文章编号:1674-2869(2024)06-0671-05

量子Lenoir循环有效功率的优化

尹博今[1],殷 勇[*1,2],魏轩宇[1],廖宇新[1],张敬帅[1]
1. 武汉工程大学光电信息与能源工程学院、数理学院,湖北 武汉 430205;
2. 武汉工程大学热科学与动力工程研究所,湖北 武汉 430205

摘 要:应用有限时间热力学和量子热力学理论,建立量子Lenoir热机循环模型,工质为囚禁于一维无限深势阱中的n个无相互作用的费米子。导出了循环的功率、无量纲功率、效率、有效功率的表达式,研究了势阱宽度比与热漏系数对无量纲功率、效率以及有效功率的影响。结果表明:热漏系数对无量纲功率没有影响,而效率和有效功率随热漏系数的增大而减小。在有效功率达到最大值时的效率,相较于无量纲功率最大时的效率提升了45.8%,但此时的无量纲功率却仅比最高值下降了13.6%。因此,以有效功率为优化目标时,系统可以在牺牲部分功率的情况下获得更高的效率,使循环的综合性能更优,研究结果为Lenoir热机的优化提供了一种新的设计方案。

关键词:有限时间热力学;Lenoir循环;一维无限深势阱;有效功率
中图分类号:TK124 **文献标识码**:A **DOI**:10.19843/j.cnki.CN42-1779/TQ.202307002

Optimization of effective power of quantum Lenoir cycle

YIN Bojin[1], ***YIN Yong***[*1,2], ***WEI Xuanyu***[1], ***LIAO Yuxin***[1], ***ZHANG Jingshuai***[1]
1. School of Optical Information and Energy Engineering, School of Mathematics and Physics, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430205, China;
2. Institute of Thermal Science and Power Engineering, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430205, China

Abstract: Based on the theory of finite time thermodynamics and quantum thermodynamics, a quantum Lenoir heat engine cycle model was established, and the working medium was n non-interacting fermions trapped in a one-dimensional infinite potential well. The expressions for power, dimensionless power, efficiency, and effective power of the cycle were derived. The study investigated the impact of the potential well width ratio and thermal leakage coefficient on dimensionless power, efficiency, and effective power. Results indicate that the thermal leakage coefficient does not affect dimensionless power, whereas efficiency and effective power decrease as the thermal leakage coefficient increases. At the point of maximum effective power, efficiency increases by 45.8% compared to the maximum dimensionless power, while the dimensionless power only decreases by 13.6%. Consequently, optimization based on effective power demonstrates that the system attains higher efficiency by sacrificing some power, achieving the optimal performance of the cycle. The research findings offer a novel design approach for optimizing the Lenoir heat engine.

Keywords: finite time thermodynamics; Lenoir cycle; one-dimensional infinite potential well; effective power

收稿日期:2023-07-01
基金项目:武汉工程大学科学基金(19QD22);武汉工程大学第十三届研究生教育创新基金(CX2022466)
作者简介:尹博今,硕士研究生。Email:921151253@qq.com
***通信作者**:殷 勇,博士,副教授。Email:191630147@qq.com
引文格式:尹博今, 殷勇, 魏轩宇, 等. 量子Lenoir循环有效功率优化[J]. 武汉工程大学学报,2024,46(6):671-675.

随着技术的发展，热力学的研究已延伸到微纳米与低温领域，此时需要考虑工质与系统的量子特性。Scovil等[1]首次考虑工质的量子特性，应用量子热力学建立了量子热机模型。随后，许多学者[2-4]以不同的量子系统为工质，建立了各种正反向量子循环模型，以功率和效率作为优化目标对热机性能进行优化。

谢心怡等[5]建立了以相对论粒子为工质的量子矩形循环模型，在考虑热漏的情况下以有效功率为优化目标对循环性能进行了分析和研究。Xu等[6]建立量子奥托热机模型，考虑到粒子数的增长对不同温度比的耦合特性，计算了系统与外界间的热交换和功交换，并分析了各设计参数对效率的影响。Salamon等[7]提出了以㶲效率、㶲损失率和利润率为优化目标研究热机的性能。在文献[7]的基础上，陈林根等[8-10]将热经济学[11-13]的结论引入有限时间热力学，并由此建立了有限时间㶲经济分析法，对优化方法和优化目标进行了拓展。严子浚[14]首先将功率与效率结合起来，命名它们的乘积为有效功率，作为热机的优化目标。丁佳等[15]建立了以一维无限深方势阱中无相互作用的费米子为工质的量子狄塞尔热泵循环模型，分析了压缩比、截止比和循环性能参数之间的关系。Fahriza等[16]建立了以一维无限深势阱中无相互作用的费米子为工质的量子Lenoir循环模型，研究了压缩比与循环性能的关系。龚舒文等[17]应用有限时间热力学理论分析了包含多变过程的内可逆Lenoir循环，讨论了换热器在给定热导率和热导率分配变化两种情况下的性能参数。在换热器热导率分配变化时，得出循环功率和效率与热导率分配的特性关系以及最大功率和最佳热导率分配与多变指数的特性关系，对研究Lenoir热机的性能优化提供了理论基础。Saputra[18]建立了一个以一维无限深势阱中的单个粒子作为工质的量子Lenoir热机模型，以功率与效率为优化目标对循环的性能进行了分析与研究。刘存等[19]建立了以极端相对论粒子为工质的量子斯特林热泵循环模型，分析了循环性能和性能参数之间的关系。

在实际应用中，有时需要热机同时具有较大的功率与较高的效率，因此，本文在文献[16-18]的基础上，研究以一维无限深势阱中无相互作用的费米子为工质的量子Lenoir循环模型的有效功率最优性能。在考虑高低温热源间热漏的条件下，研究热漏系数与势阱宽度比对循环性能的影响，并以有效功率为优化目标，对该循环模型进行有效功率优化研究。

1 量子Lenoir循环

量子Lenoir循环由3个过程组成，如图1所示，其中，F为势阱壁上的力，L为势阱宽度，W为系统做功，Q为热量。循环的工质为囚禁于一维无限深势阱中的n个粒子。第一个过程为等容吸热过程，状态1到状态2势阱宽度保持不变($L_2=L_1$)，等价于经典热力学中的等容过程。因此，该过程系统对外做的功为0，内能变化量等于系统从高温热源吸入的热量。粒子的总能量表达式为：

$$E=\sum_i\sum_n\frac{\pi^2\hbar^2n^2}{2mL^2}P_{i,n} \tag{1}$$

式(1)中：n为粒子数，E为势阱总能量，i为势阱中能级的数量，m为粒子质量，$\hbar$为约化普朗克常数，$P_{i,n}$为n个粒子在i能级上的分布概率。

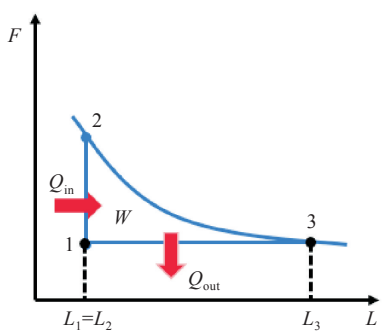

图1 量子Lenoir热机循环F-L图

Fig. 1 F-L diagram of quantum Lenoir heat engine cycle

状态1到状态2的过程为吸热过程，状态2时粒子处于能量较高的激发态。粒子处于状态1或状态2时系统总能量可分别表示为：

$$E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL_1^2}S_{\mathrm{i}} \tag{2}$$

$$E_2=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL_1^2}S_{\mathrm{f}} \tag{3}$$

其中$S_{\mathrm{i}}=\sum_i^n\sum_n P_{i,n,1}n^2$，$S_{\mathrm{f}}=\sum_i^n\sum_n P_{i,n,2}n^2$，$P_{i,n,1}$和$P_{i,n,2}$为状态1或状态2下$n$个粒子分别处于$i$个能级上的概率。

状态1到状态2的过程中系统吸收的总热量可表示为：

$$Q_{\mathrm{in}}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL_1^2}\left(S_{\mathrm{f}}-S_{\mathrm{i}}\right) \tag{4}$$

状态2到状态3的过程为绝热膨胀过程，在此过程中系统作用在势阱壁上的力F_{23}为：

$$F_{23}=\frac{\pi^2\hbar^2}{mL^3}S_{\mathrm{f}} \tag{5}$$

系统对外所做的总功为：

$$W_{23}=\frac{\pi^2\hbar^2}{m}S_{\mathrm{f}}\int_{L_2}^{L_3}\frac{1}{L^3}\mathrm{d}L=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL_1^2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)S_{\mathrm{f}} \quad (6)$$

其中r为势阱宽度比，$r=L_3/L_1$。

当系统处于3个状态点时，其作用在势阱壁上的力分别表示为：

$$F_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{mL_1^3}S_{\mathrm{i}},F_2=\frac{\pi^2\hbar^2}{mL_2^3}S_{\mathrm{f}}=\frac{\pi^2\hbar^2}{mL_1^3}S_{\mathrm{f}},F_3=\frac{\pi^2\hbar^2}{mL_3^3}S_{\mathrm{f}} \quad (7)$$

状态3到状态1的过程为等势阱力过程，此时$F_3=F_1$，结合式(7)可得：

$$\frac{S_{\mathrm{f}}}{S_{\mathrm{i}}}=\left(\frac{L_3}{L_1}\right)^3=r^3 \quad (8)$$

根据公式：$W_{31}=-F_1\mathrm{d}L$，可得等压过程的总功是：

$$W_{31}=-F_1\int_{L_3}^{L_1}\mathrm{d}L=-\frac{\pi^2\hbar^2}{mL_1^2}(r-1)S_{\mathrm{i}} \quad (9)$$

系统的内能变化量U_{31}为：

$$U_{31}=\int_{E_3}^{E_1}\mathrm{d}E=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL_1^2}(1-r)S_{\mathrm{i}} \quad (10)$$

应用经典热力学公式：$\mathrm{d}U=\mathrm{d}Q-\mathrm{d}W$，可得总放热量$Q_{\mathrm{out}}$为：

$$Q_{\mathrm{out}}=U_{31}+W_{31}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL_1^2}(3r-3)S_{\mathrm{i}} \quad (11)$$

2　性能参数

热漏是指高温热源和低温热源之间直接发生热量传递。考虑热漏时，该循环的总吸热量和总放热量为：

$$Q_{\mathrm{in}}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL_1^2}(r^3-1)S_{\mathrm{i}}+\dot{Q}_r\tau \quad (12)$$

$$Q_{\mathrm{out}}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL_1^2}(3r-3)S_{\mathrm{i}}+\dot{Q}_r\tau \quad (13)$$

其中$\dot{Q}_r$表示热漏率，τ为循环周期。循环周期可由势阱宽度变化推导，一个循环周期中，势阱壁的总路程L_{total}可表示为：

$$L_{\mathrm{total}}=2(L_3-L_1) \quad (14)$$

假设势阱壁匀速运动，得到：

$$\tau=\frac{L_{\mathrm{total}}}{\bar{v}}=\frac{2(L_3-L_1)}{\bar{v}} \quad (15)$$

式(15)中：$\bar{v}$表示势阱宽度变化的平均速度。

效率是指输出功与吸热量的比值，表示为：

$$\eta=\frac{W_{\mathrm{total}}}{Q_{\mathrm{in}}} \quad (16)$$

其中W_{total}是热机在一个循环中所做的总功，表示为：

$$W_{\mathrm{total}}=\oint F\mathrm{d}L=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL_1^2}(r^3-3r+2)S_{\mathrm{i}} \quad (17)$$

假设热漏率$\dot{Q}_{\mathrm{c}}$为：

$$\dot{Q}_{\mathrm{c}}=\alpha\frac{\pi^2\hbar^2\bar{v}}{2mL_1^3}S_{\mathrm{f}} \quad (18)$$

其中α表示热漏系数。因此，效率可表示为：

$$\eta=\frac{r^2+r-2}{2\alpha r^3+r^2+r+1} \quad (19)$$

根据式(15)和式(17)，得到功率：

$$P=\frac{\pi^2\hbar^2}{4mL_1^3}S_{\mathrm{i}}\bar{v}\left(\frac{r^3-3r+2}{r-1}\right) \quad (20)$$

从式(20)可以看出功率与热漏无关，无量纲功率可表示为：

$$P^*=\frac{r^3-3r+2}{2(r^4-r^3)} \quad (21)$$

由式(19)和式(21)可得有效功率的表达式为：

$$P_{\mathrm{E}}=\frac{r^3-3r+2}{2(r^4-r^3)}\cdot\frac{r^2+r-2}{2\alpha r^3+r^2+r+1} \quad (22)$$

3　性能分析与优化

图2(a、b)给出了势阱宽度比r和热漏系数α对无量纲功率P^*、效率η以及有效功率P_{E}的影响。由图2可知，P^*-r、η-r、P_{E}-r曲线均呈类抛物线型，P^*、η以及P_{E}均随着r的增大而先增大后减小，即存在最佳r使其存在极值。

由图2(a)可知，α对P^*无影响，当r=1.646时，P^*有极大值P^*_{max}=0.264 08。当α=0，且r=∞时，η极值$\eta_{\mathrm{max}}\approx1$，但此时$P^*\approx0$；当$\alpha$=0.02，$r$=5.209 5时，$\eta_{\mathrm{max}}$=0.778 1；在$r$较小的情况下，$\alpha$的变化对$\eta$影响较小，在$r$较大的情况下，$\eta$随着$\alpha$的增大而减小。

由图2(b)可知，当α=0.02，r=2.324时，P_{E}极值P_{Emax}=0.141 5。在r较小的情况下，α的变化对P_{E}的影响较小；在r较大的情况下，P_{E}则随着α的增大而减小。

图3(a)给出了α对P^*-η性能的影响，从图3(a)中可以看出，P^*-η曲线呈扭叶型，表明该循环存在两个关键状态点：(η, P^*_{max})(η_{max}, P^*)。在α=0.02的条件下，P^*极值P^*_{max}=0.264 08，对应的η=0.425 63，同样也存在η极值η_{max}=0.778 09，对应的P^*=0.107 34；

图3(b)给出了α对P_{E}-η性能的影响，从图3(b)中可以看出，P_{E}-η曲线呈回原点的扭叶型，表明在α一定时，该循环存在有效功率的极值P_{Emax}和与其对应的η，同样也存在效率的极值η_{max}和与其对

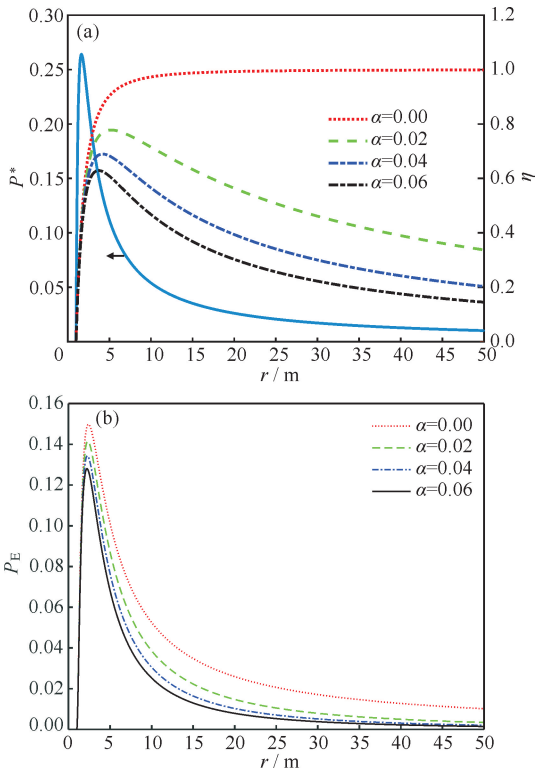

图2 无量纲功率、效率(a)以及有效功率(b)与势阱宽度比的关系曲线

Fig. 2 The relationship curves of dimensionless power, efficiency (a) and effective power (b) with the width ratio of potential well

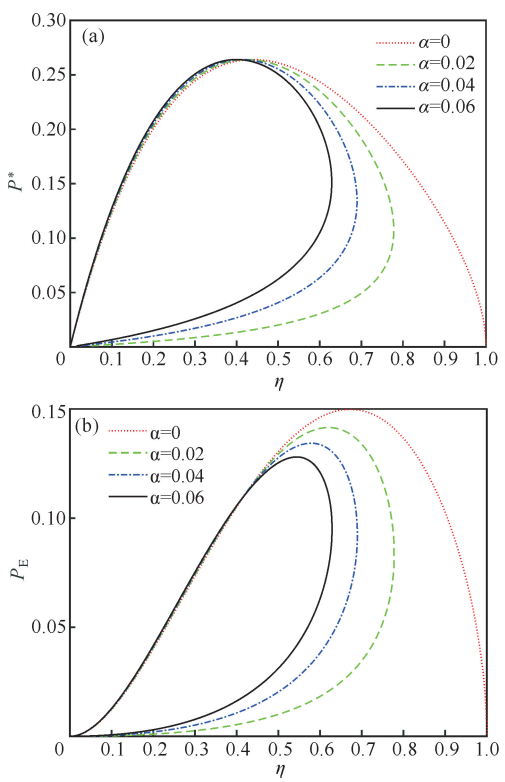

图3 无量纲功率(a)、有效功率(b)与效率的关系曲线

Fig. 3 The relationship curves of dimensionless power (a) and effective power (b) with efficiency

应的P_E。

在α=0.02的条件下，数值计算表明，P_{Emax}所对应的η=0.620 46，比P^*_{max}所对应的η(0.425 63)增大了45.8%。P_{Emax}所对应的P^*=0.228 06，而P^*_{max}=0.264 08，P_{Emax}所对应的P^*比P^*_{max}减小了13.6%。根据以上分析得出，在α一定时，P_E取最大值时所对应的η都大于P^*取最大值所对应的η，因此，若以有效功率为优化目标，能够保证热机有较大功率的同时也能有较高的效率。

4 结 论

在考虑高低温热源间热漏的条件下，研究了势阱宽度比r与热漏系数α对无量纲功率P^*、效率η以及有效功率P_E的影响，具体结论如下：

(1)P^*-r、η-r、P_E-r的关系曲线均呈类抛物线型。存在最佳的r使得P^*、η以及P_E取得最大值。在r较小时，α对η、P_E影响并不明显；在r较大时，α的变化对各性能参数的影响较明显。

(2)P^*-η，P_E-η的关系曲线均呈扭叶型。考虑热漏的情况下，在α较小时，α对P^*与η的影响不明显，但该影响随着α的增大而增大。

(3)在α一定的情况下，P_E取最大值时所对应的η始终大于P^*取最大值所对应的η。在最大有效功率准则下设计的热机虽然牺牲了部分输出功率，但是提高了热机的效率，因此以有效功率为优化目标能实现功率与效率的最佳折中。

在此研究的基础上，还可以建立以相对论粒子、四次方势阱粒子、广义势阱粒子等为工质的循环模型，研究其功率、效率、有效功率最优性能。结合本文与文献[20]可以建立量子热声制冷机循环模型，也可建立相应的量子热声热机与制冷机循环模型，以不同的目标函数研究其最优性能。

参考文献

[1] SCOVIL H E D, SCHULZ-DUBOIS E O. Three-level masers as heat engines[J]. Physical Review Letters, 1959, 2(6): 262-263.

[2] AHLBORN B, BARNARD A J. Efficiency reduction of heat engines due to power extraction[J]. American Journal of Physics, 1990, 58(5): 498-499.

[3] GUTKOWICZ-KRUSIN D, PROCACCIA I, ROSS J. On the efficiency of rate processes. power and efficiency of heat engines[J]. The Journal of Chemical Physics, 1978, 69(9): 3898-3906.

[4] REBHAN E, AHLBORN B. Frequency-dependent performance of a nonideal Carnot engine[J]. American

Journal of Physics，1987，55(5)：423-428.
[5] 谢心怡，陈林根，殷勇，等. 不可逆量子矩形循环的功率、效率和有效功率分析与优化[J]. 节能，2023，42(9)：34-38.
[6] XU H G，JIN J S，NETO G D M，et al. Universal quantum Otto heat machine based on the Dicke model [J]. Physical Review E，2024，109(1)：014122.
[7] SALAMON P，NITZAN A. Finite time optimizations of a Newton's law Carnot cycle [J]. The Journal of Chemical Physics，1981，74(6)：3546-3560.
[8] 陈林根，孙丰瑞，陈文振. 卡诺热机的最佳利润与效率间的关系[J]. 热能动力工程，1991，6(4)：237-241.
[9] 孙丰瑞，陈林根，陈文振. 二热源机的全息热效率与利润率谱[J]. 内燃机学报，1991，9(3)：286-287.
[10] 陈林根，孙丰瑞，陈文振. 两源热机有限时间㶲经济性能界限和优化准则[J]. 科学通报，1991，36(3)：233-235.
[11] RUSANOV A I. Advances in thermodynamics of solid surfaces[J]. Pure & Applied Chemistry，1989，61(11)：1945-1948.
[12] BERRY R S，SALAMON P，HEAL G. On a relation between economic and thermodynamic optima[J]. Resources and Energy，1978，1(2)：125-137.
[13] TSATSARONIS G. Thermoeconomic analysis and optimization of energy systems [J]. Progress in Energy and Combustion Science，1993，19(3)：227-257.
[14] 严子浚. η^2P最大时卡诺热机的η和P[J]. 厦门大学学报(自然科学版)，1986，25(3)：279-286.
[15] 丁佳，殷勇，陈林根，等. 量子狄塞尔热泵循环性能分析[J]. 武汉工程大学学报，2022，44(1)：92-96.
[16] FAHRIZA A，SUTANTYO T E P，ABDULLAH Z. Optimizations of multilevel quantum engine with N noninteracting fermions based on Lenoir cycle [J]. The European Physical Journal Plus，2022，137：1030.
[17] 龚舒文，陈林根，孙丰瑞. 包含多变过程的内可逆Lenoir循环性能分析与优化[J]. 节能，2013，32(7)：22-26，38.
[18] SAPUTRA Y D. Quantum Lenoir engine with a multiple-eigenstates particle in 1D potential box [J]. Journal of Physics：Conference Series，2021，1726(1)：012016.
[19] 刘存，殷勇，杨晗，等. 不可逆量子斯特林热泵循环性能分析与优化[J]. 武汉工程大学学报，2021，43(2)：232-236.
[20] E Q，WU F，CHEN L G，et al. Thermodynamic optimization for a quantum thermoacoustic refrigeration micro-cycle[J]. Journal of Central South University，2020，27(9)：2754-2762.

本文编辑：霍淑利

☆

(上接第662页)

[6] 王元良，屈金山，晏传鹏，等. 铝合金焊接性能及焊接接头性能[J]. 中国有色金属学报，1997，7(1)：69-74.
[7] 熊进辉，李士凯，耿永亮，等. 电子束熔丝沉积快速制造技术研究现状[J]. 电焊机，2016，46(2)：7-11.
[8] 张永，周天瑞，徐春晖. 熔融沉积快速成型工艺成型精度的影响因素及对策[J]. 南昌大学学报(工科版)，2007，29(3)：252-255.
[9] CONG B Q，DING J L，WILLIAMS S. Effect of arc mode in cold metal transfer process on porosity of additively manufactured Al-6.3% Cu alloy [J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology，2015，76 (9/10/11/12)：1593-1606.
[10] 王会霞，王松涛，王天顺，等. CMT电弧特性对5A56铝合金增材制造构件组织与性能的影响[J]. 电焊机，2021，51(8)：55-63.
[11] 吉华，邓运来，徐红勇，等. 焊接线能量对5182-O/HC260YD+Z异种材料CMT搭接接头组织与性能的影响[J]. 金属学报，2019，55(3)：376-388.
[12] FENG J C，ZHANG H T，HE P. The CMT short-circuiting metal transfer process and its use in thin aluminium sheets welding[J]. Materials and Design，2009，30(5)：1850-1852.
[13] 杨修荣. 超薄板的MIG/MAG焊——CMT冷金属过渡技术[J]. 电焊机，2006，36(6)：5-7.
[14] 姜云禄. 基于冷金属过渡技术的铝合金快速成形技术及工艺研究[D]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学，2014.

本文编辑：霍淑利