

基于数据驱动的输电线舞动模型的重建

刘小会^{1,2,3,4}, 陈黎兵³, 杨军^{1,2}, 赵建坤^{1,2}, 安东^{1,2}

(1. 内蒙古电力(集团)有限责任公司 内蒙古电力科学研究院分公司, 010020 呼和浩特;

2. 内蒙古自治区高电压与绝缘技术企业重点实验室, 010020 呼和浩特;

3. 重庆交通大学土木工程学院, 400074 重庆;

4. 重庆交通大学省部共建山区桥梁及隧道工程国家重点实验室, 400074 重庆)

摘 要:为了保证电力系统在风荷载作用下安全稳定运营,建立准确的输电线舞动模型面临巨大挑战。本研究以复杂线路中的覆冰四分裂导线为研究对象,采用数据驱动稀疏识别算法重建舞动模型。首先,推导了覆冰四分裂导线舞动的理论模型;然后,基于非线性动力学稀疏识别(SINDy)算法重建舞动模型;最后,通过具体算例来研究不同噪声幅值下舞动模型的重建精度。结果表明:在无噪声测量数据下,SINDy算法准确地恢复了舞动模型的结构及参数;通过对舞动模型进行灵敏度分析,发现随着噪声幅值的增大,三次项的系数均值误差较一次项大;在噪声幅值为0.1以内时,重建模型位移时程的决定系数在0.93以上,其中噪声幅值为0.05时,决定系数高达0.97。此外,该算法仅需少量数据即可达到很高的模型重建精度。研究成果对验证防舞设计及制定防舞计划具有重要作用。

关键词:覆冰导线;数据驱动;稀疏识别;舞动方程;四分裂

中图分类号:O322

文献标志码:A

DOI:10.11776/j.issn.1000-4939.2026.01.006

文章编号:1000-4939(2026)01-0068-11

CSTR:32414.14.cjam.issn.1000-4939.2026.01.006

Data-driven reconstruction of transmission line galloping model

LIU Xiaohui^{1,2,3,4}, CHEN Libing³, YANG Jun^{1,2}, ZHAO Jiankun^{1,2}, AN Dong^{1,2}

(1. Inner Mongolia Power (Group) Co., Ltd., Inner Mongolia Power Research Institute Branch, 010020 Hohhot, China;

2. Inner Mongolia Enterprise Key Laboratory of High Voltage and Insulation Technology, 010020 Hohhot, China;

3. School of Civil Engineering, Chongqing Jiaotong University, 400074 Chongqing, China; 4. State Key Laboratory of Bridge and Tunnel Engineering in Mountain Areas, Chongqing Jiaotong University, 400074 Chongqing, China)

Abstract: To ensure the safe and stable operation of the power system under the action of wind loads, it is a huge challenge to establish an accurate transmission line galloping model. In this paper, taking the iced quad bundle conductors in complex lines as the research object, a data-driven sparse identification algorithm is used to reconstruct the galloping model. First, the theoretical galloping model of the iced quad bundle conductors is derived. Then, the galloping model is reconstructed based on the sparse identifica-

收稿日期:2023-05-15

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 51308570);重庆市自然科学基金资助项目(No. cstc2021jcyj-msxmX0166)

通信作者:陈黎兵。E-mail:libingchen1222@outlook.com

引用格式:刘小会,陈黎兵,杨军,等. 基于数据驱动的输电线舞动模型的重建[J]. 应用力学学报, 2026, 43(1): 68-78.

LIU Xiaohui, CHEN Libing, YANG Jun, et al. Data-driven reconstruction of transmission line galloping model[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2026, 43(1): 68-78.

tion of nonlinear dynamics (SINDy) algorithm. Last, the reconstruction accuracy of the galloping model under different noise amplitudes is studied through specific examples. The results show that under the noise-free measurement data, the SINDy algorithm can accurately restore the structure and parameters of the galloping model. By sensitivity analysis of the galloping model, with the increase of the noise amplitude, the coefficient mean error of the cubic term is larger than the coefficient mean error of the first term. When the noise amplitude is within 0.1, the determination coefficient of the displacement time history of the reconstructed model is above 0.93. Meanwhile, when the noise amplitude is 0.05, the determination coefficient is as high as 0.97. Furthermore, the algorithm achieves high model reconstruction accuracy with only a small amount of data. The research results play an important role in verifying anti-galloping design and formulating anti-galloping plans.

Key words: iced conductor; data-driven; sparse identification; galloping equation; quad bundle

覆冰输电线路舞动问题一直以来备受关注,其本质属于自激振动,通常表现出低频、大振幅的几何非线性特征^[1-2]。电力工程中输电线种类众多,其中四分裂导线最为常见,也是较复杂线路之一,因此这种复杂线路将导致更严重的舞动问题。针对舞动现象的发生,最早一批学者先后提出了垂直舞动机理^[3]、扭转舞动机理^[4]以及偏心惯性耦合失稳机理^[5],这为后续的舞动研究奠定了坚实的基础。由于气候环境的随机性、恶劣性,很难准确地评估实际覆冰形状以及线路运行状况,对于实际的输电线路得到其准确的舞动控制方程十分困难,这是迄今为止没有解决的难点。

气动不稳定性是覆冰输电线路舞动的重要影响因素之一,相应的气动力系数成为了舞动建模的关键参数。现有的研究主要集中在风洞试验和数值模拟。CAI等^[6]将数值模拟和风洞试验的空气动力系数进行比较,证明了通过数值模拟确定的空气动力系数可以用来研究输电线的舞动行为以及防舞技术。LU等^[7]通过风洞试验研究了月牙形和D形导线的气动系数,并依据此参数模拟了覆冰四分裂导线的舞动行为,其计算结果与实际情况相符,此结果对于预测不同天气条件下的舞动幅值具有重要意义。MATSUMIYA等^[8]基于气动力测量试验结果,使用可变气动系数来评估四分裂导线三自由度舞动的非定常气动力。近些年来,许多学者对智慧输电线路展开了研究。XIONG等^[9]提出了基于思维进化算法优化的覆冰厚度智能预测方法,使用该方法得到的预测模型可以较准确地预测输电线路的覆冰厚度。张博等^[10]提出一种基于MEMS六轴惯性传感器的输电线路舞动轨迹监测算法,该算法对输电线路舞动轨迹可达到准确监测。ZOU等^[11]开发了

一种时隙优化技术,以实现输电线路舞动的精确跟踪并且该技术还应用于高频光纤光栅加速度传感器的开发,通过实验结果证实了该传感器具有高灵敏度以及准确的监测结果。

覆冰四分裂导线舞动建模属于复杂的非线性动力系统建模,由于存在各种不确定性、部分参数无法测量和扰动等因素,系统参数无法准确确定。目前的舞动研究大多采用理想化建模,与实际模型相比具有一定偏差^[12]。在大数据、先进的机器学习算法以及高性能的计算硬件的支持下,数据驱动的复杂系统建模得到迅速发展。基于实时舞动数据重建的输电线路舞动模型对于验证防舞设计和制定防舞计划至关重要。曹海林等^[13]采用弧长约束下基于分布式角度信息的舞动曲线重建方案,沿输电线路布置许多倾角传感器,利用传感器给出的数据,建立了倾角与弧长的函数表达式,进而重构原始舞动曲线。谢东升等^[14]利用输电线特征对图像序列中的特征值进行提取及匹配,研究出一种基于最小二乘法的自适应重建模型,最终实现输电线的三维舞动重建。WU等^[15]提出了一种使用条件生成对抗网络(generative adversarial networks, GAN)的新型曲线重建方法CR-CGAN,用于完全合成输电线路舞动曲线。上述分析的数据驱动建模方法需要海量数据,或是基于黑箱模型,缺乏可解释性。

为此,学者们对稀疏回归模型展开深入研究。TIBSHIRANI^[16]首次提出LASSO(least absolute shrinkage and selection operator)方法,并将该方法应用在Cox模型的稀疏识别中。BRUNTON等^[17]提出非线性动力学稀疏识别(sparse identification of nonlinear dynamics, SINDy)算法,可以在没有先验知识的低限制数据中识别系统模型,并具有可解释性。

该算法从候选函数库中选择一组线性和非线性项,使所需模型适合给定数据集,然后算法为每个候选项分配系数,通常对系统动力学没有贡献的项分配零系数,为活跃项分配非零系数。生成的稀疏回归模型是在最小二乘法的基础上增加了参数正则化,从而达到稀疏化的目的。经典 SINDy 及其变种方法在其他领域得到了广泛应用。MANGAN 等^[18]提出了隐式 SINDy 方法,在混合非线性库的零空间中识别出方程的状态项和派生项,并通过该方法成功地推导出 3 种典型的生物学模型。QUADE 等^[19]基于 SINDy 框架引入了变化的简约性概念,与重新表征模型的替代方法相比,在面对许多突然的系统变化时,该方法可实现更快的模型恢复,且具有更高的噪声鲁棒性。LI 等^[20]提出了一种 SINDy 的变种方法,用于识别捕捉桥梁涡激振动事件的简约时变空气动力学系统,以揭示在整个涡激振动事件期间风桥系统的空气动力学随时间的演变。SHEA 等^[21]开发了 SINDy-BVP 框架以处理空间相关的边界值问题,通过数据驱动模型来推断描述系统异质物理量的控制

运算符和空间相关参数。

本研究以复杂线路中的覆冰四分裂导线为研究对象,首先建立覆冰四分裂导线舞动的理论模型,然后采用 SINDy 算法重建舞动模型,研究无噪声数据下舞动方程的参数恢复效果,并进行灵敏度分析,最后分析不同噪声水平对模型重建精度的影响,以期验证输电线路防舞设计奠定理论基础。

1 建立理论模型

1.1 非线性振动方程

首先建立图 1 所示的覆冰四分裂导线力学模型。 X, Y, Z 为分别描述轴向、竖向及水平的整体坐标系。 x, y, z 为局部坐标系,且原点经过参考曲线。 U, V, W 分别为参考曲线上任意一点在轴向、竖向及水平方向上的整体位移。本研究仅研究竖向-水平耦合舞动模式,因此不考虑导线扭转方向上的舞动方程。

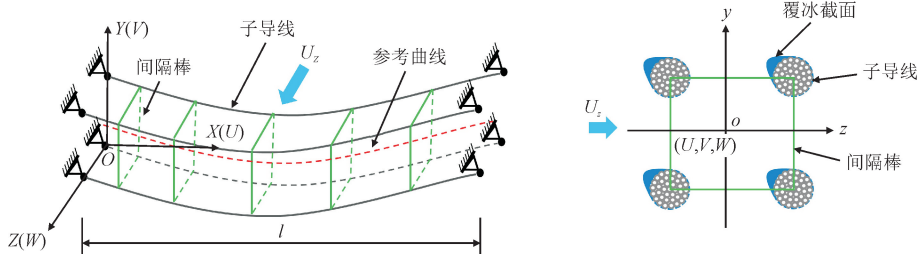


图 1 覆冰四分裂导线模型

Fig. 1 Iced quad bundle conductors model

由于导线横截面上任意一点位移及第 i 根导线中心点位移均与参考曲线位移一致,因此仅用参考曲线的位移描述即可。根据 Hamilton 变分准则可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T_k - V_e) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_d dt = 0 \quad (1)$$

式中: T_k 为系统的动能; V_e 为系统的势能; W_d 为非保守力做功。实际工程中的导线跨径远大于其直径,因此导线的轴线振动很微弱,当忽略导线轴向惯性效应可将系统动能、势能分别表示为

$$T_k = \frac{1}{2} \int_0^l M(\dot{V}^2 + \dot{W}^2) ds + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_{sk} [\dot{V}^2(s_k, t) + \dot{W}^2(s_k, t)] \quad (2a)$$

$$V_e = \sum_{i=1}^4 \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} EA \varepsilon_s^2 + T \varepsilon_s + \frac{1}{2} EI \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \right)^2 \right] + mgV \right\} ds \quad (2b)$$

式中:圆点表示对时间 t 求导; g 为重力加速度; l 为输电线的跨度; M 为四分裂导线单位长度的质量; m 为单根裸导线单位长度的质量; m_{sk} 为第 k 根间隔棒的质量; s_k 对应第 k 根间隔棒在参考曲线上的弧坐标; A 为单根裸导线横截面面积; n 为间隔棒数目; EA 为导线抗拉刚度; EI 为导线抗弯刚度; T 为导线静张力; ε_s 为导线的轴向应变^[22],可表示为

$$\varepsilon_s = \frac{\partial Y}{\partial s} \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)^2 \right] \quad (3)$$

式中, Y 为覆冰导线初始形态的悬链线,且 $Y = mg(x - l)x/2T$ 。

变分后的系统非保守力做功可表示为

$$\delta W_d = \int_0^l [(F_Y \delta V + F_Z \delta W) - (c_Y \dot{V} \delta V + c_Z \dot{W} \delta W)] ds \quad (4)$$

式中: F_Y, F_Z 分别为单位长度的覆冰四分裂导线在

竖向及水平方向上的气动荷载; c_Y 、 c_Z 分别为导线在竖向及水平方向上的阻尼系数。

考虑到输电线舞动主要以低阶模态为主,本研究仅以第一阶模态位移为主的舞动^[23]为研究对象。因此 V 、 W 可分别表示为

$$\begin{cases} V(s, t) = \phi_v(s) q_v(t) \\ W(s, t) = \phi_w(s) q_w(t) \end{cases} \quad (5)$$

式中: $\phi_v(s)$ 、 $\phi_w(s)$ 分别为竖向及水平方向上的模态函数; $q_v(t)$ 、 $q_w(t)$ 分别为竖向及水平方向上的振动函数,其中模态函数^[24]可由导线的位移边界条件和自由振动控制方程求得

$$\begin{cases} \phi_v(s) = R_1 \left[1 - \cos\left(\frac{\bar{\omega}}{l}s\right) - \tan\left(\frac{\bar{\omega}}{2}\right) \sin\left(\frac{\bar{\omega}}{l}s\right) \right] \\ \phi_w(s) = \sin(\pi s/l) \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\int_0^l \phi_v^2 ds = 1$; R_1 可通过归一化求得; $\bar{\omega} = \sqrt{m/H} \omega l$, $\bar{\omega}$ 为无量纲后的频率; ω 为圆频率,因式(6)为正对称模态,故 $\bar{\omega}$ 可由超越方程(7)求得

$$\tan\left(\frac{\bar{\omega}}{2}\right) = \frac{\bar{\omega}}{2} - \frac{\bar{\omega}^3}{2\lambda^2} \quad (7)$$

式中, $\lambda^2 = \frac{EA(mgl)}{H^2}$, 其中 H 为初始静态张力 T 的水平分量, λ^2 是与垂度相关的 Irvine 参数^[24]。

将式(2)~式(5)分别代入式(1),结合 Galerkin 法在方程两端同乘模态函数,并沿跨度积分可得

$$\begin{cases} \vartheta_1 \ddot{q}_v + \vartheta_2 \dot{q}_v + \vartheta_3 q_v + \vartheta_4 q_v^2 + \vartheta_5 q_w^2 + \vartheta_6 q_v^3 + \\ \vartheta_7 q_v q_w^2 + \vartheta_8 = 0 \\ \vartheta_1 \ddot{q}_w + \vartheta_2 \dot{q}_w + \vartheta_3 q_w + \vartheta_4 q_v q_w + \vartheta_5 q_w^3 + \vartheta_6 q_v^2 q_w + \vartheta_7 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

式中,线性与非线性系数的具体表达式分别为

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= - \left[\int_0^l M \phi_v^2 ds + \sum_{k=1}^n m_{sk} \phi_v^2(s_k) \right], \\ \vartheta_1 &= - \left[\int_0^l M \phi_w^2 ds + \sum_{k=1}^n m_{sk} \phi_w^2(s_k) \right], \quad \vartheta_8 = \int_0^l F_Y \phi_v ds, \\ \vartheta_2 &= - \int_0^l c_Y \phi_v^2 ds, \quad \vartheta_2 = - \int_0^l c_Z \phi_w^2 ds, \\ \vartheta_7 &= \sum_{i=1}^4 \int_0^l \left\{ \phi_v \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{2} EA \frac{\partial \phi_v}{\partial s} \left(\frac{\partial \phi_w}{\partial s} \right)^2 \right] \right\}_i ds, \\ \vartheta_7 &= \int_0^l F_Z \phi_w ds, \\ \vartheta_3 &= \sum_{i=1}^4 \int_0^l \left\{ \phi_v \frac{\partial}{\partial s} \left[EA \frac{\partial \phi_v}{\partial s} \left(\frac{\partial Y}{\partial s} \right)^2 + H \frac{\partial \phi_v}{\partial s} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. EI \left(\frac{\partial^3 \phi_v}{\partial s^3} \right) \right\}_i ds,$$

$$\vartheta_3 = \sum_{i=1}^4 \int_0^l \left\{ \phi_w \frac{\partial}{\partial s} \left[H \frac{\partial \phi_w}{\partial s} - EI \left(\frac{\partial^3 \phi_w}{\partial s^3} \right) \right] \right\}_i ds,$$

$$\vartheta_4 = \sum_{i=1}^4 \int_0^l \left\{ \phi_v \frac{\partial}{\partial s} \left\{ EA \left[\frac{1}{2} \frac{\partial Y}{\partial s} \left(\frac{\partial \phi_v}{\partial s} \right)^2 + \frac{\partial Y}{\partial s} \left(\frac{\partial \phi_w}{\partial s} \right)^2 \right] \right\} \right\}_i ds,$$

$$\vartheta_4 = \sum_{i=1}^4 \int_0^l \left\{ \phi_w \frac{\partial}{\partial s} \left[EA \left(\frac{\partial Y}{\partial s} \frac{\partial \phi_v}{\partial s} \frac{\partial \phi_w}{\partial s} \right) \right] \right\}_i ds,$$

$$\vartheta_5 = \sum_{i=1}^4 \int_0^l \left\{ \phi_v \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{2} EA \frac{\partial Y}{\partial s} \left(\frac{\partial \phi_w}{\partial s} \right)^2 \right] \right\}_i ds,$$

$$\vartheta_5 = \sum_{i=1}^4 \int_0^l \left\{ \phi_w \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{2} EA \left(\frac{\partial \phi_w}{\partial s} \right)^3 \right] \right\}_i ds,$$

$$\vartheta_6 = \sum_{i=1}^4 \int_0^l \left\{ \phi_v \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{2} EA \left(\frac{\partial \phi_v}{\partial s} \right)^3 \right] \right\}_i ds,$$

$$\vartheta_6 = \sum_{i=1}^4 \int_0^l \left\{ \phi_w \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{2} EA \frac{\partial \phi_w}{\partial s} \left(\frac{\partial \phi_v}{\partial s} \right)^2 \right] \right\}_i ds$$

1.2 气动荷载力学模型

在覆冰的影响下,导线由圆截面变为翼型截面,因此在风荷载作用下将产生气动力。为了研究气动力对导线振动的影响,建立如图2所示的气动荷载力学模型,并选取新月形覆冰导线为研究对象。

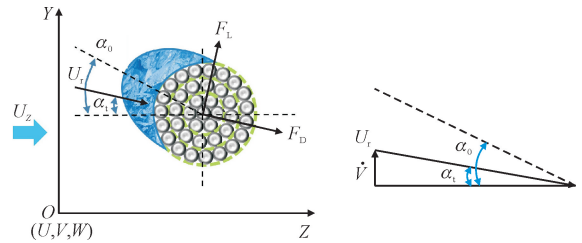


图2 导线的空气动力学模型

Fig. 2 Aerodynamic mechanical model of conductor

图2中: U_z 为水平稳定风速; U_r 为相对风速; F_D 、 F_L 分别为导线所受的气动阻力和气动升力; α_0 为初始凝冰角; α_t 为相对攻角。根据空气动力学可得

$$F_Y = F_L \cos \alpha_t - F_D \sin \alpha_t = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} D U_z^2 C_Y(\alpha) \quad (9a)$$

$$F_Z = F_L \sin \alpha_t + F_D \cos \alpha_t = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} D U_z^2 C_Z(\alpha) \quad (9b)$$

式中: F_Y 为竖向气动力; F_Z 为水平方向上的气动力; α 为风攻角; ρ_{air} 为空气密度; D 为四分裂导线的迎风直径; C_Y 为竖向气动力系数; C_Z 为水平方向上

的气动力系数,其三次曲线拟合表达式为

$$C_Y = \eta_1 \alpha + \eta_2 \alpha^2 + \eta_3 \alpha^3 \quad (10a)$$

$$C_Z = \beta_1 \alpha + \beta_2 \alpha^2 + \beta_3 \alpha^3 \quad (10b)$$

式中, η_i 、 β_i 为气动力系数参数。基于准静态假设^[25],导线运动速度小于风速,且风攻角满足如下关系

$$\alpha_t \approx \tan \alpha_t = \frac{\dot{V}}{U_Z} \quad (11a)$$

$$\alpha = \alpha_0 - \alpha_t = \alpha_0 - \frac{\dot{V}}{U_Z} \quad (11b)$$

忽略初始攻角对覆冰四分导线舞动的静力效应及影响,并将式(10)和式(11)代入式(9)可得

$$F_Y = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} D U_Z^2 \left[-\eta_1 \frac{\dot{V}}{U_Z} + \eta_2 \left(\frac{\dot{V}}{U_Z} \right)^2 - \eta_3 \left(\frac{\dot{V}}{U_Z} \right)^3 \right] \quad (12a)$$

$$F_Z = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} D U_Z^2 \left[-\beta_1 \frac{\dot{V}}{U_Z} + \beta_2 \left(\frac{\dot{V}}{U_Z} \right)^2 - \beta_3 \left(\frac{\dot{V}}{U_Z} \right)^3 \right] \quad (12b)$$

将式(12)代入式(8)可得最终的舞动常微分方程

$$\begin{cases} \vartheta_1 \ddot{q}_v + (\vartheta_2 + \vartheta_9) \dot{q}_v + \vartheta_{10} \dot{q}_v^2 + \vartheta_{11} \dot{q}_v^3 + \vartheta_3 q_v + \\ \vartheta_4 q_v^2 + \vartheta_5 q_w^2 + \vartheta_6 q_v^3 + \vartheta_7 q_v q_w^2 = 0 \\ \ell_1 \ddot{q}_w + \ell_2 \dot{q}_w + \ell_8 \dot{q}_v + \ell_9 \dot{q}_v^2 + \ell_{10} \dot{q}_v^3 + \ell_3 q_w + \\ \ell_4 q_v q_w + \ell_5 q_w^3 + \ell_6 q_v^2 q_w = 0 \end{cases} \quad (13)$$

式中新增的线性与非线性系数的具体表达式分别为

$$\vartheta_9 = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} D U_Z^2 \int_0^l \left(-\frac{\eta_1}{U_Z} \right) \phi_v^2 ds,$$

$$\ell_8 = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} D U_Z^2 \int_0^l \left(-\frac{\beta_1}{U_Z} \right) \phi_w \phi_v ds,$$

$$\vartheta_{10} = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} D U_Z^2 \int_0^l \left(\frac{\eta_2}{U_Z^2} \right) \phi_v^3 ds,$$

$$\ell_9 = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} D U_Z^2 \int_0^l \left(\frac{\beta_2}{U_Z^2} \right) \phi_w \phi_v^2 ds,$$

$$\vartheta_{11} = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} D U_Z^2 \int_0^l \left(-\frac{\eta_3}{U_Z^3} \right) \phi_v^4 ds,$$

$$\ell_{10} = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} D U_Z^2 \int_0^l \left(-\frac{\beta_3}{U_Z^3} \right) \phi_w \phi_v^3 ds$$

2 基于 SINDy 算法的模型重建

非线性动力学稀疏识别(SINDy)方法是使用稀

疏回归和参数识别,从大量组合势动力学模型中正确地发现简洁的控制方程。众所周知,非线性动力系统的形式可表示为

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] \quad (14)$$

式中: $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T \in R^n$ 表示系统在时间 t 的状态。 $\mathbf{f}[\mathbf{x}(t)]$ 为动态系统的约束,函数 $\mathbf{f}[\mathbf{x}(t)]$ 的具体形式由观测数据决定,需要采集 $t_1, t_2, \dots, t_m$ 时刻的状态数据,构建的相关数值矩阵如下

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t_1) \\ \mathbf{x}^T(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(t_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t_1) & x_2(t_1) & \cdots & x_n(t_1) \\ x_1(t_2) & x_2(t_2) & \cdots & x_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(t_m) & x_2(t_m) & \cdots & x_n(t_m) \end{bmatrix} \quad (15a)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^T(t_1) \\ \dot{\mathbf{x}}^T(t_2) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}^T(t_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t_1) & \dot{x}_2(t_1) & \cdots & \dot{x}_n(t_1) \\ \dot{x}_1(t_2) & \dot{x}_2(t_2) & \cdots & \dot{x}_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{x}_1(t_m) & \dot{x}_2(t_m) & \cdots & \dot{x}_n(t_m) \end{bmatrix} \quad (15b)$$

式中, $\dot{\mathbf{X}}$ 为 $\mathbf{X}$ 的数值微分, $\mathbf{X}$ 中所需要的数据是现实世界中测量收集的观测数据。本研究将 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 代入竖向位移、竖向速度、水平位移以及水平速度状态变量。

构建一个候选函数库,选择填充库的函数是任意的,可由多项式项和三角函数组成。考虑到模型的可解释性和计算量,候选函数库中只包含多项式项,那么该函数库的形式为

$$\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{X}) = [1 \ \mathbf{X} \ \mathbf{X}^2 \ \cdots \ \mathbf{X}^d \ \cdots] \quad (16)$$

式中: $\mathbf{X}^d$ 为状态向量 $\mathbf{x}(t)$ 的所有 d 次多项式函数的集合; $\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{X})$ 的每一列代表等式右边的候选函数项,在这个替代函数库中选择系数时获得了更大的自由度。大多数物理系统仅有少量定义动力学的相关项,使得高维非线性函数空间中的控制方程稀疏。利用稀疏识别方法可以从复杂未知动力学系统中找到这种稀疏形式,识别出仅含所需的非线性项简约模型^[26]。该算法能够收敛到真解的假定是仅有少数元素组成函数 $\mathbf{f}[\mathbf{x}(t)]$,这种稀疏性平衡了模型的复杂度与精度。

$$\dot{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{X}) \boldsymbol{\Xi} \quad (17)$$

式中, $\boldsymbol{\Xi} = [\xi_1 \ \xi_2 \ \cdots \ \xi_n]$ 表示收集到的稀疏系数, ξ_k 对应 $\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{X})$ 中第 k 个状态函数的系数。

综上所述,可以建立一个稀疏回归问题来确定系数矩阵的稀疏向量以获得非线性有效函数项。SINDy 的目标函数由 ℓ_1 范数回归定义,其形式如下

$$\xi_k = \operatorname{argmin}_{\xi_k} \|\dot{X}_k - \Theta(X)\xi_k\|_2 + \lambda \|\xi_k\|_1 \quad (18)$$

式中: $\dot{X}_k$ 为 $\dot{X}$ 第 k 行向量; λ 为惩罚因子,用于平衡模型复杂度与精确度; ℓ_1 范数最小化可采用最小绝对

对收缩和选择算子(LASSO)等凸优化算法求解,也可以改用序列阈值最小二乘法。序列阈值最小二乘法通过迭代方式将所有小于 λ 的系数设置为 0 来增加稀疏性,其结果与 LASSO 生成的结果十分相似。为简洁起见,本研究采用后者作为解决方案。完整的模型重建流程如图 3 所示。

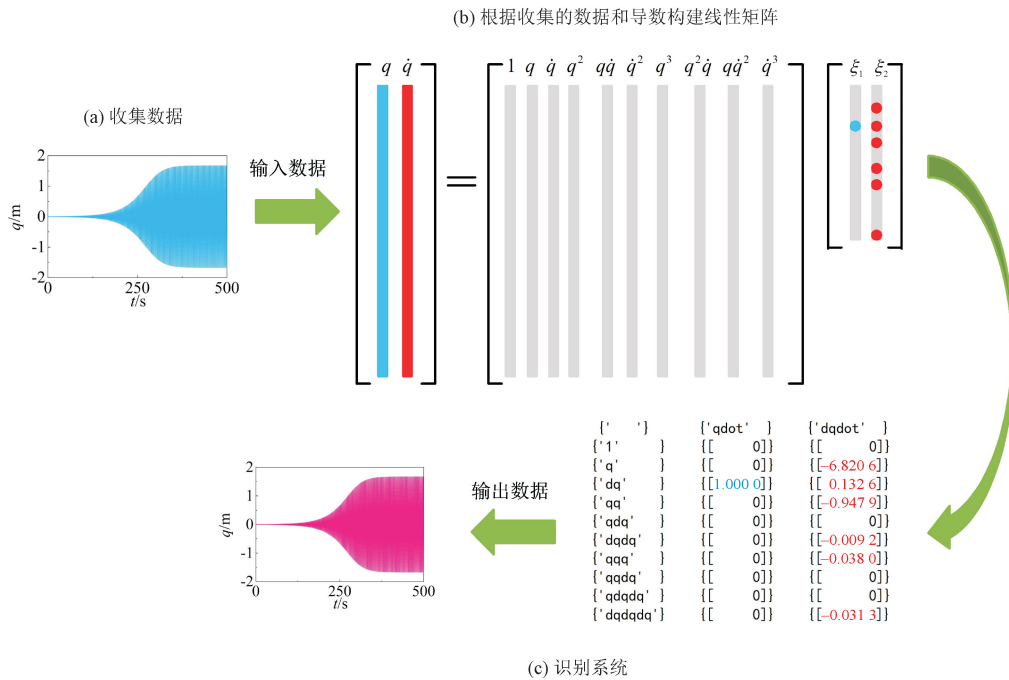


图 3 模型重建流程图

Fig. 3 Model reconstruction flow chart

3 算例分析

若无特别说明,导线的物理参数参考文献[22],详见表 1。

表 1 导线的物理参数

Tab. 1 Physical parameters of conductor

参数	数据	参数	数据
l/m	300	A/mm^2	423.24
D/m	0.114 4	H/kN	120
$M/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-1})$	9.515 6	$U_z/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	9
$E/(\text{N} \cdot \text{m}^{-2})$	4.78×10^{10}	$\rho_{\text{air}}/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	1.292 9
ζ_y	5.16×10^{-4}	ζ_z	4.41×10^{-4}

覆冰四分分裂导线竖直方向的气动系数参数为 $\eta_1 = -0.667 0$ 、 $\eta_2 = -16.218 8$ 、 $\eta_3 = 33.432 4$; 水平方向的气动系数参数为 $\beta_1 = 3.442 0$ 、 $\beta_2 = 3.330 0$ 、 $\beta_3 = 7.126 2$ 。间隔棒质量 $m_s = 4.8 \text{ kg}$, 其布置方式详见表 2。

表 2 间隔棒的布置方式

Tab. 2 Arrangement of spacers

间隔棒序号	1	2	3	4	5	6	7
距左端距离/m	20	65	110	150	190	235	280

3.1 舞动方程的参数恢复效果

3.1.1 无噪声下舞动方程的参数恢复效果

在对舞动模型重建的过程中,由于最终得到的是关于二阶微分项的稀疏系数矩阵,需对式(13)移项处理且令二阶微分项系数为 1,则式(13)可转化为

$$\begin{cases} \ddot{q}_v = \gamma_1 \dot{q}_v + \gamma_2 \dot{q}_v^2 + \gamma_3 \dot{q}_v^3 + \gamma_4 q_v + \gamma_5 q_v^2 + \gamma_6 q_w^2 + \gamma_7 q_v^3 + \gamma_8 q_v q_w^2 \\ \ddot{q}_w = \kappa_1 \dot{q}_w + \kappa_2 \dot{q}_v + \kappa_3 \dot{q}_v^2 + \kappa_4 \dot{q}_v^3 + \kappa_5 q_w + \kappa_6 q_v q_w + \kappa_7 q_w^3 + \kappa_8 q_v^2 q_w \end{cases} \quad (19)$$

式中系数的具体表达式为

$$\gamma_1 = \frac{\vartheta_2 + \vartheta_9}{-\vartheta_1}, \gamma_2 = \frac{\vartheta_{10}}{-\vartheta_1}, \gamma_3 = \frac{\vartheta_{11}}{-\vartheta_1}, \gamma_4 = \frac{\vartheta_3}{-\vartheta_1},$$

$$\gamma_5 = \frac{\vartheta_4}{-\vartheta_1}, \gamma_6 = \frac{\vartheta_5}{-\vartheta_1}, \gamma_7 = \frac{\vartheta_6}{-\vartheta_1}, \gamma_8 = \frac{\vartheta_7}{-\vartheta_1},$$

$$\kappa_1 = \frac{\ell_2}{-\ell_1}, \kappa_2 = \frac{\ell_8}{-\ell_1}, \kappa_3 = \frac{\ell_9}{-\ell_1}, \kappa_4 = \frac{\ell_{10}}{-\ell_1},$$

$$\kappa_5 = \frac{\ell_3}{-\ell_1}, \kappa_6 = \frac{\ell_4}{-\ell_1}, \kappa_7 = \frac{\ell_5}{-\ell_1}, \kappa_8 = \frac{\ell_6}{-\ell_1}$$

通过数值计算可得到覆冰四分裂导线舞动方程的正确参数,如表 3 所示。

表 3 舞动方程的参数

Tab. 3 Parameters of the galloping equation

参数	$\dot{q}_v(\dot{q}_w)$	$\dot{q}_v^2(\dot{q}_v)$	$\dot{q}_v^3(\dot{q}_v^2)$	$q_v(\dot{q}_v^3)$	$q_v^2(q_w)$	$q_w^2(q_v q_w)$	$q_v^3(q_w)$	$q_v q_w^2(q_v^2 q_w)$
正确系数	0.043 6 (-0.002 4)	-0.151 4 (-0.336 4)	-0.044 0 (0.043 8)	-5.880 9 (-0.013 2)	-0.350 7 (-5.466 5)	-0.061 0 (-0.244 2)	-0.071 3 (-0.037 9)	-0.036 5 (-0.073 0)
识别系数	0.043 6 (-0.002 4)	-0.151 4 (-0.336 4)	-0.044 0 (0.043 8)	-5.880 9 (-0.013 2)	-0.350 7 (-5.466 5)	-0.061 0 (-0.244 2)	-0.071 3 (-0.037 9)	-0.036 5 (-0.073 0)

注:括号内为水平方向上舞动方程的参数。

首先选取 4 个状态变量 $[q_v \quad \dot{q}_v \quad q_w \quad \dot{q}_w]$, 形如

$$\mathbf{X} = [q_v \quad \dot{q}_v \quad q_w \quad \dot{q}_w] \quad (20a)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = [\dot{q}_v \quad \ddot{q}_v \quad \dot{q}_w \quad \ddot{q}_w] \quad (20b)$$

初始状态变量为 $\mathbf{X}_0 = [0.01 \ 0.01 \ 0 \ 0]$, 时间跨度 $t \in [0, 350]$, 时间步长 $\Delta t = 0.01$ 并通过数值计算获得模拟数据。本研究惩罚因子 λ 的取值均为舞动方程最小系数的 1/4。使用 SINDy 对模拟数据进行模型重建,覆冰四分裂导线的舞动方程的参数重建结果如表 3 所示,重建的舞动模型位移时程曲线如图 4 所示。

通过比较表 3 中的数据可知,当数据不含任何噪声时,SINDy 能够准确地恢复出舞动方程中的全部项及对应系数。

本研究研究覆冰四分裂导线竖向-水平耦合舞动模式,当覆冰四分裂导线的一阶对称面内模态对应的频率处于第一个交叉点时,覆冰四分裂导线的一阶对称面内模态与一阶对称面外模态存在 2:1 内共振条件^[27]。为研究 SINDy 在 2:1 内共振模式下舞动模型的重建效果,通过改变导线的弹性模量 $E = 3.50 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$,水平张力 $H = 29 \text{ kN}$,其他参数保持不变后,方程新的系数如表 4 所示。改变参数后对应的 Irvine 参数 $\lambda^2 = 40.576$,此时 λ^2 与 $4\pi^2 \approx 39.438$ 较接近,即接近于第一个交叉点。因此,覆冰四分裂导线将产生 2:1 内共振模式,该模式下覆冰四分裂导线舞动方程的参数恢复结果如表 4 所示,重建模型的位移时程曲线如图 5 所示。

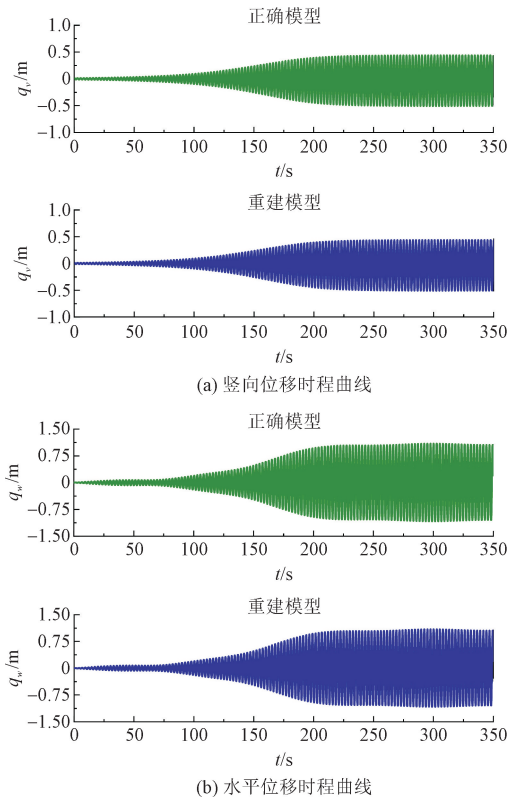


图 4 重建的位移时程曲线

Fig. 4 Reconstructed displacement time history curve

通过比较表 4 中的数据可知,当数据不含任何噪声时,即使覆冰四分裂导线竖向-水平耦合振动系统产生 2:1 内共振模式,该算法仍能够准确地恢复出覆冰四分裂导线舞动方程中各个项及对应系数。

从图 5 中还可以观察到重建模型的位移响应具有“拍”的特点,与内共振的特点相符。以上模型的重建效果体现了 SINDy 算法具有一定鲁棒性。

表4 2:1内共振模式下舞动方程的参数

Tab. 4 Parameters of the galloping equation in 2:1 internal resonance

参数	$\dot{q}_v(\dot{q}_w)$	$\dot{q}_v^2(\dot{q}_v)$	$\dot{q}_v^3(\dot{q}_v^2)$	$q_v(\dot{q}_v^3)$	$q_v^2(q_w)$	$q_w^2(q_v q_w)$	$q_v^3(q_v^3)$	$q_v q_w^2(q_v^2 q_w)$
正确系数	0.043 7	-0.169 5	-0.055 5	-5.455 2	-1.179 8	-0.138 3	-0.098 6	-0.024 6
	(-0.000 5)	(-0.329 8)	(0.046 3)	(-0.015 4)	(-1.321 1)	(-0.553 2)	(-0.027 7)	(-0.049 3)
识别系数	0.043 7	-0.169 5	-0.055 5	-5.455 2	-1.179 8	-0.138 3	-0.098 6	-0.024 6
	(-0.000 5)	(-0.329 8)	(0.046 3)	(-0.015 4)	(-1.321 1)	(-0.553 2)	(-0.027 7)	(-0.049 3)

注:括号内为水平方向上舞动方程的参数。

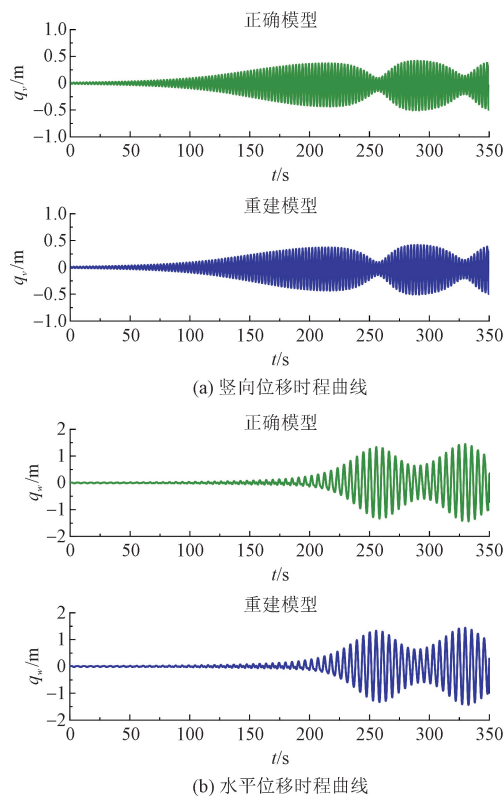


图5 重建的位移时程曲线(2:1内共振模式下)

Fig. 5 Reconstructed displacement time history curve (2:1 internal resonance)

3.1.2 灵敏度分析

在覆冰四分裂导线舞动过程中,实际容易获得的测量数据是位移测量值和加速度测量值,而速度测量值难以获得。为获得导线的速度测量值,往往需对位移测量值进行有限差分或其他近似数值微分求解。由于速度测量值是近似值,因此需分析速度测量值在噪声影响下参数恢复的灵敏度,在准确的速度测量值中分别添加噪声幅值为0.01、0.03、0.05及0.1的高斯白噪声。图6为SINDy恢复出的舞动方程全部项、一次项及三次项系数的均值误差。

由图6可知,随着噪声幅值的增大,覆冰四分裂导线舞动方程的系数均值误差也不断增大,其中三次项的系数均值误差显著大于一次项的系数均值误

差。在噪声幅值为0.1时,一次项及三次项的系数均值误差分别为9.56%和21.05%;不难发现,三次项的系数均值误差是一次项的系数均值误差的两倍多。这是由于该算法在噪声幅值增大过程中逐渐恢复出方程中未出现的项,且舞动方程中的一次项比三次非线性项更活跃,导致三次项的恢复精度显著降低。

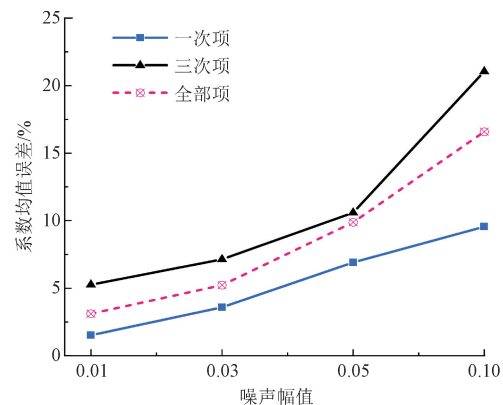


图6 不同噪声幅值下的系数均值误差

Fig. 6 Coefficient mean error under different noise amplitudes

3.2 舞动模型的重建精度分析

3.2.1 不同噪声幅值对模型重建精度的影响

3.1.2节中提到随着噪声幅值的增加,SINDy恢复出的舞动方程系数均值误差会显著增大,并会恢复出方程中未出现的项。为此,分析该情况对舞动模型重建精度的影响,在准确的速度测量值上添加噪声幅值分别为0.05、0.1、0.15及0.2的高斯白噪声。为定量地衡量重建模型与真实模型的相似程度,需建立一个评价指标。模型的评价指标有很多种,其中MSE、MAPE等评价指标均从数值层面评价模型的精确程度,而决定系数 R^2 可以从统计学角度来整体评估模型的拟合优度并消除量纲上的影响。于是本研究采用决定系数 R^2 衡量重建模型的准确度,如式(21)所示,当模型重建精度较高时, R^2 趋于1。

$$R^2 \equiv 1 - \frac{S_{\text{res}}}{S_{\text{tot}}} \quad (21a)$$

$$S_{\text{res}} = \sum_i (y_i - f_i)^2 \quad (21b)$$

$$S_{\text{tot}} = \sum_i (y_i - \bar{y})^2 \quad (21c)$$

式中: S_{res} 为数据的残差平方和; S_{tot} 为数据的总平方和; f_i 为回归值; y_i 为测量值; $\bar{y}$ 为平均值。

通过数值模拟对覆冰四分裂导线处于整个时域内的重建结果拟合 R^2 数据曲线如图 7 所示。其中横坐标为噪声幅值,纵坐标为决定系数 R^2 。从图 7 中可以看出:在噪声幅值为 0.1 以内时,重建出的位移时程 q_v 和 q_w 的决定系数均在 0.93 以上,说明 SINDy 有较高的模型重建精度;噪声幅值在 0.05 以内时,重建出的位移时程 q_v 和 q_w 的决定系数均在 0.97 以上,说明 SINDy 可以准确地重建出真实的覆冰四分裂导线舞动模型。此外,还可以发现在噪声幅值在 0.1~0.2 以内时,水平方向的重建精度要高于竖向的重建精度。

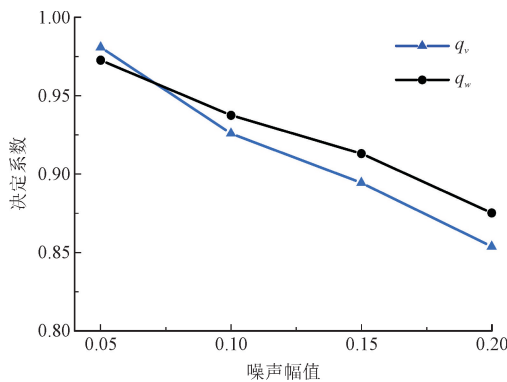


图 7 不同噪声幅值下的决定系数曲线

Fig. 7 Under different noise amplitudes curves of determination coefficient

由于覆冰四分裂导线舞动的最大振幅发生在稳态响应过程中,因此为更清楚地比较 SINDy 算法重建的模型与真实模型之间的差异性,选取导线处于稳定状态下 5 s 内的数据进行分析。图 8 为该算法在不同噪声幅值下重建的局部位移时程曲线。从图 8 中可以看出:在噪声幅值分别为 0.05、0.1、0.15 及 0.2 时,相较于真实模型处于稳定状态下 5 s 内的最大振幅,重建模型在竖向舞动时的相对误差分别为 1.03%、5.12%、10.91%、15.97%;在水平舞动时的相对误差分别为 0.83%、5.25%、9.45%、13.21%。从这些数据中可以看出:随着噪声幅值的增大,相较于真实模型的最大振幅,重建模型的相对误差逐渐

增大。在噪声幅值为 0.1 以内时,重建模型竖向和水平舞动最大振幅的相对误差均在 6% 以下。此外,重建模型水平舞动最大振幅的相对误差普遍小于竖向舞动最大振幅的相对误差。综上分析可知,在测量噪声影响下,即使参数恢复过程中出现真实方程中未出现的项,重建模型仍有很高的精度。

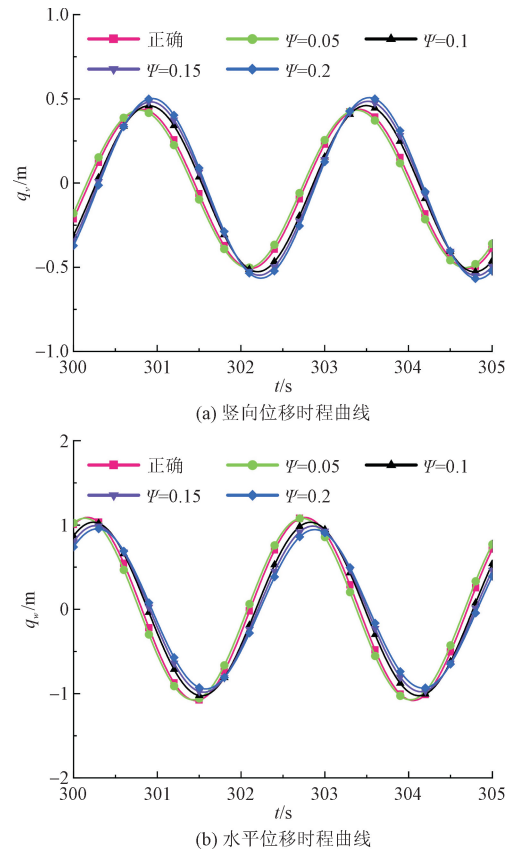


图 8 不同噪声幅值下的局部位移时程曲线

Fig. 8 Local displacement time history curves under different noise amplitudes

3.2.2 不同数据量对模型重建精度的影响

上述研究 SINDy 重建精度所用的数据量均是数值模拟的全部数据,实际工程中获取到的数据量是有一定限度的。因此为了更符合实际情况,分析不同数据量下该算法的重建精度。从数值模拟的全部数据中分别随机不重复抽取 30 000、10 000、5 000、1 000 及 500 组数据作为该算法的输入数据。同样选取覆冰四分裂导线处于稳定状态下 5 s 内的数据进行分析。受篇幅所限,仅研究噪声幅值为 0.1 时模型的重建效果,重建模型的局部位移时程曲线如图 9 所示,相应时域内的决定系数曲线如图 10 所示。从图 9 中可以看出,在噪声幅值为 0.1 时,不同数据量下重建模型与真实模型的位移时程曲线相比

存在一定差异。从图 10 中不难发现,在数据量达到 500 以上时,重建模型精度在 0.93 以上,说明 SINDy 仅需很少的数据量就能达到较高的重建精度。

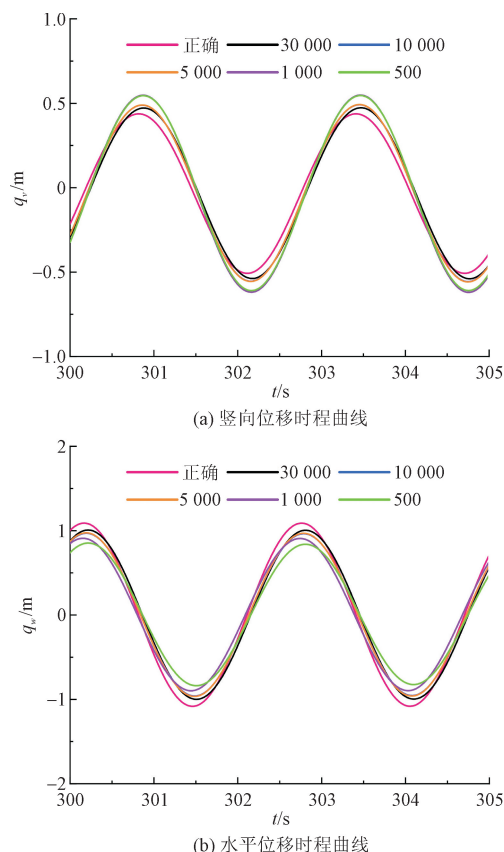


图 9 不同数据量下的局部位移时程曲线

Fig. 9 Local displacement time history curves under different data amounts

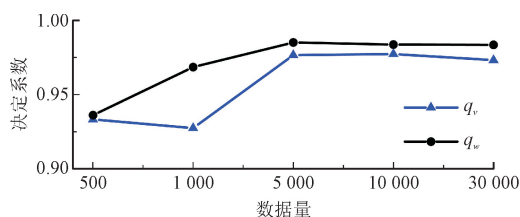


图 10 不同数据量下的决定系数曲线

Fig. 10 Curves of determination coefficient under different data amounts

4 结 论

本研究建立了复杂输电线路中覆冰四分裂导线竖向-水平耦合舞动的理论模型,采用 SINDy 算法对理论模型重建,并进行了具体的算例分析,得到以下结论。

1) 在无噪声数据中,SINDy 算法准确地恢复了非内共振舞动模型及 2:1 内共振舞动模型的结构和

参数。

2) 通过对舞动模型进行灵敏度分析,发现随着噪声幅值的增大,覆冰四分裂导线舞动方程的系数均值误差也不断增大,其中三次项的系数均值误差显著大于一次项的系数均值误差。在噪声幅值为 0.1 时,一次项及三次项的系数均值误差分别为 9.56% 和 21.05%,这是由于该算法在噪声幅值的增大的过程中逐渐恢复出方程中未出现的项,且舞动方程中的一次项比三次非线性项更活跃,导致三次项的恢复精度显著降低。

3) 在噪声幅值为 0.1 以内时,重建出的位移时程 q_v 和 q_w 的决定系数均在 0.93 以上,且在稳定状态下 5 s 内,重建模型竖向和水平舞动最大振幅的相对误差均在 6% 以内;噪声幅值在 0.05 以内时,重建出的位移时程 q_v 和 q_w 的决定系数均在 0.97 以上。说明在测量噪声影响下,即使参数恢复过程中出现真实方程中未出现的项,重建模型仍有很高的精度。

4) 通过对比不同数据量下重建模型在噪声幅值为 0.1 时的精度,发现数据量达到 500 以上时,重建模型精度在 0.93 以上,说明 SINDy 仅需很少的数据量就能达到较高的重建精度,证实了 SINDy 的鲁棒性。

参考文献:

- [1] LOU W J, WANG J W, CHEN Y, et al. Effect of motion path of downburst on wind-induced conductor swing in transmission line [J]. Wind and structures, 2016, 23(3): 211-229.
- [2] LIU X H, HU Y, CAI M Q. Free vibration analysis of transmission lines based on the dynamic stiffness method [J]. Royal Society Open Science, 2019, 6(3): 181354.
- [3] DEN HARTOG J P. Transmission line vibration due to sleet [J]. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, 1932, 51(4): 1074-1076.
- [4] NIGOL O, BUCHAN P G. Conductor galloping-part II torsional mechanism [J]. IEEE transactions on power apparatus and systems, 1981, PAS-100(2): 708-720.
- [5] YU P, SHAH A H, POPPLEWELL N. Inertially coupled galloping of iced conductors [J]. Journal of applied mechanics, 1992, 59(1): 140-145.
- [6] CAI M Q, YAN B, LU X, et al. Numerical simulation of aerodynamic coefficients of iced-quad bundle conductors [J]. IEEE transactions on power delivery, 2015, 30(4): 1669-1676.
- [7] LU J Z, WANG Q, WANG L M, et al. Study on wind tunnel test and galloping of iced quad bundle conductor [J]. Cold regions science and technology, 2019, 160: 273-287.
- [8] MATSUMIYA H, YAGI T, MACDONALD J H G. Unsteady aerodynamic force modelling for 3-DoF-galloping of four-bundled con-

- ductors[J]. *Journal of fluids and structures*, 2022, 112: 103581.
- [9] XIONG W, YUAN H J, YOU L. Prediction method of icing thickness of transmission line based on MEAO[J]. *Cluster computing*, 2018, 21(1): 845-853.
- [10] 张博, 陶亚光, 常帅帅, 等. MEMS 传感器输电线路舞动轨迹监测[J]. *中国测试*, 2022, 48(1): 53-59.
- ZHANG Bo, TAO Yaguang, CHANG Shuaishuai, et al. Transmission line galloping trajectory monitoring based on MEMS sensor[J]. *China measurement & test*, 2022, 48(1): 53-59 (in Chinese).
- [11] ZOU H B, LU M. Developing high-frequency fiber bragg grating acceleration sensors to monitor transmission line galloping[J]. *IEEE access*, 2021, 9: 30893-30897.
- [12] 刘辉, 马增泰, 林济铨. 覆冰导线舞动方程的建立及求解策略[J]. *中国电力*, 2021, 54(7): 67-75.
- LIU Hui, MA Zengtai, LIN Jikeng. Establishment and solution strategy of galloping equation of iced conductors[J]. *Electric power*, 2021, 54(7): 67-75 (in Chinese).
- [13] 曹海林, 陶璐, 蔡文斌, 等. 弧长约束下基于分布式倾角信息的输电线舞动曲线重建[J]. *高电压技术*, 2018, 44(5): 1535-1541.
- CAO Hailin, TAO Lu, CAI Wenbin, et al. Transmission line galloping curve reconstruction based on distributed inclination information and arc-length constraint[J]. *High voltage engineering*, 2018, 44(5): 1535-1541 (in Chinese).
- [14] 谢东升, 孙滔, 史卓鹏, 等. 基于三维重建的输电线舞动检测方法研究[J]. *国外电子测量技术*, 2022, 41(3): 96-101.
- XIE Dongsheng, SUN Tao, SHI Zhuopeng, et al. Research on galloping detection method of transmission line based on three-dimensional reconstruction[J]. *Foreign electronic measurement technology*, 2022, 41(3): 96-101 (in Chinese).
- [15] WU D C, CAO H L, LI D, et al. Energy-Efficient reconstruction method for transmission lines galloping with conditional generative adversarial network[J]. *IEEE access*, 2020, 8: 17310-17319.
- [16] TIBSHIRANI R. Regression shrinkage and selection via the lasso[J]. *Journal of the Royal Statistical Society: series b (methodological)*, 1996, 58(1): 267-288.
- [17] BRUNTON S L, PROCTOR J L, KUTZ J N. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2016, 113(15): 3932-3937.
- [18] MANGAN N M, BRUNTON S L, PROCTOR J L, et al. Inferring biological networks by sparse identification of nonlinear dynamics[J]. *IEEE transactions on molecular biological and multi-scale communications*, 2016, 2(1): 52-63.
- [19] QUADE M, ABEL M, NATHAN KUTZ J, et al. Sparse identification of nonlinear dynamics for rapid model recovery[J]. *Chaos*, 2018, 28(6): 063116.
- [20] LI S W, KAISER E, LAIMA S J, et al. Discovering time-varying aerodynamics of a prototype bridge by sparse identification of nonlinear dynamical systems[J]. *Physical review E*, 2019, 100(2): 022220.
- [21] SHEA D E, BRUNTON S L, KUTZ J N. SINDy-BVP: sparse identification of nonlinear dynamics for boundary value problems[J]. *Physical review research*, 2021, 3(2): 023255.
- [22] ZHANG Q, POPPLEWELL N, SHAH A H. Galloping of bundle conductor[J]. *Journal of sound and vibration*, 2000, 234(1): 115-134.
- [23] 闵光云, 刘小会, 严波, 等. 覆冰四分分裂导线风洞试验与稳定性研究[J]. *力学与实践*, 2020, 42(4): 447-454.
- MIN Guangyun, LIU Xiaohui, YAN Bo, et al. Wind tunnel test and stability study of iced quad bundle conductor[J]. *Mechanics in engineering*, 2020, 42(4): 447-454 (in Chinese).
- [24] IRVINE H M. *Cable structures*[M]. Cambridge: MIT Press, 1981.
- [25] DESAI Y M, YU P, POPPLEWELL N, et al. Finite element modelling of transmission line galloping[J]. *Computers & structures*, 1995, 57(3): 407-420.
- [26] BRUNTON S L, KUTZ J N. *Data-driven science and engineering: machine learning, dynamical systems, and control*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2022.
- [27] 严波, 刘小会, 赵莉, 等. 存在内共振的覆冰四分分裂导线的非线性舞动[J]. *应用数学和力学*, 2014, 35(1): 39-49.
- YAN Bo, LIU Xiaohui, ZHAO Li, et al. Nonlinear galloping of iced quad-bundle conductors with internal resonances[J]. *Applied mathematics and mechanics*, 2014, 35(1): 39-49 (in Chinese).

(编辑 吕茵)