\in\overline{B_r(0)}$ 是当 $\lambda>1$ 时 $\lambda u\in Au+Bu$ 的温和解，且 $\|u\|_{C[0,T]}=r$. 则存在 $f\in S^1_{\tilde{F}}(x)$，$g\in S^1_{\Phi}(x)$，使得

$$\lambda u(t)=\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t[f(s)+g(s)]\mathrm{d}s+\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}[f(s)+g(s)]\mathrm{d}s.$$

由引理9和式(2)，可得

$$\begin{aligned}\|u(t)\|\leqslant\|\lambda u(t)\|\leqslant&\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t\|f(s)\|\mathrm{d}s+\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t\|g(s)\|\mathrm{d}s+\\&\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}\|f(s)\|\mathrm{d}s+\\&\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}\|g(s)\|\mathrm{d}s\leqslant\\&\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t(\|u(s)\|+\|\widetilde{F}(s,0)\|)\mathrm{d}s+\frac{2-\gamma}{B(\gamma-1)}\int_0^t\|\eta_Q M_\Omega\|\mathrm{d}s+\\&\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}(\|u(s)\|+\|\widetilde{F}(s,0)\|)\mathrm{d}s+\\&\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}\|\eta_Q M_\Omega\|\mathrm{d}s\leqslant\\&\frac{T(2-\gamma)}{B(\gamma-1)}(\|u\|_{C[0,T]}+L+\eta_Q M_\Omega)+\\&\frac{\gamma-1}{B(\gamma-1)}\frac{1}{\Gamma(\gamma)}T^\gamma(\|u\|_{C[0,T]}+L+\eta_Q M_\Omega)=\\&\frac{(2-\gamma)(\|u\|_{C[0,T]}+L+\eta_Q M_\Omega)}{B(\gamma-1)}T+\frac{(\gamma-1)(\|u\|_{C[0,T]}+L+\eta_Q M_\Omega)}{B(\gamma-1)\Gamma(\gamma)}T^\gamma,\end{aligned}$$

其中 $L=\sup\limits_{t\in[0,T]}\|\widetilde{F}(t,0)\|$. 取 t 的上限得

$$\|u\|_{C[0,T]}\leqslant\frac{(2-\gamma)(\|u\|_{C[0,T]}+L+\eta_Q M_\Omega)}{B(\gamma-1)}T+\frac{(\gamma-1)(\|u\|_{C[0,T]}+L+\eta_Q M_\Omega)}{B(\gamma-1)\Gamma(\gamma)}T^\gamma,\quad(25)$$

将 $\|u\|_{C[0,T]}=r$ 代入不等式(25)得

$$r\leqslant\frac{\dfrac{(2-\gamma)(L+\eta_Q M_\Omega)}{B(\gamma-1)}T+\dfrac{(\gamma-1)(L+\eta_Q M_\Omega)}{B(\gamma-1)\Gamma(\gamma)}T^\gamma}{1-\left[\dfrac{(2-\gamma)T}{B(\gamma-1)}+\dfrac{(\gamma-1)T^\gamma}{B(\gamma-1)\Gamma(\gamma)}\right]},$$

与式(19)矛盾. 因此，引理8的结论(ii)不成立，结论(i)成立，从而模糊变分不等式系统(1)有一个解 x 在 $([0,T],E^n)$ 上. 证毕.

综上所述，本文研究了模糊 Atangana-Baleanu 分数阶微分包含和模糊混合变分不等式组成的一类动态模糊系统——分数阶微分模糊变分不等式，它可以作为模糊分数微分包含和分数微分变分不等式的一些扩展. 本文结果拓宽了在模糊环境下可研究的问题，适用于发酵动力学的研究，其中 Atangana-Baleanu 分数阶微分方程描述了细胞外代谢物的进化，模糊广义混合变分不等式 $\mathrm{SOL}(K,g(t,x(t))+G(\cdot),\varphi)$ 表明了细胞代谢与其不确定环境之间的联系，证明了系统中所涉及的混合变分不等式的解集是非空有界闭凸的，构造了所需的假设条件，并证明了模糊变分不等式中解的存在性，同时利用 Krasnoselskii 不动点定理研究了该系统解 (x,u) 的存在性.

参 考 文 献

[1] BALEANU D, MACHADO J A T, LUO A C J. Fractional Dynamics and Control [M]. Switzerland: Springer Publishing Company, 2011: 1-218.

[2] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations [M]//North-Holland Mathematics Studies. Amsterdam: Elsevier Science, 2006: 1-459.

[3] LIU Z H, ZENG S D, BAI Y R. Maximum Principles for Multi-term Space-Time Variable-Order Fractional Diffusion Equations and Their Applications [J]. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2016, 19(1): 188-211.

[4] MIGÓRSKI S, NGUYEN V T, ZENG S D. Solvability of Parabolic Variational-Hemivariational Inequalities Involving Space-Fractional Laplacian [J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 364: 124668-1-124668-9.

[5] NAIK P A, ZU J, OWOLABI K M. Modeling the Mechanics of Viral Kinetics under Immune Control during Primary Infection of HIV-1 with Treatment in Fractional Order [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2020, 545: 123816-1-123816-19.

[6] OWOLABI K M, HAMMOUCH Z. Mathematical Modeling and Analysis of Two-Variable System with Noninteger-Order Derivative [J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2019, 29(1): 013145-1-013145-15.

[7] SAMKO S G, KILBAS A A, MARICHEV O I. Fractional Integrals and Derivatives [M]. Yverdon, Switzerland: Gordon and Breach Science Publishers, 1993: 1-976.

[8] ZENG S D, MIGÓRSKI S. A Class of Time-Fractional Hemivariational Inequalities with Application to Frictional Contact Problem [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2018, 56: 34-48.

[9] ATANGANA A, BALEANU D. New Fractional Derivatives with Nonlocal and Non-singular Kernel: Theory and Application to Heat Transfer Model [J/OL]. Thermal Science, (2016-01-20)[2023-05-09]. https://doi.org/10.48550/arxiv.1602.03408.

[10] ATANGANA A, KOCA I. Chaos in a Simple Nonlinear System with Atangana-Baleanu Derivatives with Fractional Order [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2016, 89: 447-454.

[11] ABDELJAWAD T, BALEANU D. Integration by Parts and Its Applications of a New Nonlocal Fractional Derivative with Mittag-Leffler Nonsingular Kernel [J]. Journal of Nonlinear Sciences and Applications, 2017, 10(3): 1098-1107.

[12] AL-REFAI M, HAJJI M A. Analysis of a Fractional Eigenvalue Problem Involving Atangana-Baleanu Fractional Derivative: A Maximum Principle and Applications [J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2019, 29(1): 013135-1-013135-7.

[13] DJIDA J D, MOPHOU G, AREA I. Optimal Control of Diffusion Equation with Fractional Time Derivative with Nonlocal and Nonsingular Mittag-Leffler Kernel [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2019, 182(2): 540-557.

[14] HEYDARI M H, ATANGANA A. A Cardinal Approach for Nonlinear Variable-Order Time Fractional Schrödinger Equation Defined by Atangana-Baleanu-Caputo Derivative [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2019, 128: 339-348.

[15] OWOLABI K M, ATANGANA A. Computational Study of Multi-species Fractional Reaction-Diffusion System with ABC Operator [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2019, 128: 280-289.

[16] CAPUTO M, FABRIZIO M. A New Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel [J]. Progress in Fractional Differentiation & Applications, 2015, 1(2): 73-85.

[17] AL-SALTI N, KARIMOV E, SADARANGANI K. On a Differential Equation with Caputo-Fabrizio Fractional Derivative of Order $1 < \beta \leqslant 2$ and Application to Mass-Spring-Damper System [J]. Progress in Fractional Differentiation and Applications, 2016, 2(4): 257-263.

[18] HRISTOV J. Transient Heat Diffusion with a Non-singular Fading Memory: From the Cattaneo Constitutive Equation with Jeffrey's Kernel to the Caputo-Fabrizio Time-Fractional Derivative [J]. Thermal Science, 2016, 20(2): 757-762.

[19] BALEANU D, FERNANDEZ A. On Some New Properties of Fractional Derivatives with Mittag-Leffler Kernel [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2018, 59: 444-462.

[20] BAĬDOSOV V A. Fuzzy Differential Inclusions [J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1990, 54(1): 8-13.

[21] CHEN M H, FU Y Q, XUE X P, et al. Two-Point Boundary Value Problems of Undamped Uncertain Dynamical Systems [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2008, 159(16): 2077-2089.

[22] HÜLLERMEIER E. An Approach to Modelling and Simulation of Uncertain Dynamical Systems [J].

International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 1997, 5(2): 117-137.

[23] GUO M S, XUE X P, LI R L. Impulsive Functional Differential Inclusions and Fuzzy Population Models [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 138(3): 601-615.

[24] MIN C, HUANG N J, LIU Z B, et al. Existence of Solutions for Implicit Fuzzy Differential Inclusions [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2015, 36(3): 401-416.

[25] MAJUMDAR K K, MAJUMDER D D. Fuzzy Differential Inclusions in Atmospheric and Medical Cybernetics [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 2004, 34(2): 877-887.

[26] LIU Z B, TIAN K Z, WEN G Q, et al. Uniqueness and Continuous Dependence of the Solutions of Fuzzy Delay Differential Inclusions [J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2017, 33(4): 2171-2176.

[27] WU Z B, ZOU Y Z, HUANG N J. A New Class of Global Fractional-Order Projective Dynamical System with an Application [J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2020, 16(1): 37-53.

[28] DAI R, CHEN M H, MORITA H. Fuzzy Differential Equations for Universal Oscillators [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2018, 347: 89-104.

[29] HUNG N V, TAM V M, O'REGAN D. Existence of Solutions for a New Class of Fuzzy Differential Inclusions with Resolvent Operators in Banach Spaces [J]. Computational and Applied Mathematics, 2020, 39(2): 42-1-42-23.

[30] CAPATINA A. Variational Inequalities and Frictional Contact Problems [M]. New York: Springer, 2014: 1-235.

[31] AUSSEL D, DUTTA J. Generalized Nash Equilibrium Problem, Variational Inequality and Quasiconvexity [J]. Operations Research Letters, 2008, 36(4): 461-464.

[32] ZADEH L A. Fuzzy Sets [J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[33] CHANG S S L, ZADEH L A. On Fuzzy Mapping and Control [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1972(1): 30-34.

[34] CHANG S S, LEE G M, LEE B S. Vector Quasivariational Inequalities for Fuzzy Mappings (Ⅱ) [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 102(2): 333-344.

[35] CHANG S S. Existence of Vector Quasi-variational-like Inequalities for Fuzzy Mappings [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2013, 233: 89-95.

[36] HUANG N J, LI J, O'REGAN D. Generalized f-Complementarity Problems in Banach Spaces [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2008, 68(12): 3828-3840.

[37] TANG G J, ZHAO T, WAN Z P, et al. Existence Results of a Perturbed Variational Inequality with a Fuzzy Mapping [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2018, 331: 68-77.

[38] GIANNESSI F. On Minty Variational Principle [C]//New Trends in Mathematical Programming. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998: 93-99.

[39] KENMOCHI N. Nonlinear Operators of Monotone Type in Reflexive Banach Spaces and Nonlinear Perturbations [J]. Hiroshima Mathematical Journal, 1974, 4(1): 229-263.

[40] DJEBALI S, GÓRNIEWICZ L, OUAHAB A. First-Order Periodic Impulsive Semilinear Differential Inclusions: Existence and Structure of Solution Sets [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2010, 52(5/6): 683-714.

(责任编辑: 赵立芹)