

迹逼近可除性关于中心大子代数的遗传性

啜 佩, 赵 霞

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要: 在 C^* -代数无可分条件的情形下, 基于迹逼近可除的定义, 利用中心大子代数的结构性性质, 证明迹逼近可除性关于中心大子代数具有遗传性. 设 A 是一无限维有单位元的单 C^* -代数, B 是 A 的中心大子代数, 若 B 有迹逼近可除性, 则 A 也有迹逼近可除性.

关键词: 迹逼近可除性; C^* -代数; 大子代数; 中心大子代数

中图分类号: O177.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2026)03-0507-04

Hereditary of Tracial Approximate Divisibility for Centrally Large Subalgebras

CHUAI Pei, ZHAO Xia

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Without the separability condition for C^* -algebras, based on the definition of tracial approximate divisibility, and by employing the structural properties of centrally large subalgebras, we prove that tracial approximate divisibility is hereditary with respect to centrally large subalgebras. Let A be an infinite dimensional unital simple C^* -algebra and B be a centrally large subalgebra of A . If B has tracial approximate divisibility, then A also has tracial approximate divisibility.

Keywords: tracial approximate divisibility; C^* -algebra; large subalgebra; centrally large subalgebra

1 引言与主要结果

交叉积 C^* -代数是 C^* -代数与动力系统相结合得到的, 它是由一个 C^* -代数 A 、一个群 G 以及群在 C^* -代数 A 上的作用 h 生成的 C^* -代数, 因此是一类结构较复杂的 C^* -代数. 为研究 Cantor 集上极小同胚交叉积 C^* -代数的性质, Putnam^[1]定义了一个子代数, 通过考察子代数的性质研究交叉积 C^* -代数的性质. 利用子代数研究交叉积 C^* -代数的方法目前已广泛应用于交叉积 C^* -代数性质的研究. 由 Putnam 定义的子代数称为 Putnam 子代数.

Phillips^[2]通过抽象出 Putnam 子代数, 对一般的 C^* -代数提出了大子代数的概念, 并列举了交叉积 C^* -代数中大子代数的实例. 设 X 是一紧致 Hausdorff 空间, $h: X \rightarrow X$ 为一极小同胚, 设 $Y \subset X$ 为一紧致子集, 且对所有 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 有 $h^n(Y) \cap Y = \emptyset$, 则 Y -轨道截断子代数 $C^*(\mathbb{Z}, X, h)_Y$ 是 $C^*(\mathbb{Z}, X, h)$ 的大子代数. 进一步, Archey 等^[3]对大子代数的概念进行强化, 给出了中心大子代数的定

收稿日期: 2025-07-21.

第一作者简介: 啜 佩(2000—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事算子代数和算子理论的研究, E-mail: 15235176859@163.com.

通信作者简介: 赵 霞(1991—), 女, 汉族, 博士, 讲师, 从事算子代数和算子理论的研究, E-mail: xiazhao@cqnu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12201090)、重庆市自然科学基金(批准号: CSTB2022NSCQ-MSX1024)和重庆市教育委员会科学技术研究项目(批准号: KJQN202200535).

义. 因 Y -轨道截断子代数 $C^*(\mathbb{Z}, X, h)_Y$ 相对交叉积 C^* -代数 $C^*(\mathbb{Z}, X, h)$ 结构简单, 故可通过研究 Y -轨道截断子代数 $C^*(\mathbb{Z}, X, h)_Y$ 的性质以及 (中心) 大子代数与包含 C^* -代数的传递性研究交叉积 C^* -代数的性质.

文献[2-3]还证明了 (中心) 大子代数和包含其代数之间的一系列传递性质. Phillips^[2] 得到了对于无限维有单位元的单 C^* -代数, 其大子代数也是单且无限维的; 大子代数有稳定有限或纯无限性质, 则对应的 C^* -代数也有稳定有限或纯无限性质; 从无限维有单位元的单 C^* -代数到其大子代数的迹态空间, 拟迹空间的限制映射为双射, 存在一一对应关系; 无限维有单位元的单的稳定有限 C^* -代数与其大子代数有相同的比较半径. Archey 等^[3] 证明了若无限维可分有单位元的单 C^* -代数包含稳定秩为 1 的中心大子代数, 则其自身稳定秩为 1; 若中心大子代数还具有实秩零, 则对应的 C^* -代数也有实秩零. Zhao 等^[4] 证明了中心大子代数有实秩零, 其包含 C^* -代数也有实秩零, 去掉了中心大子代数稳定秩 1 的条件. Archey 等^[5] 证明了在无限维有单位元且稳定有限的单 C^* -代数的条件下, 包含 C^* -代数迹 $\mathcal{L}$ -稳定与中心大子代数迹 $\mathcal{L}$ -稳定等价; 如果包含 C^* -代数和中心大子代数还是可分核 C^* -代数, 则包含 C^* -代数 $\mathcal{L}$ -稳定与中心大子代数 $\mathcal{L}$ -稳定也等价.

Blackadar 等^[6] 引入了逼近可除的概念, 并证明了单的逼近可除 C^* -代数有良好的非稳定 K -理论性质; Lin^[7] 在对迹秩为 1 的单 C^* -代数研究中, 给出了迹逼近可除性的定义; 文献[8-9]相继给出了迹逼近可除性的两个类似定义; Fu 等^[10] 证明了对于非基本可分的单 C^* -代数, 上述几类迹逼近可除性以及迹 $\mathcal{L}$ -稳定是等价的. 因此, 利用文献[5]的结果可得: 对可分无限维有单位元的单 C^* -代数, 迹逼近可除性关于中心大子代数可以遗传. 本文去掉 C^* -代数可分的条件, 直接从定义出发证明 C^* -代数迹逼近可除性 (TAD)^[10] 可由中心大子代数传递给包含 C^* -代数. 本文主要结果如下:

定理 1 设 A 是一无限维有单位元的单 C^* -代数, B 是 A 的中心大子代数, 若 B 有迹逼近可除性, 则 A 有迹逼近可除性.

2 预备知识

设 A 是一个 C^* -代数, $n \geq 1$. 用 A_+ 表示所有正元组成的集合, A_+^1 表示所有压缩正元组成的集合, $A \otimes M_n$ 表示 C^* -代数 A 与 $M_n(\mathbb{C})$ 的张量积. 设 $a, b \in A_+$, $a \precsim_A b$ 表示 a 在 A 中 Cuntz 小于 b , 即存在一列 $(v_n)_{n=1}^\infty \in A$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n b v_n^* = a$.

定义 1^[2] 设 A 是一个无限维有单位元的单 C^* -代数, $B \subset A$ 是一个有单位元的子代数. 如果对任意的 $m \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$, $\epsilon > 0$, $x \in A_+$ 且 $\|x\| = 1$, $y \in B_+ \setminus \{0\}$, 存在 $c_1, c_2, \dots, c_m \in A$ 和 $g \in B$, 满足下列条件:

- 1) $0 \leq g \leq 1$;
- 2) 对每个 $j=1, 2, \dots, m$, 有 $\|c_j - a_j\| < \epsilon$;
- 3) 对每个 $j=1, 2, \dots, m$, 有 $(1-g)c_j \in B$;
- 4) $g \precsim_{B\mathcal{Y}} y$, $g \precsim_{Ax} x$;
- 5) $\|(1-g)x(1-g)\| > 1 - \epsilon$.

则称 B 是 A 的大子代数. 如果同时也满足下列条件:

- 6) 对每个 $j=1, 2, \dots, m$, 有 $\|ga_j - a_jg\| < \epsilon$.

则称 B 是 A 的中心大子代数.

定义 2^[10] 设 A 是单 C^* -代数. 如果对任意的 $\epsilon > 0$, 任意有限子集 $\mathcal{F} \subset A$, 任意 $s \in A_+ \setminus \{0\}$ 和任意整数 $n \geq 1$, 均存在 $\theta \in A_+^1$ 和 C^* -子代数 $D \otimes M_n \subset A$, 满足下列条件:

- 1) 对每个 $x \in \mathcal{F}$ 有 $\theta x \approx_\epsilon x \theta$;
- 2) 对每个 $x \in \mathcal{F}$ 有 $(1-\theta)x \in_\epsilon D \otimes 1_n$;
- 3) $\theta \precsim_{As} s$.

则称 A 有迹逼近可除性.

注 1 $\theta x \approx_{\epsilon} x\theta$ 即 $\|\theta x - x\theta\| < \epsilon$, $(1-\theta)x \in {}_{\epsilon}D \otimes 1_n$ 即存在 $d \in D$, 使得 $\|(1-\theta)x - d \otimes 1_n\| < \epsilon$.

引理 1^[2] 设 A 是一个 C^* -代数.

1) 如果 $a, b \in A_+$, 则 $a + b \lesssim_A a \oplus b$;

2) 如果 $b \in A_+$, 则当 $a \in \overline{(bAb)}_+$ 时, 有 $a \lesssim_A b$;

3) 如果 $a_1, b_1, a_2, b_2 \in A_+$, 且 $a_1 \lesssim_A b_1, a_2 \lesssim_A b_2$, 则 $a_1 \oplus a_2 \lesssim_A b_1 \oplus b_2$.

引理 2^[3] 设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ 为一连续函数. 对每个 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 C^* -代数 A , 当 $x, y \in A$ 满足 $0 \leq x \leq 1, \|y\| \leq 1, \|xy - yx\| < \delta$ 时, 有 $\|f(x)y - yf(x)\| < \epsilon$.

定义 3^[11] 如果对一个 C^* -代数 A 的每个非零不可约表示 $(\mathcal{H}, \pi)$, 总有 $K(\mathcal{H}) \subset \pi(A)$, 则 A 称为 I 型 C^* -代数.

从而可得一个无限维有单位元的单 C^* -代数不是 I 型 C^* -代数.

引理 3^[2] 设 A 是一个非 I 型单 C^* -代数. 若 $a \in A_+ \setminus \{0\}, n \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, 则存在相互正交的元素 $b_1, b_2, \dots, b_n \in A_+ \setminus \{0\}$, 满足 $b_1 \sim_A \dots \sim_A b_n, b_1 + \dots + b_n \in \overline{aAa}$.

引理 4^[2] 设 A 是一无限维有单位元的单 C^* -代数, B 是 A 的大子代数. 如果 $r \in B_+ \setminus \{0\}, a \in \overline{(rAr)}_+$ 满足 $\|a\| = 1$, 则对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $b \in \overline{(rBr)}_+$, 满足 $\|b\| = 1, b \lesssim_A a, \|ab - b\| < \epsilon$.

3 定理 1 的证明

下面证明定理 1. 先证明 A 具有迹逼近可除性, 即对任意的 $\epsilon > 0$, 任意有限子集 $\mathcal{F} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset A$, 任意 $s \in A_+ \setminus \{0\}$ 和任意整数 $n \geq 1$, 需存在一个 $\theta \in A_+^\perp$ 和 C^* -子代数 $D \otimes M_n \subset A$ 满足迹逼近可除性定义的条件. 总假设任意 $x_i \in \mathcal{F}$ 满足 $\|x_i\| \leq 1 (i=1, 2, \dots, m)$.

设 $f(t) = t^{1/2}$, 由引理 2 可知, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $0 \leq x \leq 1$ 及任意的 $\|y\| \leq 1$, 只要 $\|xy - yx\| < \delta$, 即有 $\|x^{1/2}y - yx^{1/2}\| < \epsilon/7$.

对 $s \in A_+ \setminus \{0\}$, 由引理 3 可知, 存在 $s_1, s_2 \in A_+ \setminus \{0\}$, 使得 $s_1 \sim_{As_2}, s_1 \perp s_2$, 且 $s_1 + s_2 \in \overline{sAs}$. 由引理 1 中 2) 可得 $s_1 + s_2 \lesssim_{As}$. 由引理 4 知, 存在 $c \in B_+ \setminus \{0\}$ 满足 $c \lesssim_{As_2}$.

由于 B 是 A 的中心大子代数, 因此对于 $\mathcal{F} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, \epsilon_1 = \min\{\epsilon/7, \delta\}, s_1/\|s_1\| \in A_+ \setminus \{0\}$, 存在 $g \in B, G = \{y_1, y_2, \dots, y_m\} \subset A$, 使得:

- 1) $0 \leq g \leq 1$;
- 2) 对每个 $i=1, 2, \dots, m$, 有 $\|x_i - y_i\| < \epsilon_1$;
- 3) 对每个 $i=1, 2, \dots, m$, 有 $(1-g)y_i \in B$;
- 4) $g \lesssim_A (s_1/\|s_1\|)$;
- 5) 对每个 $i=1, 2, \dots, m$, 有 $\|gx_i - x_i g\| < \epsilon_1$.

由 5), 对任意的 $x_i \in \mathcal{F} (i=1, 2, \dots, m)$, 有

$$\|(1-g)x_i - x_i(1-g)\| < \epsilon_1. \quad (1)$$

由于 B 有迹逼近可除性, 则对 $\epsilon_1 > 0, \mathcal{F}_0 = \{(1-g)y_i: i=1, 2, \dots, m\} \cup \{g\}, c \in B_+ \setminus \{0\}$, 对任意整数 $n \geq 1$, 存在 $\theta_0 \in B_+^\perp$ 和 C^* -子代数 $D_0 \otimes M_n \subset B$, 使得:

- 1)' 对每个 $i=1, 2, \dots, m$, 有 $\|\theta_0(1-g)y_i - (1-g)y_i\theta_0\| < \epsilon_1, \|\theta_0 g - g\theta_0\| < \epsilon_1$;
- 2)' 对每个 $i=1, 2, \dots, m$, 有 $(1-\theta_0)(1-g)y_i \in {}_{\epsilon_1}D_0 \otimes 1_n, (1-\theta_0)g \in {}_{\epsilon_1}D_0 \otimes 1_n$;
- 3)' $\theta_0 \lesssim_{Ac}$.

结合 2) 和 1)' 有

$$\begin{aligned} \|\theta_0(1-g)x_i - (1-g)x_i\theta_0\| &\leq \|\theta_0(1-g)(x_i - y_i)\| + \|\theta_0(1-g)y_i - (1-g)y_i\theta_0\| + \\ &\quad \|(1-g)(y_i - x_i)\theta_0\| < \epsilon_1 + \epsilon_1 + \epsilon_1 = 3\epsilon_1. \end{aligned} \quad (2)$$

结合 1)' 和 ϵ_1 的选取, 有 $\|\theta_0(1-g) - (1-g)\theta_0\| < \epsilon_1 \leq \delta$, 从而由 δ 的选取可得

$$\|\theta_0(1-g)^{1/2} - (1-g)^{1/2}\theta_0\| < \epsilon/7. \quad (3)$$

由于 $(1-\theta_0)(1-g)y_i \in {}_{\epsilon_1}D_0 \otimes 1_n$, 故存在 $z_i \in D_0 \otimes 1_n$, 使得

$$\| (1 - \theta_0)(1 - g)y_i - z_i \| < \epsilon_1. \quad (4)$$

取 $\theta = g + (1 - g)^{1/2}\theta_0(1 - g)^{1/2}$, 则 $0 \leq \theta \leq g + (1 - g)^{1/2}(1 - g)^{1/2} = 1$, 从而可知 $\theta \in A_+^1$.

结合 5)、式(1)~(3)以及 ϵ_1 的选取, 对任意的 $x_i \in \mathcal{F}(i=1, 2, \dots, m)$, 有

$$\begin{aligned} \| \theta x_i - x_i \theta \| &= \| [g + (1 - g)^{1/2}\theta_0(1 - g)^{1/2}]x_i - x_i[g + (1 - g)^{1/2}\theta_0(1 - g)^{1/2}] \| \leq \\ &\| gx_i - x_i g \| + \| (1 - g)^{1/2}\theta_0(1 - g)^{1/2}x_i - x_i(1 - g)^{1/2}\theta_0(1 - g)^{1/2} \| < \\ &\epsilon_1 + \| (1 - g)^{1/2}\theta_0(1 - g)^{1/2}x_i - \theta_0(1 - g)x_i \| + \| \theta_0(1 - g)x_i - (1 - g)x_i\theta_0 \| + \\ &\| (1 - g)x_i\theta_0 - x_i(1 - g)\theta_0 \| + \| x_i(1 - g)\theta_0 - x_i(1 - g)^{1/2}\theta_0(1 - g)^{1/2} \| < \\ &\epsilon_1 + \| (1 - g)^{1/2}\theta_0 - \theta_0(1 - g)^{1/2} \| \| (1 - g)^{1/2} \| \| x_i \| + 3\epsilon_1 + \\ &\| (1 - g)x_i - x_i(1 - g) \| \| \theta_0 \| + \\ &\| x_i \| \| (1 - g)^{1/2} \| \| (1 - g)^{1/2}\theta_0 - \theta_0(1 - g)^{1/2} \| < \\ &\epsilon_1 + \epsilon/7 + 3\epsilon_1 + \epsilon_1 + \epsilon/7 \leq \epsilon, \end{aligned}$$

即 $\theta x_i \approx_{\epsilon} x_i \theta$.

结合 2)、式(3),(4)以及 ϵ_1 的选取, 对任意的 $x_i \in \mathcal{F}(i=1, 2, \dots, m)$, 有

$$\begin{aligned} \| (1 - \theta)x_i - z_i \| &= \| \{1 - [g + (1 - g)^{1/2}\theta_0(1 - g)^{1/2}]\}x_i - z_i \| \leq \\ &\| [\theta_0(1 - g) - (1 - g)^{1/2}\theta_0(1 - g)^{1/2}]x_i \| + \\ &\| [(1 - g) - \theta_0(1 - g)]x_i - (1 - \theta_0)(1 - g)y_i \| + \\ &\| (1 - \theta_0)(1 - g)y_i - z_i \| < \\ &\| \theta_0(1 - g)^{1/2} - (1 - g)^{1/2}\theta_0 \| \| (1 - g)^{1/2} \| \| x_i \| + \\ &\| (1 - \theta_0) \| \| (1 - g) \| \| x_i - y_i \| + \epsilon_1 < \epsilon/7 + \epsilon_1 + \epsilon_1 < \epsilon, \end{aligned}$$

因此选取 C^* -子代数 $D_0 \otimes M_n \subset B \subset A$, 仍然有 $(1 - \theta)x_i \in {}_i D_0 \otimes 1_n$.

结合 4)和 3')以及引理 1, 对任意的 $s \in A_+ \setminus \{0\}$, 有

$$\theta = g + (1 - g)^{1/2}\theta_0(1 - g)^{1/2} \preceq_{Ag} \oplus (1 - g)^{1/2}\theta_0(1 - g)^{1/2} \preceq_{As_1} \oplus \theta_0 \preceq_{As_1} \oplus c \preceq_{As_1} \oplus s_2 \preceq_{As},$$

即 $\theta \preceq_{As}$. 从而证得 A 有迹逼近可除性. 定理 1 证毕.

参 考 文 献

- [1] PUTNAM I F. The C^* -Algebras Associated with Minimal Homeomorphism of the Cantor Set [J]. Pac J Math, 1989, 136(2): 329-353.
- [2] PHILLIPS N C. Large Subalgebras [EB/OL]. (2024-08-24)[2025-01-23]. <https://arxiv.org/abx/1408.5546>.
- [3] ARCHEY D E, PHILLIPS N C. Permanence of Stable Rank One for Centrally Large Subalgebras and Crossed Products by Minimal Homeomorphisms [J]. J Operat Theor, 2020, 83(2): 353-389.
- [4] ZHAO X, FANG X C. Permanence of Real Rank Zero from a Centrally Large Subalgebra to a C^* -Algebra [J]. P Am Math Soc, 2023, 151(9): 3879-3892.
- [5] ARCHEY D, BUCK J, PHILLIPS N C. Centrally Large Subalgebras and Tracial Absorption [J]. Int Math Res Notices, 2018, 2018(6): 1857-1877.
- [6] BLACKADAR B, KUMJIAN A, RØRDAM M. Approximately Central Matrix Units and the Structure of Noncommutative Tori [J]. K-Theory, 1992, 6(3): 267-284.
- [7] LIN H X. Simple Nuclear C^* -Algebras of Tracial Topological Rank One [J]. J Funct Anal, 2007, 251(2): 601-679.
- [8] ELLIOTT G A, GONG G H, LIN H X, et al. Simple Stably Projectionless C^* -Algebras with Generalized Tracial Rank One [J]. J Noncommut Geom, 2020, 14(1): 251-347.
- [9] FU X L, LIN H X. Nonamenable Simple C^* -Algebras with Tracial Approximation [J]. Forum Math Sigma, 2022, 10: e14-1-e14-50.
- [10] FU X L, LI K, LIN H X. Tracial Approximate Divisibility and Stable Rank One [J]. J Lond Math Soc, 2022, 106(4): 3008-3042.
- [11] MURPHY G J. C^* -Algebras and Operator Theory [M]. San Diego: Academic Press, 1990: 1-286.