文章编号：1003-1421(2026)08-0108-16
引用格式：代斌，白宏权，燕翔，等.考虑固有参数不确定的虚拟编组列车平稳追踪控制方法研究[J].铁道运输与经济，2026，48(8)：108-123.
DAI Bin，BAI Hongquan，YAN Xiang，et al. Research on Smooth Tracking Control Method for Virtual Coupling Trains Considering Inherent Parameter Uncertainty[J]. Railway Transport and Economy，2026，48(8)：108-123.

考虑固有参数不确定的虚拟编组列车平稳追踪控制方法研究

代　斌[1]，白宏权[1]，燕　翔[2]，张晔伟[2]，闫　晗[3]

(1.国能朔黄铁路发展有限责任公司 信息中心，河北 沧州　062300；2.北京全路通信信号研究设计院集团有限公司，北京　100073；3.北京交通大学 自动化与智能学院，北京　100044)

摘　要：虚拟编组可以根据需要灵活调整车辆资源来提高车辆利用率，显著提升轨道交通运力与效率，但其稳定性受制于列车固有参数不确定性和延时效应，从而可能降低虚拟编组技术带来的效益。研究针对执行器惰性延时与控制系统延时对控制精度的影响，提出一种基于障碍Lyapunov函数与预设时间函数的虚拟编组列车平稳追踪控制方法，建立考虑执行器惰性延时、控制延时的非线性动力学模型，设计基于障碍Lyapunov函数的状态约束控制器，通过Lyapunov-Krasovskii稳定性准则与预设时间函数确保误差在预设时间内收敛至安全范围，并利用RBF神经网络逼近未知非线性项以增强鲁棒性。依据预设时间法针对虚拟编组单元列车的非线性距离追踪间隔策略设计了虚拟编组列车自适应平稳追踪控制器。

关键词：虚拟编组；Lyapunov-Krasovskii稳定性理论；预设时间控制；RBF神经网络
中图分类号：U292　　**文献标识码**：A　　**DOI**：10.16668/j.cnki.issn.1003-1421.20250323001

Research on Smooth Tracking Control Method for Virtual Coupling Trains Considering Inherent Parameter Uncertainty

DAI Bin[1]，BAI Hongquan[1]，YAN Xiang[2]，ZHANG Yewei[2]，YAN Han[3]

(1. Information Center, Guoneng Shuohuang Railway Development Co., Ltd., Cangzhou 062300, Hebei, China; 2. CRSC Research & Design Institute Group Co., Ltd., Beijing 100073, China; 3. School of Automation and Intelligence, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: Virtual coupling can flexibly adjust vehicle resources as needed to improve vehicle resource utilization and significantly enhance rail transit capacity and efficiency. However, its stability is constrained by inherent train parameter uncertainty and delay effects, which may reduce the benefits brought by virtual coupling technology. To address the effects of actuator inertial delay and control system delay on control accuracy, a smooth tracking control method for virtual coupling trains based on a barrier Lyapunov function and a prescribed-time function was proposed. A nonlinear dynamic model considering actuator inertial delay and control system delay was

收稿日期：2025-03-23　　**修订日期**：2026-07-01
通信作者：闫晗(1999—)，男，辽宁葫芦岛人，北京交通大学自动化与智能学院硕士研究生。
基金项目：国能朔黄铁路发展有限责任公司科技创新项目(SHTL-22-14)；国家自然科学基金铁路基础研究联合基金项目(U2568233)

established, and a state-constrained controller based on the barrier Lyapunov function was designed. The Lyapunov-Krasovskii stability criterion and the prescribed-time function were used to ensure that the errors converge to a safe range within the prescribed time, and an RBF neural network was used to approximate unknown nonlinear terms to enhance robustness. Based on the prescribed-time method, an adaptive smooth tracking controller for virtual coupling unit trains was designed according to the nonlinear distance tracking interval strategy.

Keywords: Virtual Coupling; Lyapunov-Krasovskii Stability Theory; Prescribed-Time Control; RBF Neural Network

0　引言

轨道交通是我国交通运输体系的骨干网络，对保障国民经济的平稳发展具有重要意义。我国高度重视轨道交通建设[1]，《交通强国建设纲要》[2]提出“建设城市群一体化交通网，推进干线铁路、城际铁路、市域(郊)铁路、城市轨道交通融合发展”的规划目标。与此同时，随着我国交通运输需求的持续增长，如何快速提升运力、降低成本，并支持经济社会的健康发展，已成为轨道交通系统亟待解决的重大挑战[3]。

近年来，随着自动控制和无线通信技术的飞速发展，虚拟编组技术应运而生并迅速发展，受到业界的广泛关注。虚拟编组技术通过虚拟联挂替代传统物理车钩，将多列列车联挂成一个虚拟编组列车，实现了灵活编组和解编，极大地缩短了编组与解编时间，基于相对制动距离[4]计算限速，缩短了虚拟编组中列车间的追踪距离，从而能够快速匹配车辆资源与客流需求[5]。

与传统联挂方式不同，虚拟编组列车需要在没有物理车钩的情况下维持编组同步运行的稳定性，同时编组内列车还需保持较小的运行间距[6]。然而，列车编队运行过程中，单元车辆运行状态的变化以及内部不确定参数的影响，使得虚拟编组列车需要一种新的控制方法来确保追踪运行的稳定性。

近年来，已有学者针对虚拟编组列车的参数不确定性开展了相关研究。Su 等[7]基于相对制动距离的非线性距离间隔策略，对虚拟编组列车运行过程中的基本阻力和附加阻力进行近似与线性化处理，综合考虑运行约束条件，利用模型预测控制(MPC)求解虚拟编组列车的控制力。Liu 等[8]在考虑已知基本阻力和附加阻力的基础上，将部分速度曲线计算与兼顾位置和速度信息的 MPC 方法相结合，提出了一种基于状态转移的 MPC 控制方案，以实现更小的到发间隔。Cao 等[9]构建了考虑未知基本阻力和附加阻力的非线性动力学模型，运用递归最小二乘法进行参数辨识，并基于广义 MPC 方法设计了具备避撞功能的虚拟编组控制器。Wang 等[10]针对含有未知扰动和质量参数不确定的虚拟编组列车，基于常数时间间隔进行抗扰控制，同时利用滑模控制器与 Lyapunov 稳定性准则完成了稳定性证明。杨宏阔等[11]结合真实的列车参数进行模型参数寻优设计，提高了高速列车速度控制的精度。Xue 等[12]基于反步控制技术，设计了一种基于观测器的事件触发自适应控制算法，保证了在单元列车质量不确定且存在外部干扰的情况下，虚拟编组列车的运行稳定性。Liu 等[13]提出了一种结合终端滑模控制与非线性观测器的控制方法，考虑了时变测量延迟导致的估计误差，并通过非线性观测器消除，实时计算跟随列车的最优牵引力，实现了虚拟编组的队列稳定。

目前对于含有不确定参数的虚拟编组控制问题来说，一方面对于虚拟编组列车运行的执行器与控制器的模型研究仍然不够深入，影响了虚拟编组动力学模型的构建；另一方面，对虚拟编组列车运行中存在的固有不确定参数研究不深入，需要考虑该因素以减小由于模型和不当的控制方法带来的控制误差，保证虚拟编组列车的运行安全。

现有针对虚拟编组列车控制的方法，仅能在保证列车状态受限的基础上保证列车的有界跟踪或渐进跟踪，无法给出误差具体的收敛时间长短。而在实际的工程应用中，为了提高控制方法的效率，确保列车平稳高效运行，需要虚拟编组列车在一个预先给定的时间内保证协调平稳运行。目前针对虚拟编组列车约束控制的研究中，在约束控制基础上使用预设时间控制的研究很少。

受此启发，研究致力于设计一种考虑虚拟编组列车状态约束和固有不确定参数的平稳追踪控制算法，主要贡献如下。①建立了考虑虚拟编组列车内部参数不确定性的动力学模型，同时考虑了列车执行器惯性延时和控制系统延时的不确定性。②基于多智能体理论，研究采用障碍 Lyapunov 函数、Lyapunov-Krasovskii 稳定性准则以及预设时间函数进行控制器设计，建立了一个能在预设时间内收敛的虚拟编组队列控制器，并利用 Lyapunov 稳定性理论证明了算法的稳定性。

1　虚拟编组列车动力学模型和基础知识

1.1　虚拟编组列车动力学模型

列车运行工况复杂，在常规的工况条件下，除了在动力学模型中考虑自身具有的牵引和制动性能，还需要考虑坡道阻力、隧道阻力、空气阻力等影响[14]。研究利用单质点模型对虚拟编组内的列车运动状态进行描述。假设虚拟编组列车中含有 N 列单元列车，可以将虚拟编组内单元列车的动力学公式表示为式(1)。

$$\begin{cases}\dot{x}_i(t)=v_i(t)\\ \dot{v}_i(t)=a_i(t)\\ a_i(t)=sat(U_i(t))-r_i(t)-w_i(t)\end{cases}$$
$$i=1,2,\cdots,N \tag{1}$$

式中：$x_i(t)$ 表示列车 i 在 t 时刻的位置，m；$v_i(t)$ 表示列车 i 在 t 时刻的速度，m/s；$a_i(t)$ 表示列车 i 在 t 时刻的加速度，m/s^2；$U_i(t)$ 表示列车 i 在 t 时刻的单位质量的控制力大小，N/kN；$r_i(t)$ 表示列车 i 在 t 时刻受到的单位质量基本阻力大小，N/kN；$w_i(t)$ 表示列车 i 在 t 时刻受到的单位质量附加阻力大小，N/kN；$sat(U_i(t))$ 表示列车 i 在时刻 t 对控制输出的饱和函数，即保证列车 i 输出控制力的有界性。

饱和函数可以用式(2)表达[15-17]。

$$sat(U_i(t))=\begin{cases}\mathrm{sign}(U_i(t))U_{i,M} & |U_i(t)|>U_{i,M}\\ U_i(t), & |U_i(t)|\leqslant U_{i,M}\end{cases}$$
$$i=0,1,\cdots,N \tag{2}$$

式中：$U_{i,M}$ 表示列车的理论输出控制力的上下限值。然而式(2)中所示的函数并不光滑，当 $U_i(t)=\pm U_{i,M}$ 时，其函数不可导。使用式(3)所示的 tanh 函数来对其进行估计。

$$g(U_i(t))=U_{i,M}\tanh\left(\frac{U_i(t)}{U_{i,M}}\right)=U_{i,M}\frac{e^{\frac{U_i(t)}{U_{i,M}}}-e^{-\frac{U_i(t)}{U_{i,M}}}}{e^{\frac{U_i(t)}{U_{i,M}}}+e^{-\frac{U_i(t)}{U_{i,M}}}}$$
$$i=1,2,\cdots,N \tag{3}$$

其导数具有最大值，其最大值可以记作 $\dot{g}_{i,\max}$。并且其估计误差可以表示为

$$\rho(U_i(t))\leqslant\left|sat(U_i(t))-g(U_i(t))\right|\leqslant U_{i,M}(1-\tanh(1))\quad i=1,2,\cdots,N \tag{4}$$

根据式(4)，其估计误差具有已知上限。

由于列车在运行过程中受到的基本阻力一般采用经验公式来进行拟合计算，其拟合公式一般被称为 Davis 方程，其具体形式如下[18]。

$$r_i(t)=c_{i,1}+c_{i,2}v_i(t)+c_{i,3}v_i^2(t)$$
$$i=1,2,\cdots,N \tag{5}$$

式中：$c_{i,1}$，$c_{i,2}$，$c_{i,3}$ 为 Davis 系数，其主要是由所采用的列车车辆和当前线路条件所共同决定。

列车的附加阻力包括坡道附加阻力、曲线附加阻力、隧道附加阻力，如式(6)表示[19]。

$$w_i(t)=w_{i,1}(t)+w_{i,2}(t)+w_{i,3}(t)=\frac{1}{10}i(x)\times g+\frac{600}{R}\times g+0.000\,13\times L_s\times g\quad i=1,2,\cdots,N \tag{6}$$

式中：$w_{i,1}(t)$ 表示列车 i 在 t 时刻受到的坡道附加阻力，N/kN[20]；$w_{i,2}(t)$ 表示列车 i 在 t 时刻受到的单位质量曲线附加阻力，N/kN[21]；$w_{i,3}(t)$ 表示列车 i 在 t 时刻受到的隧道附加阻力，N/kN[22]；$i(x)$ 表示列车在位置 x 处的线路坡度，%，并且上坡时 $i(x)>0$，下坡时 $i(x)<0$；R 表示所经过的弯道的半径大小，m；L_s 表示隧道长度，m；g 为重力加速度，m/s^2。

对于列车来说，其动力系统分为执行器与控制器 2 部分。首先，由于列车具有质量大、惰性大的特点，所以需要多个电机协同进行列车的牵引/制动。控制器用于按照通过传感器等设备得到的位置、速度与加速度等信息进行控制力的计算，将控制信息传递给控制器存在一定的传输延时。而执行器则根据控制器产生的控制命令产生实际的牵引/制动控制力。由于控制命令与实际输出之间需要 2 部分器件相互配合，在输出实际的控制力时必然存在一定的惰性延迟环节[23-25]。

综合上述对于列车内固有不确定参数的考虑以及式(1)，可以总结如下的虚拟编组列车纵向动力学模型。

$$\begin{cases}\dot{x}_i(t)=v_i(t)\\ \dot{v}_i(t)=a_i(t)\\ a_i(t)=F_i(t)-r_i(t)-w_i(t)\\ \dot{F}_i(t)=\dfrac{sat(U_i(t-h_i))-F_i(t)}{\tau_i}\end{cases}\tag{7}$$

$i=1,2,\cdots,N$

式中：h_i表示列车i的控制系统延时，其具有已知的上限$h_{i,\max}$；τ_i表示列车i的执行器惰性延时，其具有已知的上限$\tau_{i,\max}$；$F_i(t)$表示列车i执行器产生的牵引/制动力；$U_i(t)$表示控制器通过算法计算得到的理论输出牵引/制动力。

由于$a_i(t)=\dot{v}_i(t)$，可以对式(7)进一步展开，即将控制力用$v_i(t)$与$a_i(t)$表示，可以得到式(8)。

$$\begin{cases}\dot{x}_i(t)=v_i(t)\\ \dot{v}_i(t)=a_i(t)\\ \dot{a}_i(t)=\dfrac{1}{\tau_i}sat(U_i(t-h_i))-\dfrac{1}{\tau_i}(a_i(t)+r_i(t)+\\ \qquad w_i(t))-(c_2a_i(t)+2c_3a_i(t)v_i(t))-\dot{w}_i(t)\end{cases}$$

$i=1,2,\cdots,N$　　(8)

1.2　自适应反步控制方法

反步控制设计方案如图1所示。反步控制的核心思想是将复杂的高阶非线性系统分解为许多低阶的子系统，这些子系统采用级联方式连接，然后根据阶数由低到高的顺序，依次设定虚拟的跟踪目标以及虚拟控制器，逐步使得每阶的系统收敛稳定，从低阶到高阶不断地设计控制器，从而设计出系统最高阶的控制器的输出，进而使整个非线性系统达到稳定[26-27]。

2　控制方法设计

2.1　问题描述

在虚拟编组列车的运行过程中，单元列车的牵引和制动过程需要单元列车获取状态信息并将信息传输给控制系统，控制系统协调多个电机完成相应动作需要一定的信息传输延迟时间，这期间的延时视为控制系统延时。而单元列车的电机在得到控制器输出的指令到执行命令之间存在机械动作延迟时间，视为执行器惰性延时。这些延迟时间是列车运行控制中固有的参数，在控制算法中也需要考虑这些固有的不确定参数带来的影响来保证控制精度[28-29]。

因此，研究讨论了在含有执行器惰性延时与控制系统延时下虚拟编组列车的纵向动力学模型构建。然后讨论在执行器惰性延时与控制系统延时均为未知的情况下，使用预设时间法下虚拟编组列车按照基于相对制动距离的非线性距离间隔策略运行时的控制器的设计。

2.2　控制目标

虚拟编组列车的控制目标是，保证虚拟编组内单元列车之间保持采用的间隔策略下所需要的追踪间距，同时保证虚拟编组内每列单元列车具有相同的速度。研究中虚拟编组列车采用基于相对制动距离的非线性距离间隔策略作为虚拟编组内单元列车的间隔策略。因此，虚拟编组列车的控制目标可以用式(9)进行表示。

$$\begin{cases}e_i(t)=x_i(t)-x_{i-1}(t)-\Lambda_i(t)\\ \lim_{t\to\infty}(e_i(t))=0\\ \lim_{t\to\infty}(v_i(t)-v_0(t))=0\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,N\tag{9}$$

式中：$e_i(t)$表示列车i在时刻t时与需要追踪的列车i-1的追踪间距的误差；$\Lambda_i(t)$代表虚拟编组列车采用非线性距离间隔策略的追踪间距大小，具体为

$$\Lambda_i(t)=\chi_i\left(l_i+\max\left(\frac{v_i^2(t)}{2a_{i,\max}}-\frac{v_{i-1}^2(t)}{2a_{i-1,\max}},0\right)\right)$$

$i=1,2,\cdots,N$　　(10)

式中：l_i表示相对制动距离的安全裕度；χ_i表示任意可调的系数；$a_{i,\max}$表示虚拟编组内单元列车能够产生的最大制动加速度。由于$\Lambda_i(t)$是一个不可导的函数，需要对其进行线性化处理。

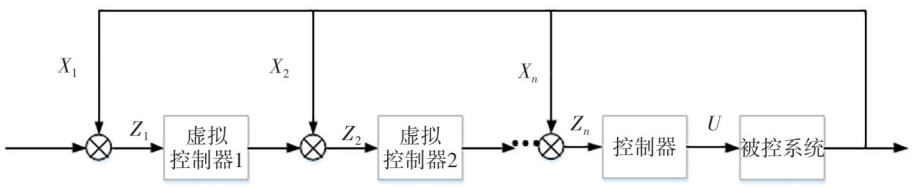


图1　反步控制设计方案

Fig.1　Design scheme of backstepping control

$$\Lambda_i(t)=\chi_i\left(l_i+\left(\frac{v_i^2(t)}{2a_{i,\max}}-\frac{v_{i-1}^2(t)}{2a_{i-1,\max}}\right)\times\varphi_i(t)\right)$$

$$i=1,2,\cdots,N \tag{11}$$

$$\varphi_i(t)=\left(\frac{1}{1+\exp\left(-10\times\left(\frac{v_i^2}{2a_{i,\max}}-\frac{v_{i-1}^2}{2a_{i-1,\max}}\right)\right)}\right)$$

$$i=1,2,\cdots,N \tag{12}$$

式中：$\varphi_i(t)$表示激活函数。根据激活函数的性质，可以得知

$$\Lambda_i(t)=\begin{cases}\chi_i\left(l_i+\dfrac{v_i^2}{2a_{i,\max}}-\dfrac{v_{i-1}^2}{2a_{i-1,\max}}\right)\\ \dfrac{v_i^2}{2a_{i,\max}}-\dfrac{v_{i-1}^2}{2a_{i-1,\max}}\geqslant 0\\ \chi_i l_i\dfrac{v_i^2}{2a_{i,\max}}-\dfrac{v_{i-1}^2}{2a_{i-1,\max}}<0\end{cases}$$

$$i=1,2,\cdots,N \tag{13}$$

2.3　虚拟编组列车平稳追踪控制器设计及稳定性分析

首先，研究将建立针对一阶误差的障碍Lyapunov函数。虚拟编组列车在运行过程中存在的单元列车的追踪间距约束以及速度约束可以通过式(14)和(15)进行描述。

$$\underline{e_i}(t)<e_i(t)<\overline{e_i}(t),\quad \underline{e_i}(t)<\overline{e_i}(t)<0$$

$$i=1,2,\cdots,N \tag{14}$$

$$\underline{v_i}(t)<v_i(t)<\overline{v_i}(t),\quad \overline{v_i}(t)>\underline{v_i}(t)>0$$

$$i=1,2,\cdots,N \tag{15}$$

式中：$\underline{e_i}(t)$和$\overline{e_i}(t)$分别表示事先规定的虚拟编组运行过程中单元列车的追踪间距约束上下限；$\underline{v_i}(t)$和$\overline{v_i}(t)$分别表示事先规定的虚拟编组运行过程中单元列车的速度约束上下限。

针对虚拟编组列车运行过程中的单元列车的追踪间距约束，可以设计如下的障碍Lyapunov函数以保证$e_i(t)$始终在区间$[-\zeta_i,\zeta_i]$内。

$$f(e_i(t))=\ln\frac{\zeta_i^2(t)}{\zeta_i^2(t)-e_i^2(t)}\qquad i=1,2,\cdots,N \tag{16}$$

由于研究采用非线性距离间隔策略，因此$\zeta_i(t)=\Lambda_i(t)$，表示虚拟编组内单元列车的追踪间距的上下限值，m。针对虚拟编组列车运行过程中存在的速度约束，采用如下的障碍Lyapunov函数以保证式(15)的约束。

$$\begin{cases}\gamma_{i,v}=f_{i,v}^{-1}(v_i)=-ln\left(\dfrac{\overline{v_i}-v_i}{v_i-\underline{v_i}}\right)\\ v_i=f_{i,v}(\gamma_{i,v})=\underline{v_i}+\dfrac{(\overline{v_i}-\underline{v_i})}{1+exp(-\gamma_i^v)}\end{cases}$$

$$i=1,2,\cdots,N \tag{17}$$

式中：$f_{i,v}^{-1}$代表针对速度约束设计的障碍Lyapunov函数；$f_{i,v}$代表所使用的障碍Lyapunov函数的反函数。

使用传统的障碍Lyapunov函数需要满足初始误差必须在事先设定的障碍Lyapunov函数所约束的范围内。然而对于虚拟编组内的列车来说，其在进行编组前的追踪间距大小并不一定满足该条件，因此可能造成控制算法的求解失败。障碍Lyapunov函数与预设时间函数结合可以在解决这个问题的基础上，给出系统状态收敛到任意大小范围的时间上限。本研究采用如下的预设时间函数[30-32]。

$$\phi_i(t)=\begin{cases}\lambda_i-\beta_i\left(\dfrac{T_i-t}{T_i}\right)^2 & 0\leqslant t<T_i\\ \lambda_i & T\leqslant t\end{cases}$$

$$i=1,2,\cdots,N \tag{18}$$

式中：T_i为一个任意设定的常数(s)，表示虚拟编组内单元列车i受约束的状态误差收敛到指定范围内的时间，可以称为预设时间参数；λ_i和β_i同样也是可以自定义的参数，其共同决定了在$t<T_i$时对约束范围的放大程度以及在$t\geqslant T_i$后误差的收敛范围大小。

使用预设时间函数与虚拟编组单元列车的追踪间距误差结合作为障碍Lyapunov函数的输入[33-35]，结合后的一阶误差如式(19)所示。

$$z_{i,1}=\phi_i e_i\qquad i=1,2,\cdots,N \tag{19}$$

式(16)的一阶障碍Lyapunov函数同样改进如下。

$$V_{i,1}=f(z_{i,1})=\ln\frac{\zeta_i^2(t)}{\zeta_i^2(t)-z_{i,1}^2}\qquad i=1,2,\cdots,N \tag{20}$$

对于二阶速度误差$z_{i,2}$，设计如下。

$$z_{i,2}=\gamma_{i,v}-\alpha_{i,1}\qquad i=1,2,\cdots,N \tag{21}$$

式中：$\alpha_{i,1}$表示一阶的虚拟控制力。对其使用拉格朗日中值定理可以得到

$$v_i=f_v(\alpha_{i,1})+z_{i,2}\dot{f}_{i,v}(\ell_{i,1})\qquad i=1,2,\cdots,N \tag{22}$$

其中$\ell_{i,1}=\alpha_{i,1}+\epsilon z_{i,2}$。

对式(20)求导，并将式(22)代入后用杨氏不等式

进行放缩，可以得到

$$\dot{V}_{i,1} \leqslant \frac{1}{\zeta_i^2 - z_{i,1}^2} z_{i,1}\phi_i f_{i,v}(\alpha_{i,1}) + \frac{\varsigma_{i,1} z_{i,1}^2 \phi_{i,m}^2 e_i^2}{(\zeta_i^2 - z_{i,1}^2)^2} - \frac{z_{i,1}\phi_i \dot{\psi}_i}{\zeta_i^2(t) - z_{i,1}^2} - \frac{z_{i,1}\phi_i v_{i-1}}{\zeta_i^2(t) - z_{i,1}^2} - \frac{z_{i,1}^2 \frac{\dot{\zeta}_i}{\zeta_i}}{\zeta_i^2(t) - z_{i,1}^2} + \frac{1}{4\varsigma_{i,1}} + \frac{1}{\zeta_i^2 - z_{i,1}^2}\phi_i z_{i,1} z_{i,2} f_{i,v}(\ell_{i,1})$$

$i = 1, 2, \cdots, N$　　(23)

其中$\varsigma_{i,1}$是杨氏不等式常数，其是可以任意设定的正常数。$\phi_{i,m}$是ϕ_i的上限，其上限可以通过式(24)计算。

$$\dot{\phi}_i = \frac{2\beta_i}{T_i}\left(1 - \frac{1}{T_i t}\right) < \frac{2\beta_i}{T_i} = \phi_{i,m}$$

$i = 1, 2, \cdots, N$　　(24)

通过分析式(23)可知，在设计虚拟控制力$\alpha_{i,1}$时，需要在保证针对一阶系统的稳定性的同时将含有二阶误差的式子保留，以方便在进行二阶系统分析时将其进行处理。可以设计如下的一阶虚拟控制力$\alpha_{i,1}$的表达式。

$$\alpha_{i,1} = f_{i,v}^{-1}\left(-k_{i,1}e_i + v_{i-1} + \dot{\psi}_i + e_i\frac{\dot{\zeta}_i}{\zeta_i} - \frac{e_i^3 \varsigma_{i,1}\phi_{i,m}^2}{\zeta_i^2 - z_{i,1}^2}\right)$$

$i = 1, 2, \cdots, N$　　(25)

其中$k_{i,1}$是一个可以任意设计的正常数。

将式(25)代入式(23)以证明Lyapunov稳定性，放缩后可以得到

$$\dot{V}_{i,1} \leqslant \frac{-k_{i,1} z_{i,1}^2}{\zeta_{i,1}^2 - z_{i,1}^2} + \frac{1}{\zeta_i^2 - z_{i,1}^2}\phi_i z_{i,1} z_{i,2} f_{i,v}(\ell_{i,1}) + \frac{1}{4\varsigma_{i,1}} \leqslant -k_{i,1}V_{i,1} + \Delta_{i,1} + \frac{1}{\zeta_i^2 - z_{i,1}^2}\phi_i z_{i,1} z_{i,2} f_{i,v}(\ell_{i,1})$$

$i = 1, 2, \cdots, N$　　(26)

$$\Delta_{i,1} = \frac{1}{4\varsigma_{i,1}} \qquad i = 1, 2, \cdots, N \qquad (27)$$

式(26)中对$\dot{V}_{i,1}$的放缩结果含有未知并且与二阶误差$z_{i,2}$有关的函数项，因此需要在二阶虚拟控制器中进行相应设计、估计处理。于是，为了处理与二阶误差$z_{i,2}$相关的未知项以及对二阶误差$z_{i,2}$本身的收敛性进行控制，设计如下针对第二阶系统的Lyapunov函数。

$$V_{i,2} = V_{i,1} + \frac{1}{2}z_{i,2}^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{i,2}^2 \qquad i = 1, 2, \cdots, N \qquad (28)$$

针对如式(27)中所示的未知非线性项等使用RBF神经网络进行估计，定义RBF神经网络的权值向量为$W_2 = [W_{21}, W_{22}, \cdots, W_{2k}]$，其中$k$为第二阶系统使用的RBF神经网络的神经节点数目[36-37]。定义$\theta_{i,2}$用于估计在设计二阶虚拟控制器时使用的RBF神经网络权值的最大值的模长。

$$\theta_{i,2} = \max\left\{\frac{1}{f_0}\| W_{2,l}\|^2,\ l = 1, 2, \cdots, k\right\}$$

$i = 1, 2, \cdots, N$　　(29)

$\hat{\theta}_{i,2}$代表$\theta_{i,2}$的估计值，并定义$\tilde{\theta}_{i,2}$代表针对$\theta_{i,2}$进行估计时产生的误差值，其表达式如下。

$$\tilde{\theta}_{i,2} = \theta_{i,2} - \hat{\theta}_{i,2} \qquad i = 1, 2, \cdots, N \qquad (30)$$

研究在这里引入三阶误差项。由于使用的动力学模型中存在对于饱和输入的要求，所以为了尽可能减少输入饱和带来的对于控制力设计的影响，针对第三阶系统所设计的三阶误差可以进行如下设计。

$$\dot{\hbar}_i = -\hbar_i + g(U_i) - U_i \qquad i = 1, 2, \cdots, N \qquad (31)$$

$$z_{i,3} = a_i - \alpha_{i,2} - \hbar_i \qquad i = 1, 2, \cdots, N \qquad (32)$$

式(31)意味着将对饱和输入进行近似时产生的误差进行滤波处理，以防止在后续过程中需要对误差求导而导致的复杂计算，$\hbar_i$表示经过一阶滤波器后的饱和输入近似处理误差。式(32)中$\alpha_{i,2}$代表着二阶虚拟控制力，接下来需要对$\alpha_{i,2}$进行设计来保证虚拟编组列车控制系统的稳定性。

对二阶Lyapunov函数求导，并代入式(32)的三阶误差，可以化简得到二阶Lyapunov函数。

$$\dot{V}_{i,2} = \dot{V}_{i,1} + z_{i,2}\frac{\partial f_{i,v}}{\partial v_i}\alpha_{i,2} + z_{i,2}z_{i,3}\frac{\partial f_{i,v}}{\partial v_i} + z_{i,2}\frac{\partial f_{i,v}}{\partial v_i}\hbar_i - z_{i,2}\dot{\alpha}_{i,1} - \tilde{\theta}_{i,2}\dot{\hat{\theta}}_{i,2} \qquad i = 1, 2, \cdots, N \qquad (33)$$

结合式(33)中$\dot{V}_{i,2}$的函数，可以设计如下的RBF神经网络对$z_{i,2}$的未知项进行估计。

$$F_{i,2} = \frac{1}{\zeta_i^2 - z_{i,1}^2}\phi_i z_{i,1} f_{i,v}(\ell_{i,1}) + \frac{\partial f_{i,v}}{\partial v_i}\hbar_i - \dot{\alpha}_{i,1}$$

$i = 1, 2, \cdots, N$　　(34)

结合RBF神经网络的性质以及杨氏不等式，可以进行如下的放缩。

$$z_{i,2}F_{i,2} \leqslant \frac{\theta_{i,2}}{2p_{i,2}}z_{i,2}^2 S_{i,2}^T(Z_{i,2})S_{i,2}(Z_{i,2}) + \frac{p_{i,2}}{2} + \frac{f_{i,2}z_{i,2}^2}{2} + \frac{\bar{\delta}_i^2}{2f_{i,2}} \qquad i = 1, 2, \cdots, N \qquad (35)$$

其中$Z_{i,2} = [x_{i-1}, x_i, v_{i-1}, v_i, x_{n+1}, \hbar_i]^{\mathrm{T}}$代表针

对二阶系统所设计的RBF神经网络的输入向量值，$p_{i,2}$和$f_{i,2}$代表杨氏不等式的系数，其在满足正数的基础上可以任意调节。然后将式(35)代入式(33)，可得到式(36)。

$$\dot{V}_{i,2} \leqslant \dot{V}_{i,1} + z_{i,2}\frac{\partial f_{i,v}}{\partial v_i}\alpha_{i,2} + z_{i,2}z_{i,3}\frac{\partial f_{i,v}}{\partial v_i} + \frac{\theta_{i,2}}{2p_{i,2}}z_{i,2}^2 S_{i,2}^T(Z_{i,2})S_{i,2}(Z_{i,2}) + \frac{p_{i,2}}{2} + \frac{f_{i,2}z_{i,2}^2}{2} + \frac{\bar{\delta}_{i,2}^2}{2f_{i,2}} - \tilde{\theta}_{i,2}\dot{\tilde{\theta}}_{i,2} - \frac{1}{\zeta_i^2 - z_{i,1}^2}\phi_i z_{i,1}z_{i,2}f_{i,v}(\ell_{i,1})$$

$$i = 1, 2, \cdots, N \tag{36}$$

针对式(36)中存在的各项，可以设计二阶虚拟控制量$\alpha_{i,2}$和自适应控制率$\dot{\hat{\theta}}_{i,2}$如下。

$$\alpha_{i,2} = \frac{1}{\dfrac{\partial f_{i,v}}{\partial v_i}}\left(-k_{i,2}z_{i,2} - \frac{f_{i,2}}{2}z_{i,2} - \frac{\hat{\theta}_{i,2}}{2p_{i,2}}z_{i,2}^2 S_{i,2}^T(Z_{i,2})S_{i,2}(Z_{i,2})\right) \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{37}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{i,2} = \frac{1}{2p_{i,2}}z_{i,2}^2 S_{i,2}^T(Z_{i,2})S_{i,2}(Z_{i,2}) - c_{i,2}\hat{\theta}_{i,2}$$

$$i = 1, 2, \cdots, N \tag{38}$$

其中$k_{i,2}$和$c_{i,2}$均是可以任意调节的正常数。为证明稳定性，将式(37)和式(38)代入式(36)可以得到

$$\dot{V}_{i,2} \leqslant -k_{i,1}V_{i,1} - k_{i,2}z_{i,2}^2 - \frac{c_{i,2}}{2}\tilde{\theta}_{i,2}^2 + \Delta_{i,1} + \Delta_{i,2} + z_{i,2}z_{i,3}\frac{\partial f_{i,v}}{\partial v_i} \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{39}$$

$$\Delta_{i,2} = \frac{p_{i,2}}{2} + \frac{\bar{\delta}_{i,2}^2}{2f_{i,2}} + \frac{c_{i,2}}{2}\theta_{i,2}^2 \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{40}$$

式(39)中的放缩结果中存在着与三阶误差$z_{i,3}$有关的未知项，需要在设计针对三阶系统的控制力，即系统的实际控制力进行处理：

同理于式(28)，为了处理与三阶误差$z_{i,3}$相关的未知项以及对三阶误差$z_{i,3}$本身的值进行限制，设计如下的针对第三阶系统的Lyapunov函数。

$$V_{i,3} = V_{i,2} + \frac{1}{2}z_{i,3}^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{i,3}^2 \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{41}$$

式中：$\theta_{i,3}$表示针对处理三阶误差时产生的非线性未知项所设计的RBF神经网络的最大权值的范数的最大值；$\hat{\theta}_{i,3}$和$\tilde{\theta}_{i,3}$分别表示对于$\theta_{i,3}$的估计值与估计误差。对式(41)求导，可以得到式(42)。

$$\dot{V}_{i,3} = \dot{V}_{i,2} + z_{i,3}\frac{1}{\tau_i}sat(U_i(t - h_i)) - \frac{1}{\tau_i}z_{i,3}a_i - z_{i,3}\left(\frac{1}{\tau_i}(r_i + w_i) + c_2 a_i + 2c_3 a_i v_i + \dot{w}_i + \dot{\alpha}_{i,2}\right) + z_{i,3}\hbar_i - z_{i,3}g(U_i) + z_{i,3}U_i - \tilde{\theta}_{i,3}\dot{\hat{\theta}}_{i,3} \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{42}$$

针对式(42)，在此先对只含惰性延时的项用RBF神经网络进行处理，在后文将会设计四阶Lyapunov函数对惰性延时和控制系统延时的耦合项进行处理。结合非线性项，需要用RBF神经网络进行估计的值进行总结的多项式如下。

$$F_{i,3} = -\frac{1}{\tau_i}(r_i + w_i) - c_2 a_i + 2c_3 a_i v_i - \dot{\alpha}_{i,2} - \dot{w}_i - z_{i,2}z_{i,3}\frac{\partial f_{i,v}}{\partial v_i} - \frac{1}{\tau_i}a_i - \hbar_i + 3z_{i,3}^2 + \exp(h_i)(b_{i,1} + z_{i,3}\dot{g}_{i,\max}^2 + \exp(h_i)b_{i,2}z_{i,3}\hat{\theta}_{i,3}^2(S^T(Z_{i,3})S(Z_{i,3}))^2\dot{g}_{i,\max}^2 - g(U_i) \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{43}$$

其中$b_{i,1}$和$b_{i,2}$为未知函数，其会在后面进行定义。与式(35)的放缩同理，用RBF神经网络对式(43)进行估计并代入式(42)进行化简，可以得到

$$\dot{V}_{i,3} \leqslant \dot{V}_{i,2} + z_{i,3}U_i + \frac{\theta_{i,3}}{2p_{i,3}^2}z_{i,3}^2 S_{i,3}^T(Z_{i,3})S_{i,3}(Z_{i,3}) + \frac{p_{i,3}}{2} + \frac{f_{i,3}z_{i,3}^2}{2} + \frac{\bar{\delta}_{i,3}^2}{2f_{i,3}} + z_{i,3}\left(\frac{1}{\tau_i}(sat(U_i(t - h_i)))\right) - \tilde{\theta}_{i,3}\dot{\hat{\theta}}_{i,3} - z_{i,2}z_{i,3}\frac{\partial f_{i,v}}{\partial v_i} - \dot{g}_{i,\max}^2(exp(h_i)b_{i,1}z_{i,3}^2 + exp(h_i)b_{i,2}z_{i,3}^2\hat{\theta}_{i,3}(S^T(Z_{i,3})S(Z_{i,3}))^2) - 3z_{i,3}^2$$

$$i = 1, 2, \cdots, N \tag{44}$$

其中$Z_{i,3} = [x_{i-1}, v_{i-1}, x_i, v_i, a_i, x_{i,n+1}, \hat{\theta}_{i,2}, \hbar_i, \hat{\theta}_{i,3}, z_{i,3}]^{\mathrm{T}}$，$p_{i,3}$和$f_{i,3}$是杨氏不等式的系数，在满足正数条件下可任意调节。

根据式(44)中对$V_{i,3}$的放缩关系，为了消除由于使用RBF神经网络、饱和约束以及进行杨氏不等式进行放缩等操作带来的误差，可以设计如下的实际控制输入U_i和自适应律$\dot{\hat{\theta}}_{i,3}$。

$$U_i = -k_{i,3}z_{i,3} - \frac{\hat{\theta}_{i,3}}{2p_{i,3}}z_{i,3}S_{i,3}^T(Z_{i,3})S_{i,3}(Z_{i,3}) - \frac{f_{i,3}z_{i,3}}{2} \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{45}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{i,3}=\frac{1}{2p_{i,3}}z_{i,3}^2S_{i,3}^2(Z_{i,3})S_{i,3}(Z_{i,3})-c_{i,3}\hat{\theta}_{i,3}$$

$$i=1,2,\cdots,N \tag{46}$$

为证明 Lyapunov 稳定性，将式(45)和式(46)代入式(44)中，可以得到

$$\dot{V}_{i,3}\leqslant -k_{i,1}V_{i,1}-k_{i,2}z_{i,2}^2-\frac{c_{i,2}}{2}\tilde{\theta}_{i,2}^2+\Delta_{i,1}+\Delta_{i,2}-k_{i,3}z_{i,3}^2+\frac{p_{i,3}}{2}+\frac{\bar{\delta}_{i,3}^2}{2f_{i,3}}-\frac{c_{i,3}}{2}\tilde{\theta}_{i,3}^2+\frac{c_{i,3}}{2}\theta_{i,2}^2+z_{i,3}\left(\frac{1}{\tau_i}(sat(U_i(t-h_i)))-\dot{g}_{i,\max}^2(\exp(h_i)b_{i,1}z_{i,3}^2+\exp(h_i)b_{i,2}z_{i,3}^2\hat{\theta}_{i,3}S^T(Z_{i,3})S(Z_{i,3}))-3z_{i,3}^2\right)$$

$$i=1,2,\cdots,N \tag{47}$$

为处理惰性延时和控制系统延时的耦合项，将式(47)中含有控制系统延时的未知项进行如下放缩。

$$\frac{z_{i,3}}{\tau_i}(sat(U_i(t-h_i)))\leqslant z_{i,3}\frac{1}{\tau_i}(g(U_i(t-h_i))+\rho(U_i(t-h_i)))\leqslant 3z_{i,3}^2+b_{i,1}z_{i,3}^2(t-h_i)\dot{g}^2(U_i(t-h_i))(1+\varsigma_{i,3}^2)+\frac{1}{\tau_i^2}U_{i,M}^2(1-tanh(1))^2\quad i=1,2,\cdots,N \tag{48}$$

$$b_{i,1}=\frac{1}{\tau_i^2}\varrho_{i,1}^2\quad i=1,2,\cdots,N \tag{49}$$

$$b_{i,2}=\frac{1}{\tau_i^2}\varrho_{i,2}^2\quad i=1,2,\cdots,N \tag{50}$$

根据 Lyapunov-Krasovskii 理论，可以设计如下的四阶 Lyapunov 函数对含有延时的误差项以及估计项进行约束。

$$V_{i,4}=\exp(-(t-h_i))\int_{t-h_i}^{t}(\varsigma_{i,3}(s)+z_{i,3}^2(s))\dot{g}^2(U_i(s))\mathrm{d}s\quad i=1,2,\cdots,N \tag{51}$$

对其进行求导可得

$$\dot{V}_{i,4}\leqslant -V_{i,4}-(b_{i,1}z_{i,3}^2(t-h_i)+b_{i,2}z_{i,3}^2(t-h_i)\varsigma_{i,3}^2(t-h_i))\dot{g}^2(U_i(t-h_i))+\exp(h_i)(b_{i,1}z_{i,3}^2\dot{g}_{i,\max}^2+b_{i,2}z_{i,3}^2\varsigma_{i,3}^2\dot{g}_{i,\max}^2)$$

$$i=1,2,\cdots,N \tag{52}$$

最后，结合式(52)与式(47)，可以设计针对具有未知控制系统延时与执行器惰性延时的虚拟编组列车控制系统的总 Lyapunov 函数方程，如下所示。

$$V_i=V_{i,3}+V_{i,4}\quad i=1,2,\cdots,N \tag{53}$$

为证明其稳定性，可对其求导。

$$\dot{V}_i=\dot{V}_{i,3}+\dot{V}_{i,4}\leqslant -K_iV_i+\Delta_{i,1}+\Delta_{i,2}+\Delta_{i,3}$$

$$i=1,2,\cdots,N \tag{54}$$

$$K_i=\max\{k_{i,1},k_{i,2},k_{i,3},1\}\quad i=1,2,\cdots,N \tag{55}$$

$$\Delta_{i,3}=\frac{p_{i,3}}{2}+\frac{\bar{\delta}_{i,3}^2}{2f_{i,3}}-\frac{c_{i,3}}{2}\tilde{\theta}_{i,3}^2+\frac{c_{i,3}}{2}\theta_{i,2}^2+\frac{1}{\tau_i^2}U_{i,M}^2(1-\tanh(1))^2\quad i=1,2,\cdots,N \tag{56}$$

对式(56)进行微分方程的求解，可以求得

$$\dot{V}_i(t)\leqslant V_i(0)e^{-K_it}+\frac{\Delta_{i,1}+\Delta_{i,2}+\Delta_{i,3}}{K_i}(1-e^{-K_it})$$

$$i=1,2,\cdots,N \tag{57}$$

通过式(57)可以得知，随着时间 t 的增长，针对具有未知控制系统延时与执行器惰性延时的情形下所设计的控制器会让虚拟编组内单元列车的追踪间距误差、速度误差逐渐收敛到一个固定的数值范围内，即保证了在运行过程中虚拟编组列车的运行稳定性。同时，当通过障碍 Lyapunov 函数对虚拟编组内单元列车的追踪间距的误差进行约束控制时，可以得到如下的不等式。

$$|e_i|<\phi_i^{-1}\zeta_i=\begin{cases}\dfrac{1}{(\lambda_i-\beta_i(\frac{T_i-t}{T_i})^2)}\zeta_i, & 0<t<T_i\\ \dfrac{1}{\lambda_i}\zeta_i, & t\geqslant T_i\end{cases}$$

$$i=1,2,\cdots,N \tag{58}$$

根据式(58)可知，λ_i 决定了在 $t\geqslant T_i$ 后，误差的收敛范围大小；$\lambda_i-\beta_i$ 决定了在 $t<T_i$ 时对约束范围的放大程度，因此，可以根据实际的运营场景需求变化 λ_i 和 β_i 的值来实现相应的控制指标。

3　仿真实验

研究进行了多组对比实验，以说明虚拟编组列车内部的执行器惰性延时与控制系统延时未知的情形下所设计的虚拟编组自适应控制方法能够保证虚拟编组的运行稳定以及所使用的预设时间法的有效性。仿真以中国高速铁路动车组列车为研究对象。考虑虚拟编组列车群组内包含 1 列领航列车与 3 列跟随列车，分别编号为单元列车 0，1，2，3。虚拟编组内单元列车的参数信息如表 1 所示，虚拟编组内单元列车的初始参数信息如表 2 所示，高速铁路线路附加阻力数据如表 3 所示。同时在这里假定虚拟编组内单元列车的追踪间距误差在 2 m 内并且速度和控制力趋于稳定时即完成了控制目标。

表1　虚拟编组内单元列车的参数信息

Tab.1　Parameter information of unit trains in virtual coupling

名称	数据
单元列车最大限速/(m/s)	100
单元列车最小限速/(m/s)	50
戴维斯系数c_0/(N/kN)	0.954 2
戴维斯系数c_1/(N/kN)	0.000 271
戴维斯系数c_2/(N/kN)	0.000 093 26
单元列车控制系统延时/s	0.4
单元列车执行器惰性延时/s	0.08
领航列车最大牵引/制动力/(N/kN)	1
跟随列车1最大牵引/制动/(N/kN)	1.005
跟随列车2最大牵引/制动/(N/kN)	0.998
跟随列车3最大牵引/制动/(N/kN)	1

表2　虚拟编组内单元列车的初始参数信息

Tab.2　Initial parameter information of unit trains in virtual coupling

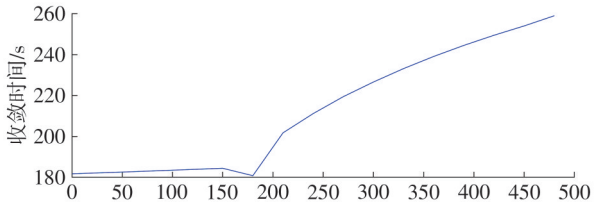
单元列车i	0	1	2	3
单元列车初始位置$x_{i,0}$/m	4 000	3 500	3 200	2 800
单元列车初始速度$v_{i,0}$/(m/s)	60	62	59	60
单元列车初始加速度$a_{i,0}$/(m/s^2)	0	0	0	0
单元列车的安全裕度l_i/m	—	160	160	160
单元列车追踪间距调整系数χ_i	—	2.5	2.5	2.5

表3　高速铁路线路附加阻力数据

Tab.3　Additional resistance data of high speed railway lines

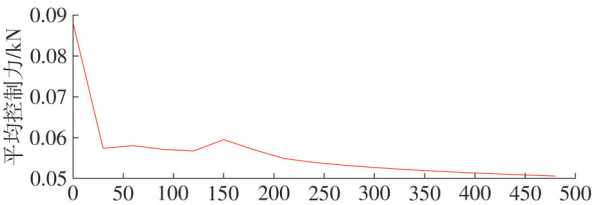
位移区间/km	附加阻力/(N/kN)	位移区间/km	附加阻力/(N/kN)
(0，0.46)	0	(0.46，1.01)	2×10^{-6}
(1.01，1.7)	0	(1.7，2.4)	1.5×10^{-6}
(2.4，3.5)	2.97×10^{-4}	(3.5，5.6)	9×10^{-4}
(5.6，6.45)	0	(6.45，7.4)	-1×10^{-5}
(7.4，8.95)	8×10^{-5}	(8.95，10.9)	9.6×10^{-6}
(10.9，14)	0	(14，15.3)	3×10^{-5}
(15.3，16.75)	1.8×10^{-6}	(16.75，19.05)	-1.8×10^{-4}
(19.05，20.25)	5×10^{-4}	(20.25，21.7)	0
(21.7，24.1)	1.8×10^{-5}	(24.1，25.5)	-1.69×10^{-4}
(25.5，26.9)	0	(26.9，29.1)	-2.3×10^{-4}
(29.1，31.4)	0	(31.4，32.75)	-3×10^{-4}
(32.75，34.8)	0	(34.8，37.1)	-2.3×10^{-4}
(37.1，39.2)	7×10^{-4}	(39.2，41)	-1.5×10^{-4}
(41，43)	0	(43，46.7)	1.8×10^{-5}

首先，研究对预设时间常数进行了分析。仿真选取跟随列车1为例，预设时间常数T_1分别在0~480 s中间隔30 s取值，并将其余跟随列车的预设时间常数T都设置为200 s。在该条件下做蒙特卡洛仿真，求跟随列车1的追踪间距误差收敛到2 m的时间和平均控制力，不同预设时间参数下跟随列车1的控制性能如图2所示。



a　不同预设时间参数下跟随列车1的收敛时间

a　Convergence time of follower train 1 under different prescribed-time parameters



b　不同预设时间参数下跟随列车1的平均控制力

b　Average control force of follower train 1 under different prescribed-time parameters

图2　不同预设时间参数下跟随列车1的控制性能

Fig.2　Control performance of follower train 1 under different prescribed-time parameters

由图2a和图2b可以看出，列车收敛时间整体呈现随预设时间参数同步增大的趋势，平均控制力则相反。平均控制力大意味着控制器在控制初期可能存在快速波动和大幅调节。但在预设时间参数取180 s时，可以达到在平均控制力较低的同时收敛速度较快。用同样的方法，并考虑跟随列车2，3的最大控制力约束和预设时间约束，研究将T_1，T_2和T_3分别设置为180 s，320 s和330 s。根据该预设时间常数对所设计的虚拟编组列车控制器进行数值仿真。

接着，为了说明研究所设计的虚拟编组列车控制器能够保证含有未知的执行器惰性延时与控制系统延时下列车运行的鲁棒性，采用反步控制法针对式(1)中所示模型进行控制器设计算法同样条件下的对比实验。对比的反步控制法未考虑控制系统延时h_i和执行器惰性延时τ_i，控制器结构基本相同，在式(41)步骤产生变化，代入不含控制系统延时的饱和函数$sat(U_i(t))$，通过RBF神经网络估计，可得到不考虑固有参数不确定的预设时间反步控制量。

$$U_i = -k_{i,3}z_{i,3} - \frac{\hat{\theta}_{i,3}}{2p_{i,3}}z_{i,3}S_{i,3}^T(Z_{i,3})S_{i,3}(Z_{i,3}) - z_{i,3}\hbar_i - \frac{f_{i,3}z_{i,3}}{2} - \frac{z_{i,3}}{2}(sat(U_i(t)))^2 \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{59}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{i,3} = \frac{1}{2p_{i,3}}z_{i,3}^2S_{i,3}^2(Z_{i,3})S_{i,3}(Z_{i,3}) - c_{i,3}\hat{\theta}_{i,3} \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{60}$$

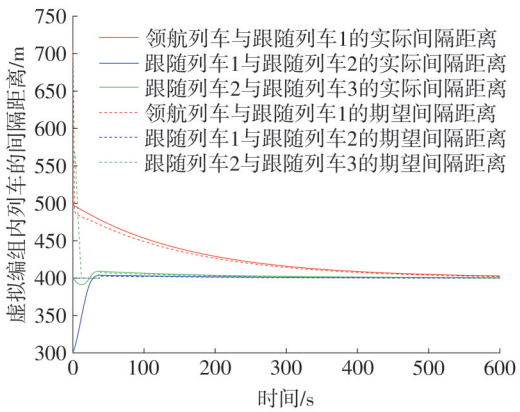
式(59)和(60)中各项参数的定义均与研究所设计的控制器相同，一阶和二阶虚拟控制力的设计过程也相同，但在RBF的估计项中未考虑控制系统延时h_i和执行器惰性延时τ_i。

使用考虑与未考虑固有参数不确定的算法下虚拟编组内单元列车运行情况对比如图3所示。图3a、图3c、图3e展示了在使用了设计的控制算法下，虚拟编组整体运行情况。可以看到，在控制器使用设计的控制算法时，虚拟编组内单元列车能够在含有追踪间距约束、速度约束以及饱和约束的前提下完成平稳追踪，虚拟编组内单元列车的追踪间距、速度均能完成相应的控制目标，并且加速度最终也会随着控制力趋于平稳而随着时间趋近于0，保证了虚拟编组内单元列车从编组建立到巡航整个过程中运行的平稳。图3b、图3d、图3f展示了在使用基于模型(1)并结合反步控制方法所设计的算法以及同样使用如表1和表2所示参数的基础上，虚拟编组整体运行情况。由于模型中并未考虑固有参数不确定，在该情形中，虚拟编组单元列车的追踪间距、速度相较于研究设计的算法都并未显现太大劣势，但跟随列车3的控制力由于前面2列跟随列车累积的延迟效应，导致了很大的延后，产生了较大的值和摆动。通过对图3a与图3b、图3c与图3d、图3e与图3f的仿真后期进行对比，可以看到虚拟编组内单元列车在使用未考虑不确定参数的控制算法时，由于无法使用有限的控制力使得虚拟编组单元列车跟踪到控制目标，加上仿真后期的附加阻力大且不稳定，列车运行状态变化更频繁，导致了控制力输出的大幅波动。而同时由于控制力无法补偿因固有不确定参数带来的影响，因此导致虚拟编组单元列车的速度不断发生变化，进一步导致追踪间距随着时间不断变化，造成了虚拟编组单元列车运行的不稳定，因此不能使用这种算法进行虚拟编组的控制。

接下来，通过对比实验来说明研究所设计的控制算法的收敛性能。不同约束方法的约束范围与虚拟编组跟随列车运行情况示意图如图4所示，展示了在不同的约束方法下其约束范围的变化情况以及虚拟编组内单元列车的追踪间距变化情况。图4a、图4c、图4e展示了在预设时间法下针对不同单元列车的追踪间距约束范围的变化情况以及实际追踪间距变化的情况，可以看到使用预设时间法下单元列车的追踪间距始终位于预设时间法下设置的约束范围内，保证了虚拟编组列车的运行安全。图4b、图4d、图4f展示了为保证虚拟编组内单元列车的追踪间距的误差在非线性距离间隔范围内需要设置的障碍Lyapunov函数的约束范围以及单元列车的追踪间距变化情况。由于虚拟编组内列车的初始追踪间距大小超过了障碍Lyapunov函数在初始条件下设定的追踪间距约束的大小，因此需要使用预设时间法来扩大障碍Lyapunov函数在预设时间T_i内的约束范围来保证列车运行安全的同时又保证控制算法的有效性。虚拟编组内跟随列车的预设时间常数与实际收敛到2 m内的时间如表4所示，由于预设时间函数的性质，跟随列车i的追踪间距可以在预设时间参数T_i内收敛到障碍Lyapunov函数约束的范围内，保证了虚拟编组可以在事先给定的时间内完成控制目标的性能。

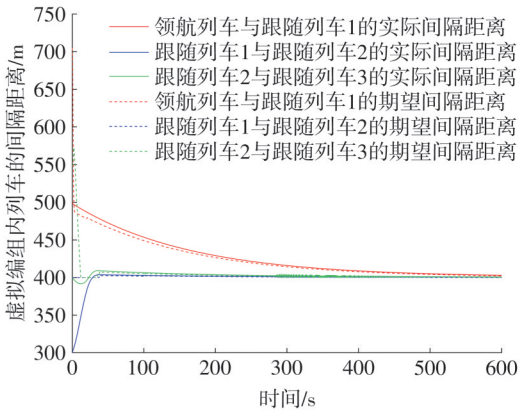
为了进一步说明控制系统延时对于算法收敛的影响，研究固定执行器惰性延时为0.4 s，改变控制系统延时，以0.08 s，0.8 s和8 s为算例进行了仿真。跟随列车的控制系统延时变化后追踪间距误差收敛时间的变化情况如表5所示，控制系统延时不同时单元列车的运行情况对比示意图如图5所示，控制系统延时呈10倍的数量级增长时，单元列车的收敛时间增加并不明显。因此，可以认为，算法对于控制系统延时的鲁棒性较强。

最后，研究对执行器惰性延时对控制器的影响做了进一步说明。固定控制系统延时为0.08 s，分别取0.2 s，0.4 s，0.6 s，0.8 s作为执行器的延时并对控制力输出进行仿真。执行器惰性延时不同时跟随列车1的控制力输出对比示意图如图6所示，在控制力为负的阶段，随着执行器惰性延时变小，控



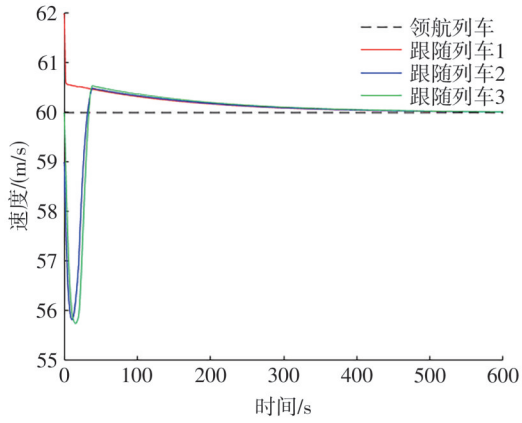
a　考虑固有参数不确定下列车追踪间距–时间示意图

a　Schematic diagram of train tracking interval–time considering inherent parameter uncertainties



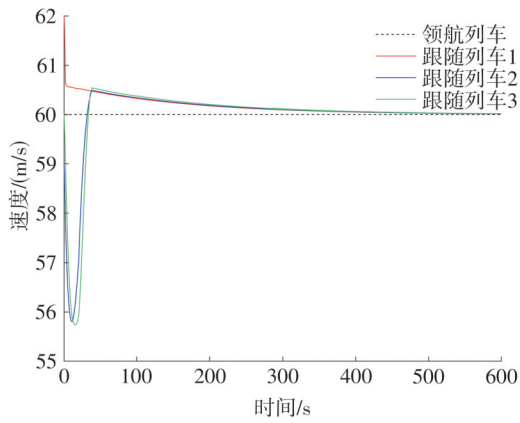
b　未考虑固有参数不确定下列车追踪间距–时间示意图

b　Schematic diagram of train tracking interval–time without considering inherent parameter uncertainties



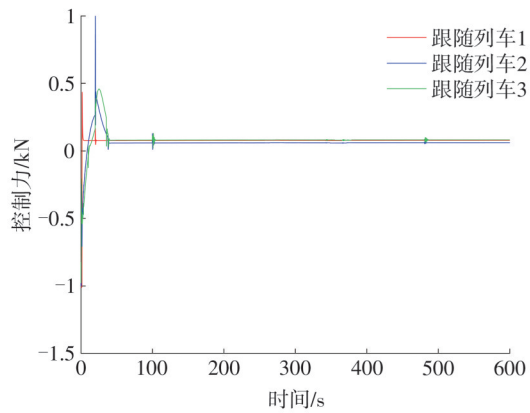
c　考虑固有参数不确定下列车速度–时间示意图

c　Schematic diagram of train speed–time considering inherent parameter uncertainties



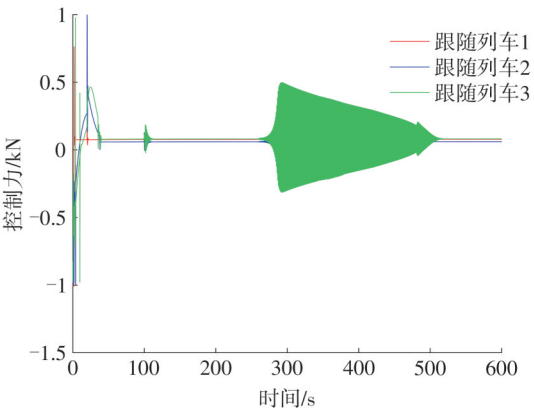
d　未考虑固有参数不确定下列车速度–时间示意图

d　Schematic diagram of train speed–time without considering inherent parameter uncertainties



e　考虑固有参数不确定下列车控制力–时间示意图

e　Schematic diagram of train control force–time considering inherent parameter uncertainties

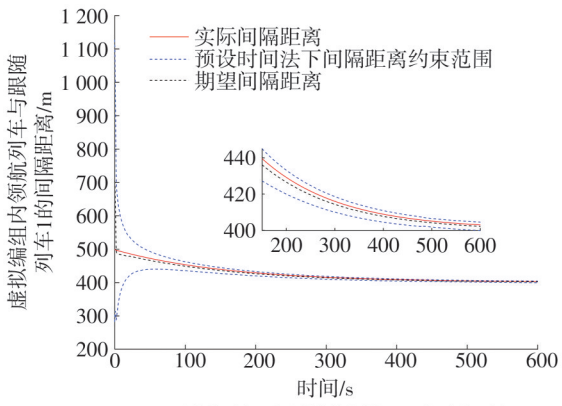


f　未考虑固有参数不确定下列车控制力–时间示意图

f　Schematic diagram of train control force–time without considering inherent parameter uncertainties

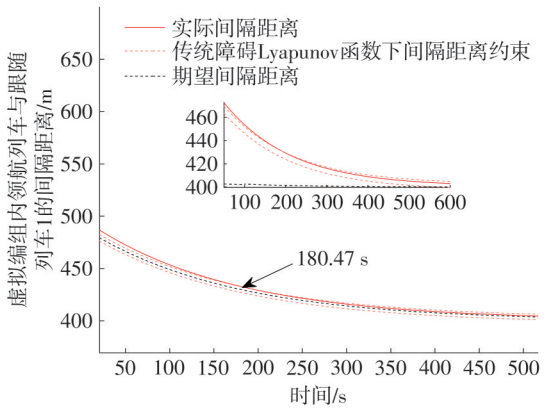
图3　使用考虑与未考虑固有参数不确定的算法下虚拟编组内单元列车运行情况对比

Fig.3　Comparison of operation conditions of unit trains in virtual coupling using algorithms with and without considering inherent parameter uncertainty



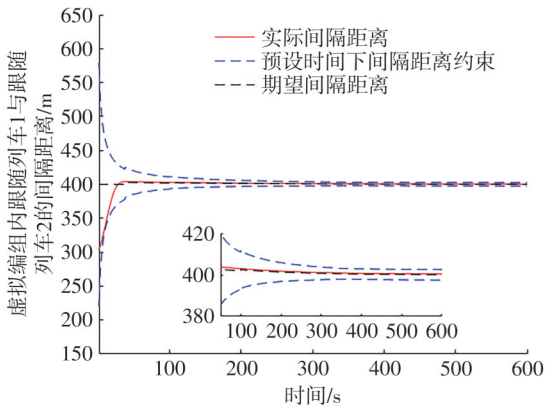
a　预设时间法预设范围与跟随列车1的追踪间距–时间示意图

a　Schematic diagram of tracking interval–time between preset range of prescribed-time control and follower train 1



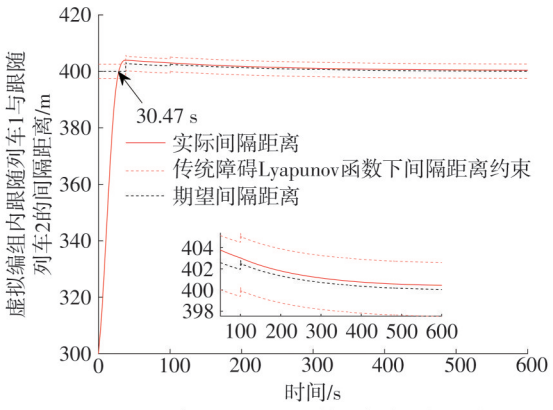
b　障碍Lyapunov函数约束范围与跟随列车1的追踪间距–时间示意图

b　Schematic diagram of tracking interval–time between barrier Lyapunov function constraint range and follower train 1



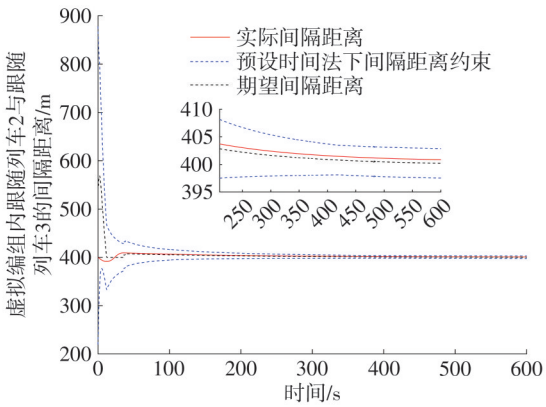
c　预设时间法预设范围与跟随列车2的追踪间距–时间示意图

c　Schematic diagram of tracking interval–time between preset range of prescribed-time control and follower train 2



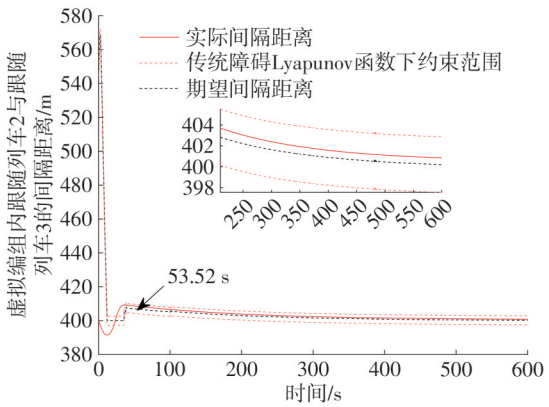
d　障碍Lyapunov函数约束范围与跟随列车2的追踪间距–时间示意图

d　Schematic diagram of tracking interval–time between barrier Lyapunov function constraint range and follower train 2



e　预设时间法预设范围与跟随列车3的追踪间距–时间示意图

e　Schematic diagram of tracking interval–time between preset range of prescribed-time control and follower train 3



f　障碍Lyapunov函数约束范围与跟随列车3的追踪间距–时间示意图

f　Schematic diagram of tracking interval–time between barrier Lyapunov function constraint range and follower train 3

图4　不同约束方法的约束范围与虚拟编组跟随列车运行情况示意图

Fig.4　Schematic diagram of constraint ranges of different constraint methods and operation conditions of follower trains in virtual coupling

表4　虚拟编组内跟随列车的预设时间常数与实际收敛到2 m内的时间　s

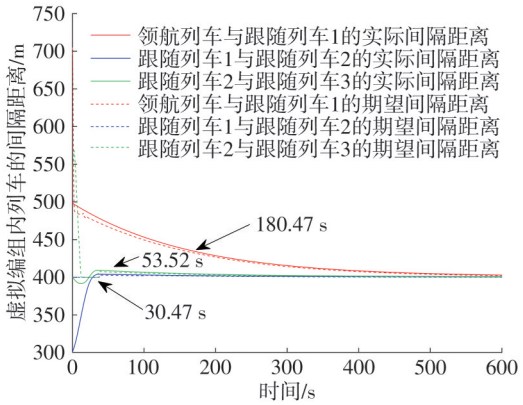
Tab.4　Prescribed time constants and actual convergence time to within 2 m of follower trains in virtual coupling

跟随列车i	跟随列车i的预设时间常数	跟随列车i的追踪间距误差实际收敛到2 m内的时间
1	180	180.47
2	320	30.47
3	330	53.52

表5　跟随列车的控制系统延时变化后追踪间距误差收敛时间的变化情况　s

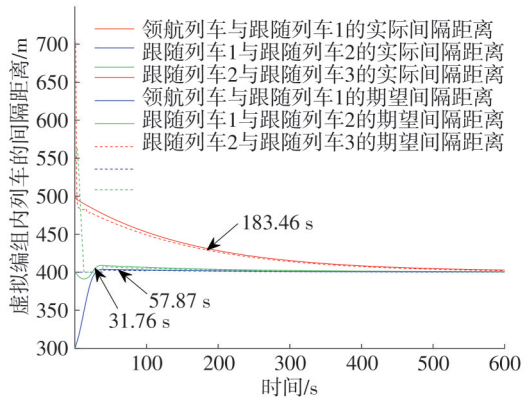
Tab.5　Variation of convergence time of tracking interval errors after changes in control system delays of follower trains

控制系统延时	跟随列车1收敛时间	跟随列车2收敛时间	跟随列车3收敛时间
0.08 s	180.47	30.47	53.52
0.8 s	183.46	31.76	57.87
8 s	186.69	40.22	60.20



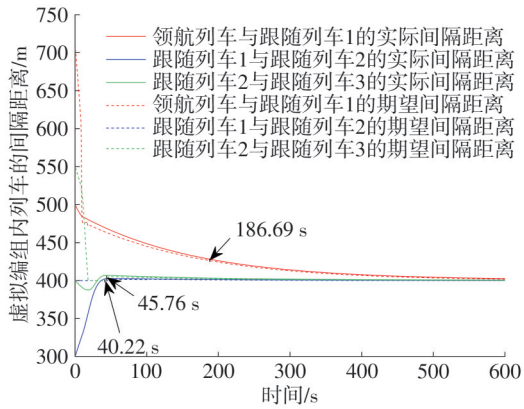
a　控制系统延时0.08 s时单元列车追踪间距

a　Tracking interval of unit trains when control system has a delay of 0.08 s



b　控制系统延时0. 8 s时单元列车追踪间距

b　Tracking interval of unit trains when control system has a delay of 0.8 s



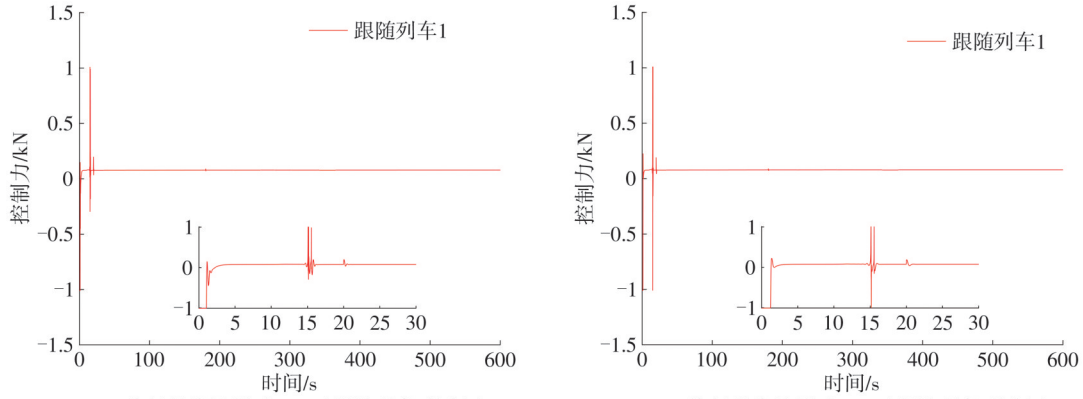
c　控制系统延时8 s时单元列车追踪间距

c　Tracking interval of unit trains when control system has a delay of 8 s

图5　控制系统延时不同时单元列车的运行情况对比示意图

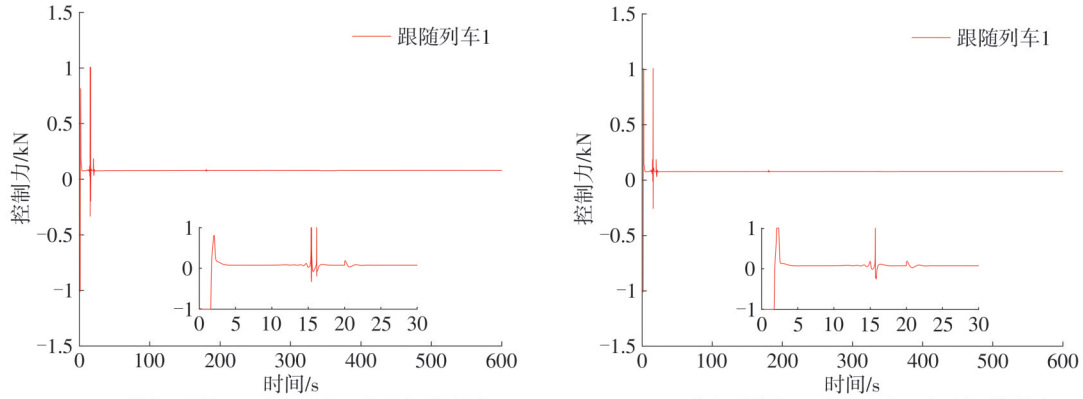
Fig.5　Comparative schematic diagram of operations of unit trains under different control system delays

制力的第一次输出持续时间更短。在第一次控制力的初步调节后，更大延时下的控制器在第二次调节输出的控制力幅值更大。原因是低延时的执行器对控制指令响应更快，在第一次负控制力调节阶段能够快速达到目标控制力控制列车制动，结束制动的响应也更快，大延时下的控制力作用慢导致反馈需要的虚拟控制力更大，自适应调节延后。



a　执行器惰性延时0.2 s时跟随列车1控制力
a　Control force of follower train 1 under actuator inertia delay of 0.2 s

b　执行器惰性延时0.4 s时跟随列车1控制力
b　Control force of follower train 1 under actuator inertia delay of 0.4 s



c　执行器惰性延时0.6 s时跟随列车1控制力
c　Control force of follower train 1 under actuator inertia delay of 0.6 s

d　执行器惰性延时0.8 s时跟随列车1控制力
b　Control force of follower train 1 under actuator inertia delay of 0.8 s

图6　执行器惰性延时不同时跟随列车1的控制力输出对比示意图

Fig.6　Comparative schematic diagram of control force output of follower train 1 under different actuator inertia delays

4　结论

为解决固有不确定参数的影响下虚拟编组列车的平稳跟踪控制问题，研究提出了在考虑执行器惰性延时与控制系统延时均为未知情况下虚拟编组列车的平稳追踪控制方法。在实验中比较了当虚拟编组列车使用和未使用考虑固有不确定参数下的算法时虚拟编组列车的运行情况，结果表明使用考虑固有不确定参数的算法可以有效地保证虚拟编组内单元列车的平稳追踪，验证了设计算法的鲁棒性；同时分析了预设时间法对于虚拟编组内单元列车运行的影响，使用该控制方法可以保证虚拟编组内单元列车在预先设定的时间内实现单元列车追踪间距误差的收敛，验证了算法的收敛性能；并且当减小预设时间法设定的时间参数时，可以提高单元列车追踪间距误差的收敛速度，进而加快完成控制目标的速度，提高算法的收敛速度。

参考文献：

[1] 张梦迪，黄　鑫，伍　峰，等. 国外铁路货运发展战略分析及对我国铁路发展的启示[J]. 铁道货运，2021，39(12)：86-91.
ZHANG Mengdi，HUANG Xin，WU Feng，et al. Strategy Analysis of Foreign Railway Freight Transport Development and Enlightenment on China Railway Development[J]. Railway Freight Transport，2021，39(12)：86-91.

[2] 中共中央、国务院.《交通强国建设纲要》[EB/OL]. (2019-09-19)[2025-03-13]. http：//www. gov. cn/gongbao/content/2019/content_5437132. htm.

[3] 刘文杰. 国家能源集团产业一体化运营模式下铁路运输能力提升研究[J]. 铁道货运，2023，41(9)：27-33.
LIU Wenjie. Research on Improvement of Railway Transportation Capacity under Industrial Integration Operation Mode in China Energy Investment[J]. Railway Freight Transport，2023，

41(9)：27-33.

[4] 黄静仪，张 琦. 基于虚拟编组技术的城市轨道交通列车延误跳停调整研究[J]. 铁道运输与经济，2024，46(2)：151-158.
HUANG Jingyi，ZHANG Qi. Research on Train Delay Skip-Stop Adjustment in Urban Rail Transit Based on Virtual Coupling Technology[J]. Railway Transport and Economy，2024，46(2)：151-158.

[5] 刘 岭. 基于虚拟耦合的列车群体智能控制技术研究及展望[J]. 铁路通信信号工程技术，2020，17(2)：1-9.
LIU Ling. Research and Prospect of Intelligent Control Technology for Virtually Coupled Train Formation[J]. Railway Signalling & Communication Engineering，2020，17(2)：1-9.

[6] BOCK U，VARCHMIN U. Enhancement of the Occupancy of Railroads Using "Virtually Coupled Train Formations"[D]. Frederiction：Technical University of Brunswick，1999.

[7] SU S，SHE J F，LI K C，et al. A Nonlinear Safety Equilibrium Spacing-Based Model Predictive Control for Virtually Coupled Train Set over Gradient Terrains[J]. IEEE Transactions on Transportation Electrification，2022，8(2)：2810-2824.

[8] LIU W H，SHANGGUAN W，SONG H Y，et al. A Virtual Coupling Operation Strategy Based on State Transition Considering Special Case[C]//2022 China Automation Congress (CAC). November 25-27，2022，Xiamen，China. IEEE，2023：5772-5777.

[9] CAO Y，YANG Y R，MA L C，et al. Research on Virtual Coupled Train Control Method Based on GPC & VAPF[J]. Chinese Journal of Electronics，2022，31(5)：897-905.

[10] XI W，HU M Y，WANG H W，et al. Formation Control for Virtual Coupling Trains with Parametric Uncertainty and Unknown Disturbances[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II：Express Briefs，2023，70(9)：3429-3433.

[11] 杨宏阔，侯 涛，陈 昱. 基于预测模糊PID控制算法的高速列车优化控制研究[J]. 铁道运输与经济，2022，44(8)：130-136.
YANG Hongkuo，HOU Tao，CHEN Yu. Research on Optimal Control of High Speed Trains Based on Predictive Fuzzy PID Control Algorithm[J]. Railway Transport and Economy，2022，44(8)：130-136.

[12] XUE Y J，WANG C L，DING C，et al. Observer-Based Event-Triggered Adaptive Platooning Control for Autonomous Vehicles with Motion Uncertainties[J]. Transportation Research Part C：Emerging Technologies，2024，159：104462.

[13] LIU Y，OU D X，YANG Y X，et al. A Method for Maintaining Virtually Coupled States of Train Convoys[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers，Part F：Journal of Rail and Rapid Transit，2023，237(2)：243-252.

[14] 李建雄. 面向动态编组和紧密追踪的虚拟编组列控方法研究[D]. 北京：北京交通大学，2021.

[15] LIU Y H. Saturated Robust Adaptive Control for Uncertain Non-Linear Systems Using a New Approximate Model[J]. IET Control Theory & Applications，2017，11(6)：870-876.

[16] CHEN B M，LEE T H，PENG K M，et al. Composite Nonlinear Feedback Control for Linear Systems with Input Saturation：Theory and an Application[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2003，48(3)：427-439.

[17] BOSKOVIC J D，LI S M，MEHRA R K. Robust Tracking Control Design for Spacecraft under Control Input Saturation[J]. Journal of Guidance，Control，and Dynamics，2004，27(4)：627-633.

[18] ROCHARD B P，SCHMID F. A Review of Methods to Measure and Calculate Train Resistances[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers，Part F：Journal of Rail and Rapid Transit，2000，214(4)：185-199.

[19] COLE C. Longitudinal Train Dynamics[M]. Boca Raton：CRC Press，2006.

[20] LIU W T，SU S，TANG T，et al. Study on Longitudinal Dynamics of Heavy Haul Trains Running on Long and Steep Downhills[J]. Vehicle System Dynamics，2022，60(12)：4079-4097.

[21] 焦世广，侯忠生. 运行时间区间可变的地铁列车无模型自适应迭代学习控制[J]. 控制理论与应用，2025(3)：642-648.
JIAO Shiguang，HOU Zhongsheng. Model-Free Adaptive Iterative Learning Control for Subway Train with Variable Operation Time Interval[J]. Control Theory & Applications，2025(3)：642-648.

[22] HANSEN H S，NAWAZ M U，OLSSON N. Using Operational Data to Estimate the Running Resistance of Trains. Estimation of the Resistance in a Set of Norwegian Tunnels[J]. Journal of Rail Transport Planning & Management，2017，7(1-2)：62-76.

[23] FELEZ J，KIM Y，BORRELLI F. A Model Predictive Control Approach for Virtual Coupling in Railways[J]. IEEE

Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2019, 20(7): 2728-2739.

[24] WU Q, SPIRYAGIN M, COLE C. Longitudinal Train Dynamics: An Overview[J]. Vehicle System Dynamics, 2016, 54(12): 1688-1714.

[25] IWNICKI S. Handbook of Railway Vehicle Dynamics[M]. Boca Raton: CRC/Taylor & Francis, 2006.

[26] 郭　欢. 基于多传感器融合的列车测速定位算法研究[D]. 成都：西南交通大学，2020.

[27] 周天奕. 列车组合测速定位技术优化及方法研究[D]. 南京：南京理工大学，2021.

[28] ZHANG Y, SU Y F, WANG X H. Distributed Adaptive Output Feedback Control for Multiagent Systems with Unknown Dynamics[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(3): 1367-1374.

[29] 孙伟杰，乔雨晨，彭云建. 基于障碍Lyapunov函数的未知控制方向非线性系统的约束鲁棒输出调节[J]. 控制理论与应用，2023，40(9)：1696-1701.
SUN Weijie, QIAO Yuchen, PENG Yunjian. Constraint Robust Output Regulation for Nonlinear Systems with Unknown Control Direction Based on a Barrier Lyapunov Function[J]. Control Theory & Applications, 2023, 40(9): 1696-1701.

[30] ZHU Y, ZHU F. Barrier-Function-Based Distributed Adaptive Control of Nonlinear CAVs with Parametric Uncertainty and Full-State Constraint[J]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2019, 104: 249-264.

[31] TEE K P, GE S S, TAY E H. Barrier Lyapunov Functions for the Control of Output-Constrained Nonlinear Systems[J]. Automatica, 2009, 45(4): 918-927.

[32] 周淑燕. 一类严格反馈系统可预设时间的保性能控制[D]. 重庆：重庆大学，2020.

[33] ZHOU S Y, SONG Y D, LUO X S. Fault-Tolerant Tracking Control with Guaranteed Performance for Nonlinearly Parameterized Systems under Uncertain Initial Conditions[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(11): 6805-6823.

[34] ZHANG J X, YANG G H. Fuzzy Adaptive Output Feedback Control of Uncertain Nonlinear Systems with Prescribed Performance[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 48(5): 1342-1354.

[35] ZHOU S Y, WANG X S, SONG Y D. Prescribed Performance Tracking Control under Uncertain Initial Conditions: A Neuroadaptive Output Feedback Approach[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2023, 53(11): 7213-7223.

[36] SHANG Y, CHEN B, LIN C. Consensus Tracking Control for Distributed Nonlinear Multiagent Systems *via* Adaptive Neural Backstepping Approach[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2020, 50(7): 2436-2444.

[37] 陈志勇，李　攀，叶明旭，等. 自动驾驶电动车辆基于参数预测的径向基函数神经网络自适应控制[J]. 中国机械工程，2024，35(6)：982-992.
CHEN Zhiyong, LI Pan, YE Mingxu, et al. RBF Neural Network Adaptive Control for Autonomous Electric Vehicles Based on Parameter Prediction[J]. China Mechanical Engineering, 2024, 35(6): 982-992.

(责任编辑　吴文娟)

(上接第107页)

股道分配方法研究[J]. 铁道科学与工程学报，2025，22(10)：4398-4411.
WANG Fujun, LIU Hongfei, CUI Li, et al. Research on Track Allocation Method under Heavy Haul Train Group[J]. Journal of Railway Science and Engineering, 2025, 22(10): 4398-4411.

[15] 吕苗苗，王一博，耿敬春，等. 群组运行模式下双线重载铁路空车调配方法研究[J]. 铁道学报，2025，47(9)：14-22.
LYU Miaomiao, WANG Yibo, GENG Jingchun, et al. Research on Empty Train Allocation Methods in Double-Track Heavy-Haul Railways under Group Operation Mode[J]. Journal of the China Railway Society, 2025, 47(9): 14-22.

[16] 蒋洁滢. 基于列车开行方案调整的高速铁路网络能力优化[D]. 成都：西南交通大学，2020.

[17] ZHOU L S, TONG L C, CHEN J H, et al. Joint Optimization of High Speed Train Timetables and Speed Profiles: A Unified Modeling Approach Using Space-Time-Speed Grid Networks[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2017, 97: 157-181.

[18] 张志文，冯文杰，胡　亮，等. 一种计及线路条件的重载铁路货运电力机车节能操纵方法[J]. 机车电传动，2024(5)：26-33.
ZHANG Zhiwen, FENG Wenjie, HU Liang, et al. Energy-Efficient Control Method for Freight Electric Locomotives on Heavy-Haul Railways Considering Track Conditions[J]. Electric Drive for Locomotives, 2024(5): 26-33.

(责任编辑　金　晶)