文章编号:1000-5854(2026)04-0392-07

两体系统上的无偏不可扩展最大纠缠基

姬鹏飞[1,2]，　左会娟[1]

(1.河北师范大学 数学科学学院,河北 石家庄　050024;
2.中国人民解放军陆军步兵学院 石家庄校区,河北 石家庄　050083)

摘　要:量子纠缠在量子计算与量子信息处理中扮演着关键角色,然而其内在性质与数学结构至今尚未得到完整的刻画.相互无偏性作为描述量子纠缠的重要工具之一,近年来受到广泛关注.基于傅里叶矩阵和组合构型,在两体量子系统 $\mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^{d'}$ $(d < d')$ 构造出两组相互无偏的不可扩展最大纠缠基,其中 d' 是奇素数.

关键词:两体量子系统;傅里叶矩阵;施密特系数;不可扩展最大纠缠基;相互无偏基

中图分类号:O 413.1　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.13763/j.cnki.jhebnu.nse.202601008

Constructions of mutually unbiased unextendible maximally entangled bases

Ji Pengfei[1,2],　Zuo Huijuan[1]

(1.School of Mathematical Sciences,Hebei Normal University,Shijiazhuang Hebei　050024,China;
2.School of Shijiazhuang,the Army Infantry Academy of PLA,Shijiazhuang Hebei　050083,China)

Abstract:Quantum entanglement plays a crucial role in quantum computing and quantum information processing.However,its intrinsic nature and mathematical structure have not yet been fully characterized.Mutual unbiasedness,as one of the important tools for describing quantum entanglement,has received widespread attention in recent years.Based on Fourier matrices,we construct two sets of mutually unbiased unextendible maximally entangled biased in bipartite quantum systems $\mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^{d'}$ $(d < d')$,where d' is an odd prime number.

Key words:bipartite quantum systems;Fourier matrices;Schmidt number;unextendible maximally entangled bases;mutually unbiased bases

无偏基是量子力学以及量子信息处理中的一个主要研究对象,其在纠缠检测、量子密钥分发、量子隐形传态和超密编码等方面都具有非常重要的应用[1-5].无偏基的由来可以追溯到 20 世纪 80 年代,Ivanovic[6] 证明了在素数维单体量子系统 $\mathbf{C}^d$ 中无偏基的个数是 $d+1$ 个.随后,Wootters 等[7] 证明在任意维单体量子系统 $\mathbf{C}^d$ 中,无偏基的个数不超过 $d+1$ 个,同时当 d 是素数或素数幂时,恰好能达到 $d+1$.但对于合数,如 $d=6$,其确切数量至今未知.Brierley 等[8] 在维数 2 至 5 的单体量子系统中成功构造出无偏基.然而,对于维数大于 5 的素数(如 $d=7$),如何构造出完整的 $d+1$ 个无偏基,如 7 维中的 8 个无偏基,至今仍是一个尚未解决的难题.

量子纠缠作为量子系统的特有资源,在量子信息领域发挥着重要作用.在相关研究中,不可扩展直积基

收稿日期:2025-12-23;**修回日期**:2026-02-02

基金项目:国家自然科学基金(12571493,62272208);石家庄市驻冀高校基础研究项目(241790697A);河北师范大学科研基金资助项目(L2025J01);网络与交换技术全国重点实验室(北京邮电大学)开放课题资助项目(SKLNST-2025-1-19)

作者简介:姬鹏飞(1995-),男,河北邯郸人,助教,硕士,研究方向为量子信息与量子计算.

通信作者:左会娟(1974-),女,教授,博士生导师,研究方向为量子信息与量子计算.E-mail:huijuanzuo@163.com

已获得广泛关注.这类基由一组不完整的正交直积态构成,其生成空间的补空间中不存在任何直积态,并且已有研究证明该补空间中存在束缚纠缠态.由于不可扩展直积基中的量子态无法通过局域操作与经典通信进行区分,加之量子纠缠本身的重要性,学者们近年来将不可扩展直积基的概念进一步推广至不可扩展最大纠缠基,并利用不可扩展最大纠缠基构造一次纠缠辅助(entanglement of assistance,EoA)严格小于渐进EoA的量子态.

2011年,Bravyi和Smolin[9]将不可扩展直积基的概念进一步发展为不可扩展最大纠缠基,在两体量子系统 $\mathbf{C}^d\otimes\mathbf{C}^d$ 中给出了不可扩展最大纠缠基的定义.不可扩展最大纠缠基是由不超过 d^2 个最大纠缠态构成的一组标准正交态,且这些最大纠缠态的正交补空间中无最大纠缠态,同时证明了在两体系统 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^2$ 中不存在不可扩展最大纠缠基,以及两体系统 $\mathbf{C}^3\otimes\mathbf{C}^3$ 和 $\mathbf{C}^4\otimes\mathbf{C}^4$ 中不可扩展最大纠缠基的成员个数分别是6个和12个.随后几年,学者们逐步证明在更一般的两体量子系统 $\mathbf{C}^d\otimes\mathbf{C}^{d'}(d<d')$ 中不可扩展最大纠缠基的存在性,并开始研究其无偏性[10-14].学者们在 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$、$\mathbf{C}^d\otimes\mathbf{C}^{2^l d'}$、$\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^d$ 等系统中成功构造出无偏的不可扩展最大纠缠基[15-18].Xiong等[19]研究在更高维数的系统中构造无偏的不可扩展最大纠缠基,利用有限域结论,在两体量子系统 $\mathbf{C}^{p-1}\otimes\mathbf{C}^p$($p$ 为奇素数)中,系统地构造了两组 $(p-1)^2$ 个成员的不可扩展最大纠缠基,并证明是无偏的.本文将改进并扩展前文的研究成果,利用傅里叶矩阵的性质,在更一般的维数中给出构造方法,得到以下成果:在两体量子系统 $\mathbf{C}^d\otimes\mathbf{C}^{d'}$ 中,当 d' 是奇素数且 $d<d'$ 时,可以构造出两组 $d(d'-1)$ 个成员的不可扩展最大纠缠基,并证明是无偏的.

1 基础知识

定义1 设 $\mathcal{B}_1=\{|\phi_i\rangle\}_{i=0}^{d-1}$ 和 $\mathcal{B}_2=\{|\psi_j\rangle\}_{j=0}^{d-1}$ 是 d 维Hilbert空间 $\mathbf{C}^d$ 的两组标准正交基,$\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 是无偏的当且仅当满足等式

$$|\langle\phi_i|\psi_j\rangle|=\frac{1}{\sqrt{d}},i,j=0,1,\cdots,d-1.$$

定义2 设 $|\phi\rangle$ 为复合系统 $A\otimes B$ 的一个量子态,则存在子系统 A 上的一组标准正交基 $|i_A\rangle$ 和子系统 B 上的一组标准正交基 $|i_B\rangle$,使得

$$|\phi\rangle=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i|i_A\rangle\otimes|i_B\rangle,$$

其中:λ_i 是非负实数且满足 $\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2=1$,称为施密特(Schmidt)系数;$r$ 为施密特秩,即非零 λ_i 的个数.量子态 $|\phi\rangle$ 为直积态当且仅当它的施密特系数是1.否则,该量子态是一个纠缠态.

定义3 一个量子态 $|\phi\rangle$ 是最大纠缠态,当且仅当 $|\phi\rangle$ 的每个施密特系数都相等,即

$$\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_{d-1}=\frac{1}{\sqrt{d}}(d=\min\{\dim(A),\dim(B)\}),$$

$$|\phi\rangle=\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{i=0}^{d-1}|i_A\rangle\otimes|i_B\rangle.$$

定义4[9] 一组纯态 $\{|\phi_i\rangle\in\mathbf{C}^d\otimes\mathbf{C}^{d'},i=1,2,\cdots,n,n<dd'\}$ 称为不可扩展最大纠缠基,当且仅当这组量子态满足以下3个条件:

1) $|\phi_i\rangle,i=1,2,\cdots,n$,都是最大纠缠态;

2) $\langle\phi_i|\phi_j\rangle=\delta_{ij},i,j=1,2,\cdots,n$;

3) 如果对任意的 $i=1,2,\cdots,n$,都满足 $\langle\phi_i|\psi\rangle=0$,那么 $|\psi\rangle$ 不是最大纠缠态.

引理1 方程组

$$\begin{cases}|x_0+x_1+x_2+\cdots+x_{d-1}|=\sqrt{d},\\ |x_0+\omega x_1+\omega^2x_2+\cdots+\omega^{d-1}x_{d-1}|=\sqrt{d},\\ \quad\vdots\\ |x_0+\omega^{d-1}x_1+\omega^{d-2}x_2+\cdots+\omega x_{d-1}|=\sqrt{d},\end{cases}$$

简记为

$$|x_0+\alpha x_1+\alpha^2 x_2+\cdots+\alpha^{d-1}x_{d-1}|=\sqrt{d},\alpha=1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{d-1}. \tag{1}$$

当 $d\geqslant 2$ 时，至少有 d 组解，其中 $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{d}}$ 为 d 次单位根，$|x_i|=1,i=0,1,\cdots,d-1$.

证 设 $N(d)$ 表示单量子系统 $\mathbf{C}^d$ 中包含的相互无偏基的最大个数.由文献[20]可知，对于任意 $d\geqslant 2$，都有 $N(d)\geqslant 3$. 在这三组无偏基中选取非计算基的两组基，并定义为 $\Re_1=\{|u_i\rangle\}_{i=0}^{d-1}$ 和 $\Re_2=\{|v_j\rangle\}_{j=0}^{d-1}$. 由定义 1 可知，这两组基满足

$$|\langle u_i|v_j\rangle|=\frac{1}{\sqrt{d}},\forall\, i,j=0,1,\cdots,d-1.$$

令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\langle u_0|\\ \langle u_1|\\ \vdots\\ \langle u_{d-1}|\end{pmatrix}_{d\times d},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\langle v_0|\\ \langle v_1|\\ \vdots\\ \langle v_{d-1}|\end{pmatrix}_{d\times d}.$$

验证可得，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\dagger}=\boldsymbol{I}_d$，其中 $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ 和 $\boldsymbol{B}^{\dagger}$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的共轭转置，$\boldsymbol{I}_d$ 是 d 阶单位矩阵.这 2 个矩阵满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\dagger}=\begin{pmatrix}\langle u_0|\\ \langle u_1|\\ \vdots\\ \langle u_{d-1}|\end{pmatrix}\cdot(|v_0\rangle|v_1\rangle\cdots|v_{d-1}\rangle)=$$

$$\begin{pmatrix}\langle u_0|v_0\rangle & \langle u_0|v_1\rangle & \cdots & \langle u_0|v_{d-1}\rangle\\ \langle u_1|v_0\rangle & \langle u_1|v_1\rangle & \cdots & \langle u_1|v_{d-1}\rangle\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle u_{d-1}|v_0\rangle & \langle u_{d-1}|v_1\rangle & \cdots & \langle u_{d-1}|v_{d-1}\rangle\end{pmatrix},$$

结合 $|\langle u_i|v_j\rangle|=\frac{1}{\sqrt{d}}$ 可知矩阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\dagger}$ 中任意元素的模都等于 $\frac{1}{\sqrt{d}}$.

方程组(1)等价于

$$\frac{1}{\sqrt{d}}|x_0+\alpha x_1+\alpha^2 x_2+\cdots+\alpha^{d-1}x_{d-1}|=1,\alpha=1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{d-1}.$$

此方程组的系数矩阵是 d 阶傅里叶矩阵，记为

$$\boldsymbol{F}_d=\frac{1}{\sqrt{d}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{d-1}\\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{d-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \omega^{d-1} & \omega^{d-2} & \cdots & \omega\end{pmatrix},$$

其中 $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{d}}$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{F}_d$ 都是酉矩阵，因此存在酉矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{F}_d$. 通过 $\boldsymbol{F}_d(\boldsymbol{B}')^{\dagger}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q})^{\dagger}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\dagger}\boldsymbol{B}^{\dagger}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\dagger}$，可得矩阵 $\boldsymbol{F}_d(\boldsymbol{B}')^{\dagger}$ 中任意元素的模都等于 $\frac{1}{\sqrt{d}}$. 因此，矩阵 $(\boldsymbol{B}')^{\dagger}$ 的每一列都是方程组(1)的解，即证方程组(1)至少存在 d 组解.

2 无偏不可扩展最大纠缠基的构造

本节在两体量子系统 $\mathbf{C}^d\otimes\mathbf{C}^{d'}$（$d'$ 为奇素数）中构造出两组不可扩展最大纠缠基，并分别添加一些直积态构成标准正交基，最后证明了这两组标准正交基是无偏的.

命题 1 在两体量子系统 $\mathbf{C}^d\otimes\mathbf{C}^{d'}$（$d'$ 为奇素数）中，存在一组 $d(d'-1)$ 个成员的不可扩展最大纠缠

基,记为

$$|\phi_{n,m}\rangle=\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{k=0}^{d-1}\omega^{nk}|k\rangle|t'_{m,k}\rangle. \tag{2}$$

其中:$n=0,1,\cdots,d-1$;$m=1,2,\cdots,d'-1$;$\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{d}}$;$|x\rangle|y\rangle\equiv|x\rangle\otimes|y\rangle$;$t_{m,k}$ 满足 $\lambda^{(k+1)\cdot t_{m,k}}=\lambda^m$,$\lambda=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{d'}}$. 再添加 d 个直积态

$$|\phi_{n,0}\rangle=\frac{1}{\sqrt{d}}\Big(\sum_{k=0}^{d-1}\omega^{nk}|k\rangle\Big)\otimes|0'\rangle. \tag{3}$$

由这些量子态组成的集合 $\{|\phi_{n,0}\rangle,|\phi_{n,m}\rangle\}$ 是两体系统 $\mathbf{C}^d\otimes\mathbf{C}^{d'}$($d'$ 为奇素数)的标准正交基.

证 下面依次证明正交性、最大纠缠态和不可扩展性.

正交性.由 $0<k+1<d'$,$m\neq0$ 且 $t_{m,k}$ 满足 $\lambda^{(k+1)\cdot t_{m,k}}=\lambda^m$,可得对于任意的 m 和 k 都有 $t_{m,k}\neq0$. 因此,对于任意的 n_1,n_2,m,等式

$$\langle\phi_{n_1,0}|\phi_{n_2,m}\rangle=\frac{1}{d}\Big(\sum_{k=0}^{d-1}\omega^{(n_2-n_1)k}\cdot\langle0'|t'_{m,k}\rangle\Big)=0$$

都成立,故式(2)和(3)中量子态是相互正交的.

对于任意的 n_1 和 n_2,都有

$$\langle\phi_{n_1,0}|\phi_{n_2,0}\rangle=\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\omega^{(n_2-n_1)k}=\delta_{n_1n_2},$$

故(3)中直积态是正交的.

由 $t_{m,k}$ 所满足的条件 $\lambda^{(k+1)\cdot t_{m,k}}=\lambda^m$,可知对于任意的 m_1 和 m_2,等式 $\lambda^{(k+1)\cdot(t_{m_2,k}-t_{m_1,k})}=\lambda^{m_2-m_1}$ 成立,即当 $m_1=m_2$ 时,$t_{m_1,k}=t_{m_2,k}$,否则不相等.因此,对于任意的 n_1,n_2 和 m_1,m_2,都有

$$\begin{aligned}\langle\phi_{n_1,m_1}|\phi_{n_2,m_2}\rangle&=\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}(\omega^{(n_2-n_1)k}\cdot\langle t'_{m_1,k}|t'_{m_2,k}\rangle)=\\&\frac{1}{d}\Big(\sum_{k=0}^{d-1}\omega^{(n_2-n_1)k}\Big)\cdot\delta_{m_1m_2}=\\&\delta_{n_1n_2}\delta_{m_1m_2}.\end{aligned}$$

故(2)中量子态是相互正交的.

集合 $\{|\phi_{n,m}\rangle\}$ 中的每个量子态都是最大纠缠态.根据定义 3,若对于不同的 k,$t_{m,k}$ 均不相同且量子态 $|t'_{m,k}\rangle$ 都是相互正交的,则可以证明每个纯态 $|\phi_{n,m}\rangle$ 都是最大纠缠的.对任意的 m,当 $k_1\neq k_2$ 时,都有 $\lambda^{(k_2+1)\cdot t_{m,k_2}-(k_1+1)\cdot t_{m,k_1}}=\lambda^{m-m}=\lambda^0$. 假设 $t_{m,k_1}=t_{m,k_2}$,就有 $\lambda^{(k_2-k_1)\cdot t_{m,k_1}}=\lambda^0$. 但条件 $k_1\neq k_2$ 和 $0<t_{m,k}<d'$ 无法使等式成立.因此,对于任意的 k_1 和 k_2,当 $k_1\neq k_2$ 时,可以得到 $t_{m,k_1}\neq t_{m,k_2}$,即量子态 $|t'_{m,k}\rangle$ 关于不同的 k 都是相互正交的.根据定义 3 可得,每个量子态 $|\phi_{n,m}\rangle$ 都是最大纠缠态.

不可扩展性.令 $\mathbf{C}^d\otimes\mathbf{C}^{d'}$ 的子空间 V_1 是由 $\{|\phi_{n,m}\rangle,n=0,1,\cdots,d-1,m=1,2,\cdots,d'-1\}$ 张成,可知 $\dim(V_1)=d(d'-1)$ 且 $\dim(V_1^{\perp})=dd'-d(d'-1)=d$. 再令子空间 V_2 是由 $\{|\phi_{n,0}\rangle,n=0,1,\cdots,d-1\}$ 张成.根据 $\dim(V_1^{\perp})=\dim(V_2)$ 和 $\langle\phi_{n,0}|\phi_{n,m}\rangle=0$,可以得到 $V_1^{\perp}=V_2$. 由于子空间 V_2 中每个向量都形如 $\Big(\sum_{k=0}^{d-1}c_k|k\rangle\Big)\otimes|0'\rangle$,其中每个 c_k 都是复数且 $\sum_{k=0}^{d-1}|c_k|^2=1$. 因此子空间 V_2 中没有最大纠缠态.根据定义 4可知,$\{|\phi_{n,m}\rangle\}$ 是一组 $d(d'-1)$ 个成员的不可扩展最大纠缠基.

到此得出结论,$\{|\phi_{n,0}\rangle,|\phi_{n,m}\rangle\}$ 是两体量子系统 $\mathbf{C}^d\otimes\mathbf{C}^{d'}$($d'$ 为奇素数)的一组标准正交基,并且这组基包含一组 $d(d'-1)$ 个成员的不可扩展最大纠缠基 $\{|\phi_{n,m}\rangle\}$ 和 d 个直积态 $\{|\phi_{n,0}\rangle\}$.

通过 d' 阶傅里叶矩阵 $\boldsymbol{F}_{d'}$,得到单体量子系统 $\mathbf{C}^{d'}$ 的另一组标准正交基 $\{|u_i\rangle\}_{i=0}^{d'-1}$,令

$$|u_i\rangle=\boldsymbol{F}_{d'}|i'\rangle=\frac{1}{\sqrt{d'}}\sum_{s=0}^{d'-1}\lambda^{s\cdot i}|s'\rangle.$$

其中:$i=0,1,\cdots,d'-1$;$\lambda=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{d'}}$.

命题 2 在两体量子系统 $\mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^{d'}$($d'$ 为奇素数)中,存在另一组 $d(d'-1)$ 个成员的不可扩展最大纠缠基,记为

$$|\psi_{n,m}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} \omega^{nk} a_k |k\rangle |u_{(k+1)\cdot m}\rangle. \tag{4}$$

其中:$n=0,1,\cdots,d-1$;$m=1,2,\cdots d'-1$;$|u_{(k+1)\cdot m}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d'}} \sum_{s=0}^{d'-1} \lambda^{(k+1)\cdot m\cdot s} |s'\rangle$;$(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{d-1})$ 是方程组(1)的一组解;$|u_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{d'}} \sum_{s=0}^{d'-1} |s'\rangle$. 再添加 d 个直积态

$$|\psi_{n,0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \left(\sum_{k=0}^{d-1} \omega^{nk} a_k |k\rangle \right) \otimes |u_0\rangle, \tag{5}$$

这些量子态构成的集合 $\{|\psi_{n,0}\rangle, |\psi_{n,m}\rangle\}$ 是两体量子系统 $\mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^{d'}$($d'$为奇素数)的另一组标准正交基.

证 类似命题 1,将证明过程分为正交性、最大纠缠态和不可扩展性.

正交性.根据

$$\langle \psi_{n_1,0} | \psi_{n_2,0} \rangle = \frac{1}{d} \left[\sum_{k=0}^{d-1} \omega^{(n_2-n_1)k} a_k \, (a_k)^* \right] \cdot \langle u_0 | u_0 \rangle = \delta_{n_1 n_2},$$

可得(5)中量子态是相互正交的,其中:$n_1, n_2 = 0,1,\cdots,d-1$;$(a_k)^*$ 是 a_k 的复共轭.

由 $k+1$ 和 m 都小于 d' 且 d' 是奇素数,可得 $k+1$ 和 m 都与 d' 是互素的,那么对于任意的 k 和 m,都有 $\lambda^{(k+1)\cdot m} \neq \lambda^0$. 因此,$\langle u_0 | u_{(k+1)\cdot m} \rangle = \frac{1}{d'} \sum_{s=0}^{d'-1} \lambda^{(k+1)\cdot m\cdot s} = 0$,即 $\langle \psi_{n_1,0} | \psi_{n_2,m} \rangle = 0$.

对于任意的 $m_1, m_2 = 1,2,\cdots,d'-1$,都有

$$\langle u_{(k+1)\cdot m_1} | u_{(k+1)\cdot m_2} \rangle = \frac{1}{d'} \sum_{s=0}^{d'-1} \lambda^{(k+1)\cdot (m_2-m_1)\cdot s} = \delta_{m_1 m_2},$$

那么量子态 $|\psi_{n,m}\rangle$ 满足等式

$$\langle \psi_{n_1,m_1} | \psi_{n_2,m_2} \rangle = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \left[\omega^{(n_2-n_1)k} a_k \, (a_k)^* \cdot \langle u_{(k+1)\cdot m_1} | u_{(k+1)\cdot m_2} \rangle \right] =$$

$$\delta_{n_1 n_2} \delta_{m_1 m_2},$$

故(4)中量子态是相互正交的.

集合 $\{|\psi_{n,m}\rangle\}$ 中的每个量子态都是最大纠缠态.对于任意的 $k_1, k_2 \in \{0,1,\cdots,d-1\}$,当 $k_1 \neq k_2$ 时,有

$$\langle u_{(k_1+1)\cdot m} | u_{(k_2+1)\cdot m} \rangle = \frac{1}{d'} \sum_{s=0}^{d'-1} \lambda^{(k_2-k_1)\cdot m\cdot s} = 0.$$

因此,对于每一个 $|\psi_{n,m}\rangle$,当 k 不同时,第二量子比特 $|u_{(k+1)\cdot m}\rangle$ 都是相互正交的.根据定义 3,可以得到量子态 $|\psi_{n,m}\rangle$ 都是最大纠缠态.

不可扩展性.令 $\mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^{d'}$ 的子空间 V_1 和 V_2 分别由 $\{|\psi_{n,m}\rangle\}$ 和 $\{|\psi_{n,0}\rangle\}$ 张成,即

$$V_1 = \mathrm{span}\{|\psi_{n,m}\rangle, n = 0,1,\cdots,d-1, m = 1,2,\cdots,d'-1\},$$

$$V_2 = \mathrm{span}\{|\psi_{n,0}\rangle, n = 0,1,\cdots,d-1\}.$$

根据 $\dim(V_1^{\perp}) = d(d'-1) = \dim(V_2)$ 和 $\langle \psi_{n,0} | \psi_{n,m} \rangle = 0$,可以得到 $V_1^{\perp} = V_2$. 由于子空间 V_2 中每个量子态都形如 $\left(\sum_{k=0}^{d-1} c_k a_k |k\rangle \right) \otimes |u_0\rangle$,其中 c_k 是负数且 $\sum_{k=0}^{d-1} |c_k|^2 = 1$. 因此子空间 V_2 无最大纠缠态.根据定义 4 知,$\{|\psi_{n,m}\rangle\}$ 是一组 $d(d'-1)$ 个成员的不可扩展最大纠缠基.

到此得出结论,$\{|\psi_{n,0}\rangle, |\psi_{n,m}\rangle\}$ 是两体量子系统 $\mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^{d'}$($d'$ 为奇素数)的一组标准正交基,并且这组基包含一组 $d(d'-1)$ 个成员的不可扩展最大纠缠基 $\{|\psi_{n,m}\rangle\}$ 和 d 个直积态 $\{|\psi_{n,0}\rangle\}$.

定理 1 在两体量子系统 $\mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^{d'}$($d'$ 为奇素数)中,存在两组无偏的不可扩展最大纠缠基.

证 在命题 1 和命题 2 中构造了两组标准正交基 $\{|\phi_{n,0}\rangle, |\phi_{n,m}\rangle\}$ 和 $\{|\psi_{n,0}\rangle, |\psi_{n,m}\rangle\}$,下面证明这两组基是无偏的就可得到结论.根据定义 1,$\{|\phi_{n,0}\rangle, |\phi_{n,m}\rangle\}$ 和 $\{|\psi_{n,0}\rangle, |\psi_{n,m}\rangle\}$ 在两体系统 $\mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^{d'}$ 中是无偏的,当

且仅当对任意的$|\phi\rangle \in \{|\phi_{n,0}\rangle,|\phi_{n,m}\rangle\}$和$|\psi\rangle \in \{|\psi_{n,0}\rangle,|\psi_{n,m}\rangle\}$都满足 $|\langle\phi|\psi\rangle| = \frac{1}{\sqrt{dd'}}$.

证明情况如下.

$$|\langle\phi_{n_1,0}|\psi_{n_2,0}\rangle| = \frac{1}{d}\left|\left(\sum_{k=0}^{d-1}\omega^{(n_2-n_1)k}a_k\right)\cdot\langle 0'|u_0\rangle\right| = \frac{1}{d\sqrt{d'}}\left|\sum_{k=0}^{d-1}\omega^{(n_2-n_1)k}a_k\right| = \frac{1}{\sqrt{dd'}},$$

$$|\langle\phi_{n_1,m_1}|\psi_{n_2,0}\rangle| = \frac{1}{d}\left|\sum_{k=0}^{d-1}\left(\omega^{(n_2-n_1)k}a_k\cdot\langle t'_{m_1,k}|u_0\rangle\right)\right| = \frac{1}{d\sqrt{d'}}\left|\sum_{k=0}^{d-1}\omega^{(n_2-n_1)k}a_k\right| = \frac{1}{\sqrt{dd'}},$$

$$|\langle\phi_{n_1,0}|\psi_{n_2,m_2}\rangle| = \frac{1}{d}\left|\sum_{k=0}^{d-1}\left(\omega^{(n_2-n_1)k}a_k\cdot\langle 0'|u_{(k+1)\cdot m_2}\rangle\right)\right| = \frac{1}{d\sqrt{d'}}\left|\sum_{k=0}^{d-1}\omega^{(n_2-n_1)k}a_k\right| = \frac{1}{\sqrt{dd'}},$$

$$|\langle\phi_{n_1,m_1}|\psi_{n_2,m_2}\rangle| = \frac{1}{d\sqrt{d'}}\left|\sum_{k=0}^{d-1}\left(\omega^{(n_2-n_1)k}a_k\cdot\lambda^{m_2(k+1)\cdot t_{m_1,k}}\right)\right| =$$

$$\frac{1}{d\sqrt{d'}}\left|\sum_{k=0}^{d-1}\omega^{(n_2-n_1)k}a_k\right|\cdot|\lambda^{m_1m_2}| =$$

$$\frac{1}{d\sqrt{d'}}.$$

其中：$n_1,n_2 = 0,1,\cdots,d-1$；$m_1,m_2 = 1,2,\cdots,d'-1$.

因此，命题 1 和命题 2 所构造的两组不可扩展最大纠缠基是无偏的.

3 结 论

本文主要研究了两体量子系统 $\mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^{d'}(d < d')$，其中 d'为奇素数，无偏的不可扩展最大纠缠基的构造.通过傅里叶矩阵的性质，构造出两组 $d(d'-1)$ 个成员的不可扩展最大纠缠基并分别添加 d 个直积态来构成标准正交基.最后证明了这两组基是无偏的，即证明了在两体量子系统 $\mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^{d'}$（$d'$ 为奇素数）中无偏的不可扩展最大纠缠基的存在性.今后可进一步探讨不同维数，如 d' 为素数幂或合数情况下，无偏的不可扩展最大纠缠基的存在性问题.

参考文献：

[1] Bruß D, Macchiavello C. Optimal eavesdropping in cryptography with three-dimensional quantum states[J]. Physical Review Letters, 2002, 88(12): 127901. DOI: 10.1103/physrevlett.88.127901.

[2] Calderbank A R, Rains E M, Shor P W, et al. Quantum error correction and orthogonal geometry[J]. Physical Review Letters, 1997, 78(3): 405-408. DOI: 10.1103/physrevlett.78.405.

[3] Cerf N J, Bourennane M, Karlsson A, et al. Security of quantum key distribution using d-level systems[J]. Physical Review Letters, 2002, 88(12): 127902. DOI: 10.1103/physrevlett.88.127902.

[4] Revzen M. Maximally entangled states via mutual unbiased collective bases[J]. Physical Review A, 2010, 81: 012113. DOI: 10.1103/physreva.81.012113.

[5] Spengler C, Huber M, Brierley S, et al. Entanglement detection via mutually unbiased bases[J]. Physical Review A, 2012, 86(2): 022311. DOI: 10.1103/physreva.86.022311.

[6] Ivonovic I D. Geometrical description of quantal state determination[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1981, 14(12): 3241. DOI: 10.1088/0305-4470/14/12/019.

[7] Wootters W K, Fields B D. Optimal state-determination by mutually unbiased measurements[J]. Annals of Physics, 1989, 191(2): 363-381. DOI: 10.1016/0003-4916(89)90322-9.

[8] Brierley S, Weigert S, Bengtsson I. All mutually unbiased bases in dimensions two to five[J]. Quantum Information & Computation, 2010, 10(9): 803-820. DOI: 10.5555/2011464.2011470.

[9] Bravyi S, Smolin J A. Unextendible maximally entangled bases[J]. Physical Review A, 2011, 84(4): 042306. DOI: 10.1103/physreva.84.042306.

[10] Chen B, Fei S M. Unextendible maximally entangled bases and mutually unbiased bases[J]. Physical Review A, 2013, 88

(3):034301.DOI:10.1103/physreva.88.034301.

[11] Wang Y L,Li M S,Fei S M.Unextendible maximally entangled bases in $\mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^d$ [J].Physical Review A,2014,90(3):034301.DOI:10.1103/physreva.90.034301.

[12] Guo Y.Constructing the unextendible maximally entangled basis from the maximally entangled basis[J].Physical Review A,2016,94(5):052302.DOI:10.1103/physreva.94.052302.

[13] Wang Y L,Li M S,Fei S M,et al.Connecting unextendible maximally entangled base with partial Hadamard matrices[J].Quantum Information Processing,2017,16(3):84.DOI:10.1007/s11128-017-1537-7.

[14] Li M S,Wang Y L,Zheng Z J.Unextendible maximally entangled bases in $\mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^{d'}$ [J].Physical Review A,2014,89(6):062313.DOI:10.1103/physreva.89.062313.

[15] Nan H,Tao Y H,Li L S,et al.Unextendible maximally entangled bases and mutually unbiased bases in $\mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^{d'}$ [J].International Journal of Theoretical Physics,2015,54(3):927-932.DOI:10.1007/s10773-014-2288-1.

[16] Nizamidin H,Ma T,Fei S M.A note on mutually unbiased unextendible maximally entangled bases in $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^3$ [J].International Journal of Theoretical Physics,2015,54(1):326-333.DOI:10.1007/s10773-014-2227-1.

[17] Zhang J,Tao Y H,Nan H,et al.Construction of mutually unbiased bases in $\mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^{2^l d'}$ [J].Quantum Information Processing,2015,14(7):2635-2644.DOI:10.1007/s11128-015-0961-9.

[18] Zhao H,Zhang L,Fei S M,et al.Constructing mutually unbiased bases from unextendible maximally entangled bases[J].Reports on Mathematical Physics,2020,85(1):105-118.DOI:10.1016/S0034-4877(20)30013-6.

[19] Xiong Z X,Zheng Z J,Fei S M.Mutually unbiased unextendible maximally entangled bases in some systems of higher dimension[J].Quantum Information Processing,2020,19(12):429.DOI:10.1007/s11128-020-02923-y.

[20] Aschbacher M,Childs A M,Wocjan P.The limitations of nice mutually unbiased bases[J].Journal of Algebraic Combinatorics,2007,25(2):111-123.DOI:10.1007/s10801-006-0002-y.

(责任编辑　赵静慧)