doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023411

完全二部图 $K_{4,n}$ 的点被多重集可区别的 E-全染色

郭亚勤, 陈祥恩
(西北师范大学 数学与统计学院, 兰州 730070)

摘要: 利用反证法、色集合事先分配法及构造具体染色等方法, 讨论完全二部图 $K_{4,n}$ 的点被多重集可区别的 E-全染色, 并确定 $K_{4,n}$ 的点被多重集可区别的 E-全色数.

关键词: 完全二部图; E-全染色; E-全色数; 多重集; 色集合
中图分类号: O157.5 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2024)03-0480-07

E-Total Coloring of Complete Bipartite Graphs $K_{4,n}$ Which Are Vertex-Distinguished by Multiple Sets

GUO Yaqin, CHEN Xiang'en
(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: We discussed the E-total coloring of complete bipartite graphs $K_{4,n}$ which were vertex-distinguished by multiple sets by using the method of proof by contradiction, the method of pre-assignment of color sets and the method of constructing specific coloring, and determined E-total chromatic numbers of $K_{4,n}$ which were vertex-distinguished by multiple sets.

Keywords: complete bipartite graph; E-total coloring; E-total chromatic number; multiple set; color set

目前, 关于图的点可区别全染色[1]问题已有很多研究成果. 例如: Chen 等[2]提出了图的点可区别 E-全染色; 文献[3-6]研究了完全二部图的点可区别 E-全染色; 文献[7]综述了任意两个不同顶点(或任意两个相邻顶点, 或任意两个距离不超过 d 的不同顶点)被非多重色集合可区别的一般边染色(分别为 V-全染色、I-全染色、E-全染色、VI-全染色、VE-全染色、IE-全染色、一般全染色)的研究进展; 文献[8-9]探讨了圈与路、轮与扇的点被多重集可区别的 E-全染色, 并给出了圈与路、轮与扇的顶点被多重集可区别的 E-全染色方案, 构造了圈和轮的点被多重集可区别的 E-全染色算法.

本文讨论完全二部图 $K_{4,n}$ 的点被多重集可区别的 E-全染色, 并确定该类图的点被多重集可区别的 E-全色数.

1 预备知识

图 G 的一个 E-全染色是指用若干种颜色对图 G 的顶点和边的一个分配, 使得任意相邻的顶点被分配不同的颜色, 且每条边与关联的点被分配不同的颜色. 设 f 是图 G 的一个 E-全染色, x 是图 G 的任意一个顶点, 在 f 下点 x 的颜色以及与点 x 关联边的颜色构成的(多重)集合称为点 x 在 f 下的(多

收稿日期: 2023-10-07.

第一作者简介: 郭亚勤(1998—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事图论及其应用的研究, E-mail: guoyaqin20220901@163.com. **通信作者简介**: 陈祥恩(1965—), 男, 汉族, 硕士, 教授, 从事图论及其应用的研究, E-mail: chenxe@nwnu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11761064).

重)色集合，记为 $\widetilde{C}_f(x)$ 或者 $\widetilde{C}(x)$. 设 f 是图 G 的 E-全染色，且对任意 $u,v\in V(G)$，当 $u\neq v$ 时，有 $\widetilde{C}(u)\neq\widetilde{C}(v)$，则称 f 是点被多重集可区别的. 对图 G 进行点被多重集可区别的 E-全染色所需最少的颜色数目，称为图 G 的点被多重集可区别的 E-全色数，记为 $\widetilde{\chi}^{e}_{v_t}(G)$，即

$$\widetilde{\chi}^{e}_{v_t}(G)=\min\{k\mid \text{图 } G\text{存在可用颜色有 } k \text{ 种的点被多重集可区别的 E-全染色}\}.$$

本文用 $K_{m,n}$ 表示完全二部图，其中

$$V(K_{m,n})=\{u_1,u_2,\cdots,u_m,v_1,v_2,\cdots,v_n\}=X\cup Y,$$

$$X=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\},\qquad Y=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\},$$

$$E(K_{m,n})=\{u_iv_j\mid i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n\}.$$

定义映射 $h:V\cup E\to\{1,2,\cdots,k\}$，通常情况下在进行染色时，所用的 k 种颜色用 $\{1,2,\cdots,k\}$ 表示. l-E-全染色是指可用的颜色有 l 种的 E-全染色，可用的颜色有 l 种的点被多重集可区别的 E-全染色称为点被多重集可区别的 l-E-全染色，其中 $l\in\{1,2,\cdots,k\}$.

引理 1[10]　从 n 个互不相同元素中取 r 个做成的重复组合个数为 $\binom{n+r-1}{r}$.

从 n 个互不相同元素中取 r 个做成的重复组合称为 r-组合. r-组合也是上述 n 个互不相同元素构成的集合含有 r 个元素的多重子集合，所以 r-组合也称为 r-多重子集或者 r-子集.

引理 2[10]　$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$.

引理 3　若完全二部图 $K_{4,n}$ 存在可用的颜色有 l 种的点被多重集可区别的 E-全染色 g，则 Y 中顶点在 g 下的色集合是 $\{1,2,\cdots,l\}$ 的 5-子集，且至少有一种颜色在该 5-子集中只出现一次.

证明：对 Y 中的任意一点 v，在 g 下点 v 的多重色集合中，给点 v 染的颜色在该多重色集合中只出现一次，所以该多重色集合是 $\{1,2,\cdots,l\}$ 的 5-子集，且至少有一种颜色在该 5-子集中只出现一次.

2　主要结果

定理 1　若 $4\leqslant n\leqslant 16$，则 $\widetilde{\chi}^{e}_{v_t}(K_{4,n})=4$.

证明：先证 $K_{4,n}$ 不存在可用颜色有 3 种的点被多重集可区别的 E-全染色. 假设 $K_{4,n}$ 存在可用的颜色有 3 种的点被多重集可区别的 E-全染色 h，则顶点在 h 下的色集合为 $\{1,2,3\}$ 的 5-子集，且至少有一种颜色在该 5-子集中只出现一次，这样的 5-子集有 $\{1,2,2,3,3\}$，$\{2,1,1,3,3\}$，$\{3,1,1,2,2\}$，$\{1,2,3,3,3\}$，$\{1,3,2,2,2\}$，$\{3,2,1,1,1\}$，$\{1,2,2,2,2\}$，$\{1,3,3,3,3\}$，$\{2,3,3,3,3\}$，$\{2,1,1,1,1\}$，$\{3,1,1,1,1\}$，$\{3,2,2,2,2\}$. 下面分 4 种情形讨论.

情形 1) $h(u_1)=h(u_2)=h(u_3)=h(u_4)$.

不妨设 $h(u_1)=h(u_2)=h(u_3)=h(u_4)=1$. 此时 $K_{4,n}$ 的所有边及 Y 中的所有顶点都不能染颜色 1，故 Y 中的每个顶点在 h 下的色集合是 $\{1,2,3\}$ 的 5-子集，且至少有一种颜色在该 5-子集中只出现一次，这样的 5-子集只有 $\{2,3,3,3,3\}$，$\{3,2,2,2,2\}$. 由于 $4\leqslant n\leqslant 16$，因此这两个 5-子集不能区分 Y 中的 n 个顶点，矛盾.

情形 2) $h(u_1)=h(u_2)=h(u_3)\neq h(u_4)$.

不妨设 $h(u_1)=h(u_2)=h(u_3)=1$，$h(u_4)=2$. 此时 Y 中的所有顶点都不能染颜色 1,2，故 Y 中的每个顶点在 h 下的色集合是 $\{1,2,3\}$ 的 5-子集，且至少有一种颜色在该 5-子集中只出现一次，这样的 5-子集只有 $\{3,1,2,2,2\}$. 由于 $4\leqslant n\leqslant 16$，因此这个 5-子集不能区分 Y 中的 n 个顶点，矛盾.

情形 3) $h(u_1)=h(u_2)\neq h(u_3)=h(u_4)$.

不妨设 $h(u_1)=h(u_2)=1$，$h(u_3)=h(u_4)=2$. 此时 Y 中的所有顶点都不能染颜色 1,2，故 Y 中的每个顶点在 h 下的色集合是 $\{1,2,3\}$ 的 5-子集，且至少有一种颜色在该 5-子集中只出现一次，这样的 5-子集只有 $\{3,1,1,2,2\}$. 由于 $4\leqslant n\leqslant 16$，因此这个 5-子集不能区分 Y 中的 n 个顶点，矛盾.

情形 4) $h(u_1)=h(u_2)\neq h(u_3)\neq h(u_4)$ 且 $h(u_1)=h(u_2)\neq h(u_4)$.

不妨设 $h(u_1)=h(u_2)=1$，$h(u_3)=2$，$h(u_4)=3$. 此时 Y 中的所有顶点都不能染颜色 1,2,3，矛盾.

下证 $K_{4,n}$ 存在可用颜色有 4 种的点被多重集可区别的 E-全染色. 不妨给 X 中的顶点 u_1,u_2,u_3,u_4 分别染颜色 1,1,2,2，下面利用如下 5 行、17 列的矩阵给出具体的染色方案：

$$\begin{pmatrix}0&3&4&3&4&3&3&3&4&4&4&4&4&3&3&4&3\\1&4&2&2&2&4&2&2&2&2&3&3&2&4&2&3&4\\1&2&3&2&3&4&2&2&2&2&3&3&3&4&4&3&4\\2&1&1&1&3&1&4&1&1&3&1&3&3&4&4&3&4\\2&4&1&4&1&1&4&1&1&3&1&1&3&1&4&3&4\end{pmatrix}.$$

先将该矩阵中的第 1 行元素(颜色)除 0 外，依次分配给 Y 中顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_{16}$，将该矩阵的第 1 列元素(颜色)除 0 外，依次分配给 X 中的顶点 u_1,u_2,u_3,u_4，再将第 $(i+1)$ 行、第 $(j+1)$ 列处的元素(颜色)分配给边 u_iv_j $(i=1,2,3,4,\ j=1,2,\cdots,16)$，则第 2 行、第 3 行、第 4 行、第 5 行恰好是 X 中的顶点 u_1,u_2,u_3,u_4 对应的色集合，第 2 列、第 3 列、…、第 17 列恰好是 Y 中顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_{16}$ 对应的色集合.

由该矩阵可得：当 $n=4$ 时，$K_{4,4}$ 中的顶点在 f 下对应的色集合均为 5-子集，X 中的顶点在 f 下对应的 5-子集分别为 $\{1,4,2,2,2\},\{1,2,3,2,3\},\{2,1,1,1,3\},\{2,4,1,4,1\}$，$Y$ 中的顶点在 f 下对应的 5-子集分别为 $\{3,4,2,1,4\},\{4,2,3,1,1\},\{3,2,2,1,4\},\{4,2,3,3,1\}$，在 f 下 X 中所有的 5-子集与 Y 中所有的 5-子集互不相同，故 $\chi^e_{v_t}(K_{4,4})=4$；当 $5\leqslant n\leqslant 16$ 时，X 中的顶点在 f 下对应的色集合均为 $(n+1)$-子集，Y 中的顶点对应的色集合均为 5-子集，因此 X 中的顶点在 f 下对应的色集合与 Y 中的顶点在 f 下对应的色集合互不相同. 按照该矩阵给出的具体染色方案，对 $K_{4,n}$ 中的顶点及所有边进行染色，可得 X 中的顶点在 f 下对应的色集合互不相同，Y 中的顶点在 f 下对应的色集合互不相同，故 $\chi^e_{v_t}(K_{4,n})=4$. 于是可得 $K_{4,n}$ 的点被多重集可区别的 4-E-全染色.

定理 2 若 $\binom{k+2}{5}+\binom{k+1}{4}+\binom{k-2}{3}-3\binom{k-2}{2}-5k+13<n\leqslant\binom{k+3}{5}+\binom{k+2}{4}+\binom{k-1}{3}-3\binom{k-1}{2}-5k+8$，$k\geqslant 5$，则 $\chi^e_{v_t}(K_{4,n})=k$.

证明：先证 $K_{4,n}$ 不存在可用颜色有 $(k-1)$ 种的点被多重集可区别的 E-全染色. 假设 $K_{4,n}$ 存在可用的颜色有 $(k-1)$ 种的点被多重集可区别的 E-全染色 h，下面分 5 种情形讨论.

情形 1) $h(u_1)=h(u_2)=h(u_3)=h(u_4)$.

不妨设 $h(u_1)=h(u_2)=h(u_3)=h(u_4)=1$. 此时 $K_{4,n}$ 的所有边及 Y 中的所有顶点都不能染颜色 1，故 Y 中的每个顶点在 h 下的色集合是 $\{2,3,\cdots,k-1\}$ 的 5-子集，且至少有一种颜色在该 5-子集中只出现一次，这样的 5-子集个数为

$$\binom{k-2}{5}+4\binom{k-2}{4}+6\binom{k-2}{3}+2\binom{k-2}{2}=\binom{k+1}{5}+\binom{k}{4}+\binom{k-2}{3},$$

因此

$$\binom{k+1}{5}+\binom{k}{4}+\binom{k-2}{3}-\left[\binom{k+2}{5}+\binom{k+1}{4}+\binom{k-2}{3}-3\binom{k-2}{2}\right]+5k-13=\frac{-k^4-2k^3+49k^2-70k-96}{24}.$$

当 $k\geqslant 5$ 时，$\frac{-k^4-2k^3+49k^2-70k-96}{24}<0$，从而

$$\binom{k+1}{5}+\binom{k}{4}+\binom{k-2}{3}<\binom{k+2}{5}+\binom{k+1}{4}+\binom{k-2}{3}-3\binom{k-2}{2}-5k+13<n.$$

故所有这样的 5-子集不能区分 Y 中的 n 个顶点，矛盾.

情形 2) $h(u_1)=h(u_2)=h(u_3)\neq h(u_4)$.

不妨设 $h(u_1)=h(u_2)=h(u_3)=1$，$h(u_4)=2$. 此时，对每个 $s,t,r\in\{3,4,\cdots,k-1\}$，$x,y\in\{1,2\}$，$\{x,s,s,s,s\}$，$\{s,x,x,x,x\}$，$\{x,y,y,y,y\}$，$\{s,1,1,1,2\}$，$\{s,1,1,1,t\}$，$\{s,1,1,t,t\}$，$\{s,1,1,2,2\}$，$\{s,1,1,2,t\}$，$\{s,1,1,t,r\}$，$\{x,y,y,s,s\}$，$\{x,s,s,t,t\}$，$\{x,y,s,s,s\}$均不是 Y 中顶点的色集合，故不能成为 Y 中顶点色集合的 5-子集的个数为

$$\binom{2}{1}\binom{k-3}{1}+\binom{2}{1}\binom{k-3}{1}+2\binom{2}{2}+\binom{k-3}{1}+\binom{k-3}{2}+2\binom{k-3}{2}+\binom{k-3}{1}+\binom{k-3}{2}+\binom{k-3}{3}+2\binom{2}{2}\binom{k-3}{1}+\binom{2}{1}\binom{k-3}{2}+\binom{2}{2}\binom{k-3}{1}=\binom{k-1}{3}+4\binom{k-2}{2}+4\binom{k-3}{1}+2,$$

能成为 Y 中顶点色集合的 5-子集的个数为

$$\binom{k-1}{5}+4\binom{k-1}{4}+3\binom{k-1}{3}+3\binom{k-1}{3}+2\binom{k-1}{2}-\binom{k-1}{3}-4\binom{k-2}{2}-4\binom{k-3}{1}-2=\binom{k+2}{5}+\binom{k+1}{4}-4\binom{k-2}{2}-4k+10.$$

因此

$$\binom{k+2}{5}+\binom{k+1}{4}-4\binom{k-2}{2}-4k+10-\left[\binom{k+2}{5}+\binom{k+1}{4}+\binom{k-2}{3}-3\binom{k-2}{2}-5k+13\right]=\frac{-k^3+6k^2-5k-12}{6}.$$

当 $k\geqslant 5$ 时，$\frac{-k^3+6k^2-5k-12}{6}<0$，从而

$$\binom{k+2}{5}+\binom{k+1}{4}-4\binom{k-2}{2}-4k+10<\binom{k+2}{5}+\binom{k+1}{4}+\binom{k-2}{3}-3\binom{k-2}{2}-5k+13<n.$$

故所有这样的 5-子集不能区分 Y 中的 n 个顶点，矛盾.

情形 3) $h(u_1)=h(u_2)\neq h(u_3)=h(u_4)$.

不妨设 $h(u_1)=h(u_2)=1$，$h(u_3)=h(u_4)=2$. 此时，对每个 $s,t\in\{3,4,\cdots,k-1\}$，$x,y\in\{1,2\}$，$\{x,y,y,s,s\}$，$\{x,s,s,t,t\}$，$\{x,y,s,s,s\}$，$\{x,s,y,y,y\}$，$\{s,t,x,x,x\}$，$\{x,s,s,s,s\}$，$\{s,x,x,x,x\}$，$\{x,y,y,y,y\}$ 均不是 Y 中顶点的色集合，故不能成为 Y 中顶点色集合的 5-子集的个数为

$$2\binom{2}{2}\binom{k-3}{1}+\binom{2}{1}\binom{k-3}{2}+\binom{2}{2}\binom{k-3}{1}+2\binom{2}{2}\binom{k-3}{1}+\binom{2}{1}\binom{k-3}{2}+\binom{2}{1}\binom{k-3}{1}+\binom{2}{1}\binom{k-3}{1}+2\binom{2}{2}=4\binom{k-2}{2}+5\binom{k-3}{1}+2,$$

能成为 Y 中顶点色集合的 5-子集的个数为

$$\binom{k-1}{5}+4\binom{k-1}{4}+3\binom{k-1}{3}+3\binom{k-1}{3}+2\binom{k-1}{2}-\left[4\binom{k-2}{2}+5\binom{k-3}{1}+2\right]=\binom{k+2}{5}+\binom{k+1}{4}+\binom{k-2}{3}-3\binom{k-2}{2}-5k+13.$$

当 $k\geqslant 5$ 时，

$$\binom{k+2}{5}+\binom{k+1}{4}+\binom{k-2}{3}-3\binom{k-2}{2}-5k+13<n.$$

故所有这样的5-子集不能区分Y中的n个顶点，矛盾.

情形4) $h(u_1)=h(u_2)\neq h(u_3)\neq h(u_4)$且$h(u_1)=h(u_2)\neq h(u_4)$.

不妨设$h(u_1)=h(u_2)=1$，$h(u_3)=2$，$h(u_4)=3$. 此时，对每个$s,t\in\{4,5,\cdots,k-1\}$，$x,y,z\in\{1,2,3\}$，$\{x,y,z,s,s\}$，$\{x,y,y,z,z\}$，$\{x,y,y,s,s\}$，$\{x,s,s,t,t\}$，$\{2,s,1,1,1\}$，$\{3,s,1,1,1\}$，$\{s,t,1,1,1\}$，$\{x,y,z,z,z\}$，$\{x,y,s,s,s\}$，$\{x,y,y,y,y\}$，$\{x,s,s,s,s\}$，$\{s,x,x,x,x\}$均不是Y中顶点的色集合，故不能成为Y中顶点色集合的5-子集的个数为

$$\binom{3}{3}\binom{k-4}{1}+3\binom{3}{3}+2\binom{3}{2}\binom{k-4}{1}+\binom{3}{1}\binom{k-4}{2}+\binom{k-4}{1}+\binom{k-4}{1}+\binom{k-4}{2}+3\binom{3}{3}+\binom{3}{2}\binom{k-4}{1}+2\binom{3}{2}+\binom{3}{1}\binom{k-4}{1}+\binom{3}{1}\binom{k-4}{1}=4\binom{k-3}{2}+14\binom{k-4}{1}+12,$$

能成为Y中顶点色集合的5-子集的个数为

$$\binom{k-1}{5}+4\binom{k-1}{4}+3\binom{k-1}{3}+3\binom{k-1}{3}+2\binom{k-1}{2}-\left[4\binom{k-3}{2}+14\binom{k-4}{1}+12\right]=\binom{k+2}{5}+\binom{k+1}{4}+\binom{k-1}{3}-4\binom{k-3}{2}-14k+44.$$

因此

$$\binom{k+2}{5}+\binom{k+1}{4}+\binom{k-1}{3}-4\binom{k-3}{2}-14k+44-\left[\binom{k+2}{5}+\binom{k+1}{4}+\binom{k-2}{3}-3\binom{k-2}{2}-5k+13\right]=-5k+19.$$

当$k\geqslant 5$时，$-5k+19<0$，从而

$$\binom{k+2}{5}+\binom{k+1}{4}+\binom{k-1}{3}-4\binom{k-3}{2}-14k+44<\binom{k+2}{5}+\binom{k+1}{4}+\binom{k-2}{3}-3\binom{k-2}{2}-5k+13<n.$$

故所有这样的5-子集不能区分Y中的n个顶点，矛盾.

情形5) $h(u_1),h(u_2),h(u_3),h(u_4)$互不相同.

不妨设$h(u_1)=1$，$h(u_2)=2$，$h(u_3)=3$，$h(u_4)=4$. 此时，对每个$s,t\in\{5,6,\cdots,k-1\}$，$x,y,z,w\in\{1,2,3,4\}$，$\{x,y,z,w,w\}$，$\{x,y,z,s,s\}$，$\{x,y,y,z,z\}$，$\{x,y,y,s,s\}$，$\{x,s,s,t,t\}$，$\{x,y,z,z,z\}$，$\{x,y,s,s,s\}$，$\{x,y,y,y,y\}$，$\{x,s,s,s,s\}$，$\{s,x,x,x,x\}$均不是Y中顶点的色集合，故不能成为Y中顶点色集合的5-子集的个数为

$$4\binom{4}{4}+\binom{4}{3}\binom{k-5}{1}+3\binom{4}{3}+2\binom{4}{2}\binom{k-5}{1}+\binom{4}{1}\binom{k-5}{2}+3\binom{4}{3}+\binom{4}{2}\binom{k-5}{1}+2\binom{4}{2}+\binom{4}{1}\binom{k-5}{1}+\binom{4}{1}\binom{k-5}{1}=4\binom{k-4}{2}+26\binom{k-5}{1}+40.$$

能成为Y中顶点色集合的5-子集的个数为

$$\binom{k-1}{5}+4\binom{k-1}{4}+3\binom{k-1}{3}+3\binom{k-1}{3}+2\binom{k-1}{2}-\left[4\binom{k-4}{2}+26\binom{k-5}{1}+40\right]=\binom{k+2}{5}+\binom{k+1}{4}+\binom{k-1}{3}-4\binom{k-4}{2}-26k+90.$$

因此

$$\binom{k+2}{5}+\binom{k+1}{4}+\binom{k-1}{3}-4\binom{k-4}{2}-26k+90-$$

$$\left[\binom{k+2}{5}+\binom{k+1}{4}+\binom{k-2}{3}-3\binom{k-2}{2}-5k+13\right]=-13k+49.$$

当 $k\geqslant 5$ 时，$-13k+49<0$，从而

$$\binom{k+2}{5}+\binom{k+1}{4}+\binom{k-1}{3}-4\binom{k-4}{2}-26k+90<$$
$$\binom{k+2}{5}+\binom{k+1}{4}+\binom{k-2}{3}-3\binom{k-2}{2}-5k+13<n.$$

故所有这样的 5-子集不能区分 Y 中的 n 个顶点，矛盾.

下证 $K_{4,n}$ 存在可用颜色有 k 种的点被多重集可区别的 E-全染色. 不妨给 X 中的顶点 u_1,u_2,u_3,u_4 分别染颜色 1,1,2,2，则 Y 中的每个顶点在 f 下的色集合是 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的 5-子集，且至少有一种颜色在该 5-子集中只出现一次，这样的 5-子集个数为

$$\binom{k+3}{5}+\binom{k+2}{4}+\binom{k-1}{3}-3\binom{k-1}{2}-5k+8.$$

将这样的 5-子集排成一个序列，固定该序列的第 1,2,3,4,5 个 5-子集分别为 $\{3,4,2,1,4\}$，$\{4,2,3,1,1\}$，$\{3,2,2,1,4\}$，$\{4,2,3,3,1\}$，$\{3,2,2,4,4\}$，令 Y 中的顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 依次对应该序列中的第 1,2,…,n 个 5-子集，当 $j=6,7\cdots,n$ 时，染色方案如下：

当 v_j 对应的 5-子集形如 $\{s,t,r,p,q\}$，$s,t,r,p,q\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且 s,t,r,p,q 互异时，用颜色 s,t,r,p,q 分别染点 v_j 和边 $u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j$；当 v_j 对应的 5-子集形如 $\{s,1,2,t,r\}$，$s,t,r\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且 s,t,r 互异时，用颜色 $s,1,2,t,r$ 分别染点 v_j 和边 $u_4v_j,u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j$；当 v_j 对应的 5-子集形如 $\{s,t,r,p,1\}$，$s,t,r,p\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且 s,t,r,p 互异时，用颜色 $s,t,r,p,1$ 分别染点 v_j 和边 $u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j$；当 v_j 对应的 5-子集形如 $\{s,t,r,p,2\}$，$s,t,r,p\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且 s,t,r,p 互异时，用颜色 $s,t,r,p,2$ 分别染点 v_j 和边 $u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j,u_1v_j$；当 v_j 对应的 5-子集形如 $\{s,t,r,p,p\}$，$s,t,r,p\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且 s,t,r,p 互异时，用颜色 s,t,r,p,p 分别染点 v_j 和边 $u_1v_j,u_3v_j,u_2v_j,u_4v_j$；当 v_j 对应的 5-子集形如 $\{s,t,r,1,1\}$，$s,t,r\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且 s,t,r 互异时，用颜色 $s,t,r,1,1$ 分别染点 v_j 和边 $u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j$；当 v_j 对应的 5-子集形如 $\{s,t,r,2,2\}$，$s,t,r\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且 s,t,r 互异时，用颜色 $s,t,r,2,2$ 分别染点 v_j 和边 $u_3v_j,u_4v_j,u_1v_j,u_2v_j$；当 v_j 对应的 5-子集形如 $\{s,t,1,r,r\}$，$s,t,r\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且 s,t,r 互异时，用颜色 $s,t,1,r,r$ 分别染点 v_j 和边 $u_1v_j,u_4v_j,u_3v_j,u_2v_j$；当 v_j 对应的 5-子集形如 $\{s,t,2,r,r\}$，$s,t,r\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且 s,t,r 互异时，用颜色 $s,t,2,r,r$ 分别染点 v_j 和边 $u_3v_j,u_1v_j,u_2v_j,u_4v_j$；当 v_j 对应的 5-子集形如 $\{s,t,1,2,2\}$，$s,t\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且 s,t 互异时，用颜色 $s,t,1,2,2$ 分别染点 v_j 和边 $u_3v_j,u_4v_j,u_1v_j,u_2v_j$；当 v_j 对应的 5-子集形如 $\{s,t,2,1,1\}$，$s,t\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且 s,t 互异时，用颜色 $s,t,2,1,1$ 分别染点 v_j 和边 $u_2v_j,u_1v_j,u_3v_j,u_4v_j$；当 v_j 对应的 5-子集形如 $\{s,1,2,t,t\}$，$s,t\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且 s,t 互异时，用颜色 $s,1,2,t,t$ 分别染点 v_j 和边 $u_4v_j,u_1v_j,u_3v_j,u_2v_j$；当 v_j 对应的 5-子集形如 $\{s,t,t,r,r\}$，$s,t,r\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且 s,t,r 互异时，用颜色 s,t,t,r,r 分别染点 v_j 和边 $u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j$；当 v_j 对应的 5-子集形如 $\{s,t,t,1,1\}$，$s,t\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且 s,t 互异时，用颜色 $s,t,t,1,1$ 分别染点 v_j 和边 $u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j$；当 v_j 对应的 5-子集形如 $\{s,t,t,2,2\}$，$s,t\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且 s,t 互异时，用颜色 $s,t,t,2,2$ 分别染点 v_j 和边 $u_3v_j,u_4v_j,u_1v_j,u_2v_j$；当 v_j 对应的 5-子集形如 $\{s,1,1,2,2\}$，$s\in\{3,4,\cdots,k\}$ 时，用颜色 $s,1,1,2,2$ 分别染点 v_j 和边 $u_4v_j,u_3v_j,u_2v_j,u_1v_j$；当 v_j 对应的 5-子集形如 $\{s,t,r,r,r\}$，$s,t,r\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且 s,t,r 互异时，用颜色 s,t,r,r,r 分别染点 v_j 和边 $u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j$；当 v_j 对应的 5-子集形如 $\{s,1,t,t,t\}$，$s,t\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且 s,t 互异时，用颜色 $s,1,t,t,t$ 分别染点 v_j 和边 $u_4v_j,u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j$；当 v_j 对应的 5-子集形如 $\{s,2,t,t,t\}$，$s,t\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且 s,t 互异时，用颜色 $s,2,t,t,t$ 分别染点 v_j 和边 $u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j$；当 v_j 对应的 5-子集形如 $\{s,t,t,t,t\}$，$s,t\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且 s,t 互异时，用颜色 s,t,t,t,t 分别染点 v_j 和边 $u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j$.

此时，Y 中每个点的色集合刚好是事先对应于该点的色集合，Y 中不同顶点对应的色集合不同，

所以 Y 中任意 n 个点彼此可区别. 当 $n\geqslant 5$ 时，X 中点的色集合与 Y 中点的色集合的元素个数不同，因此 X 中每个点与 Y 中每个点可区别.

下面证明 $\widetilde{C}(u_1),\widetilde{C}(u_2),\widetilde{C}(u_3),\widetilde{C}(u_4)$ 互不相等. 由染色方案可知，$\widetilde{C}(u_3)$ 和 $\widetilde{C}(u_4)$ 中都只含有一个元素 2(因为 X 中顶点 u_3 和 u_4 染颜色 2，所以这两个点所关联的边的颜色不能是 2). 当 $k\geqslant 5$ 时，$\widetilde{C}(u_1)$ 和 $\widetilde{C}(u_2)$ 中所含元素 2 的个数大于 1，故 $\widetilde{C}(u_1)\neq\widetilde{C}(u_3)$，$\widetilde{C}(u_1)\neq\widetilde{C}(u_4)$，$\widetilde{C}(u_2)\neq\widetilde{C}(u_3)$，$\widetilde{C}(u_2)\neq\widetilde{C}(u_4)$. 令 $\widetilde{C}(u_i)=\{f(u_i),f(u_iv_1),\cdots,f(u_iv_n)\}$，$i=1,2,3,4$. 若 $\widetilde{C}(u_1)=\widetilde{C}(u_2)$，只需交换颜色 $f(u_1v_1)$ 和 $f(u_2v_1)$，此时 Y 中顶点 v_1 及其他顶点 v_j 对应的色集合都不变，且 $\widetilde{C}(u_1)$ 中多了一种颜色 $f(u_2v_1)$，少了一种颜色 $f(u_1v_1)$，同时 $\widetilde{C}(u_2)$ 中多了一种颜色 $f(u_1v_1)$，少了一种颜色 $f(u_2v_1)$，即可得 $\widetilde{C}(u_1)\neq\widetilde{C}(u_2)$. 若 $\widetilde{C}(u_3)=\widetilde{C}(u_4)$，只需交换颜色 $f(u_3v_1)$ 和 $f(u_4v_1)$，此时 Y 中顶点 v_1 及其他顶点 v_j 对应的色集合都不变，且 $\widetilde{C}(u_3)$ 中多了一种颜色 $f(u_4v_1)$，少了一种颜色 $f(u_3v_1)$，同时 $\widetilde{C}(u_4)$ 中多了一种颜色 $f(u_3v_1)$，少了一种颜色 $f(u_4v_1)$，即可得 $\widetilde{C}(u_3)\neq\widetilde{C}(u_4)$. 于是可知 $\widetilde{C}(u_1),\widetilde{C}(u_2),\widetilde{C}(u_3),\widetilde{C}(u_4)$ 互不相等. 证毕.

参 考 文 献

[1] ZHANG Z F, QIU P X, LI J W, et al. Vertex-Distinguishing Total Coloring of Graphs [J]. Ars Combinatoria, 2008, 87: 33-45.

[2] CHEN X E, ZU Y, ZHANG Z F. Vertex-Distinguishing E-Total Colorings of Graphs [J]. Arab J Sci Eng, 2011, 36: 1485-1500.

[3] 李世玲，陈祥恩，王治文. 完全二部图 $K_{3,n}$($3\leqslant n\leqslant 17$)的点可区别 E-全染色 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2015，53(6)：1171-1176.（LI S L, CHEN X E, WANG Z W. Vertex-Distinguishing E-Total Coloring of Complete Bipartite Graph $K_{3,n}$ with $3\leqslant n\leqslant 17$ [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2015, 53(6): 1171-1176.）

[4] 李世玲，陈祥恩，王治文. 完全二部图 $K_{3,n}$($n\geqslant 18$)的点可区别 E-全染色 [J]. 山东大学学报(理学版)，2016，51(4)：68-71.（LI S L, CHEN X E, WANG Z W. Vertex-Distinguishing E-Total Coloring of Complete Bipartite Graph $K_{3,n}$ with $n\geqslant 18$ [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2016, 51(4): 68-71.）

[5] 师志凤，陈祥恩，王治文. 完全二部图 $K_{6,n}$($6\leqslant n\leqslant 38$)的点可区别 E-全染色 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2018，56(4)：845-852.（SHI Z F, CHEN X E, WANG Z W. Vertex-Distinguishing E-Total Coloring of Complete Bipartite Graph $K_{6,n}$ with $6\leqslant n\leqslant 38$ [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2018, 56(4): 845-852.）

[6] 包丽娅，陈祥恩，王治文. 完全二部图 $K_{10,n}$($10\leqslant n\leqslant 90$)的点可区别 E-全染色 [J]. 山东大学学报(理学版)，2018，53(12)：23-30.（BAO L Y, CHEN X E, WANG Z W. Vertex-Distinguishing E-Total Coloring of Complete Bipartite Graph $K_{10,n}$ with $10\leqslant n\leqslant 90$ [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2018, 53(12): 23-30.）

[7] 陈祥恩. 某些顶点对被非多重色集合所区别的未必正常染色的综述 [J]. 广州大学学报(自然科学版)，2019，18(4)：50-59.（CHEN X E. A Survey on Not Necessarily Proper Colorings under Which Certain Pairs of Vertices Are Distinguished by Nonmultiple Color Sets [J]. Journal of Guangzhou University (Natural Science Edition), 2019, 18(4): 50-59.）

[8] 陈祥恩，曹静. 圈与路的点被多重集可区别的 E-全染色 [J]. 华东师范大学学报(自然科学版)，2024，2024(2)：14-22.（CHEN X E, CAO J. E-Total Coloring of Cycles and Paths Which Are Vertex-Distinguished by Multiple Sets [J]. Journal of East China Normal University (Natural Science), 2024, 2024(2): 14-22.）

[9] 曹静，陈祥恩. 轮与扇的点被多重集可区别的 E-全染色 [J]. 山东大学学报(理学版)，2024，59(2)：38-46.（CAO J, CHEN X E. E-Total Coloring of Wheels and Fans Vertex-Distinguished by Multiple Sets [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2024, 59(2): 38-46.）

[10] 邵嘉裕. 组合数学 [M]. 上海：同济大学出版社，1990：5-14.（SHAO J Y. Combinatorial Mathematics [M]. Shanghai: Tongji University Press, 1990: 5-14.）

（责任编辑：李 琦）