

具有持续驻留时间的 Markov 跳变系统容错估计

张正锦, 林文娟[†]

(青岛大学自动化学院, 山东 青岛 266071)

摘 要: 针对一类具有持续驻留时间切换转移概率的连续 Markov 跳变时滞系统, 提出了一种容错估计方法。系统模态呈现的跳跃特性由 Markov 链描述, 文中 Markov 链的转移概率采用更灵活的持续驻留时间切换规则进行描述。通过协同设计容错状态估计器和故障估计器, 融合潜在故障信息构建状态估计误差系统。基于 Lyapunov-Krasovskii (L-K) 泛函, 积分不等式、改进逆凸矩阵不等式、自由权矩阵以及切换系统理论, 建立线性矩阵不等式 (LMI) 约束下的充分条件, 解出状态估计器和故障估计器增益矩阵, 确保时变时滞与高频切换下误差系统全局一致指数稳定并满足 H_∞ 性能指标。最后, 通过发动机飞行系统进行仿真, 说明了所提出技术的有效性。

关键词: 持续驻留时间; Markov 跳变; 时滞; 容错估计

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Fault-tolerant Estimation for Markov Jump Systems with Persistent Dwell-time

ZHANG Zhengjin, LIN Wenjuan[†]

(School of Automation, Qingdao University, Qingdao, Shandong 266071, China)

Abstract: This paper proposes a fault-tolerant estimation method for a class of continuous Markov jump time-delay systems with persistent dwell-time switched transition probabilities. The jumping property presented by system modes is described by the Markov chain. And the transition probabilities of the Markov chain is described by adopting the more flexible persistent dwell-time switching rule. By co-designing a fault-tolerant state estimator and a fault estimator, a state estimation error system is constructed by integrating potential fault information. Utilizing the Lyapunov-Krasovskii (L-K) functionals, integral inequalities, improved inverse convex matrix inequality, free-weighting matrices and switched system theory, sufficient conditions under linear matrix inequality (LMI) constraints are established. The gain matrices of the state estimator and fault estimator are derived to ensure global uniform exponential stability of the error system under time-varying delays and high-frequency switching, while satisfying the H_∞ performance index. Finally, through the simulation of the engine flight system, the effectiveness of the proposed technology was demonstrated.

Key words: persistent dwell-time; Markov jump; time delay; fault-tolerant estimation

Markov 跳变系统通过引入在有限集上取值的 Markov 过程, 来描述系统动态参数的随机跳

变, 为刻画在多操作模式间随机切换的混杂系统提供了精准的建模框架。得益于这一独特优势, 该类

系统在电力系统^[1]、网络控制系统^[2]等复杂工程领域受到了广泛研究关注,尤其适用于分析存在随机故障或突发扰动的动态过程。

随着工业系统架构的日益复杂,对系统安全性的需求也在增加^[3]。在卫星导航、飞行控制等高可靠性工业系统中,传感器与执行器的突发故障可能导致灾难性后果^[4]。尽管故障检测与故障隔离技术能识别故障存在性与具体位置,但其无法量化故障幅值与动态特性,难以支撑后续精准的容错控制策略。因此,故障估计成为保障系统安全性的关键环节。针对 Markov 跳变系统故障估计问题,国内外学者进行了深入分析,并提出了多种估计方法,如基于广义观测器估计方法^[5]、模态相关的中间估计器方法^[6]等。由此可见,如何有效估计出故障信号是工业控制领域的焦点问题。

在 Markov 跳变系统中,很多研究是基于假设转移概率是时不变的,而很多不确定因素会导致时变转移概率。为了更符合实际情况,如何更恰当地描述时变转移概率,进而获得更一般的结果显得非常重要。一些学者研究了满足驻留时间切换规则的分段常数转移概率的 Markov 跳变系统^[7]。由于对高频切换的适应性较差,驻留时间切换规则已逐渐被平均驻留时间切换规则取代^[8]。但上述两种切换规则均存在切换频率受限的问题。持续驻留时间切换规则的核心是区分了快速和慢速切换频率两类区域,并允许在快速切换区域内高频自由切换^[9]。相比之下,持续驻留时间切换规则被认为是一种更通用的切换规则。采用持续驻留时间切换规则来描述 Markov 跳变系统转移概率,可以更准确地描述实际系统的切换行为^[10]。此外,具有持续驻留时间的 Markov 跳变系统的容错估计问题尚未得到充分研究。本文旨在填补这一空白。

由于响应速度和传输介质的限制,Markov 跳变系统中可能会出现时滞^[11,12]。时滞现象意味着当前状态不仅取决于当前输入,而且不可避免地受到过去输入或状态的影响^[13]。这种现象将推迟开关信号的更新,还增加持续驻留时间切换的复杂性^[14]。此外,时滞可能会导致对故障信号的估计产生延迟,甚至掩盖早期故障信号。为了提升估计方法的有效性,深入探究时滞现象和持续驻留时间对系统的影响具有重要的理论价值和实践意义。

针对上述问题,提出了一种基于 LMI(线性矩阵不等式)的方法来设计适用于存在时滞和持续驻留时间系统的故障估计器,并通过引入自由权矩阵的方法求出了合适的估计器增益。最后,通过一个

仿真实例验证了所提方法的有效性。

1 系统与问题描述

考虑一类具有时变时滞和持续驻留时间的连续 Markov 跳变系统^[15]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(r_t)x(t) + A_\tau(r_t)x(t - \tau(t)) + C(r_t)\omega(t) \\ y(t) = H(r_t)x(t) + D(r_t)f(t) \\ z(t) = L(r_t)x(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中,随机过程 $\{r_t, t \geq 0\}$ 表示一个连续时间的 Markov 过程 $N = \{1, 2, \dots, n\}$, 其转移概率满足:

$$\Pr \{r_{t+\Delta} = q \mid r_t = p\} = \begin{cases} \pi_{pq}^{\xi(t)} + o(\Delta t), p = q \\ 1 + \pi_{pq}^{\xi(t)} + o(\Delta t), p \neq q \end{cases}$$

其中, $p, q \in N$ 分别表示系统在当前时刻和下一时刻的模态, $\pi_{pq}^{\xi(t)}$ 即为从模态 p 切换到模态 q 的转移概率。 $\pi_{pq}^{\xi(t)} \geq 0$ 且 $\pi_{pq}^{\xi(t)} = -\sum_{q=1, q \neq p}^M \pi_{pq}^{\xi(t)}$ 。驻留时间函数 $\xi(t)$ 满足取值于集合 $M = \{1, 2, \dots, m\}$ 。 $x(t) \in R^n$ 是系统状态, $\omega(t) \in R^p$ 和 $f(t) \in R^p$ 分别表示系统中存在的输入扰动和传感器故障, $z(t)$ 表示待估计的向量, $\tau(t)$ 表示时变时滞,并满足 $0 \leq \tau(t) \leq \bar{\tau}, \dot{\tau}(t) \leq u \leq 1$ 。

图 1 说明了持续驻留时间切换规则 $\xi(t)$ 的部分工作原理。任一阶段都包含一个特定的子系统运行期(即 τ 一部分)和一个持续期(即 T 一部分)。此外,子系统运行期持续时间不小于 τ_D 持续期时间也不超过 T_D 。对于第 p 阶段,区间 $[\tau_{s_p}, t_{s_{p+1}})$ 被划分为两个子区间。在 $[\tau_{s_p}, t_{s_{p+1}})$ 内,只有一个子系统被激活且持续时间 $\tau_A \geq \tau_D$ 。在 $[t_{s_{p+1}}, t_{s_{p+2}})$ 内,子系统之间可以进行任何切换并且持续时间 $T_B \leq T_D$ 。

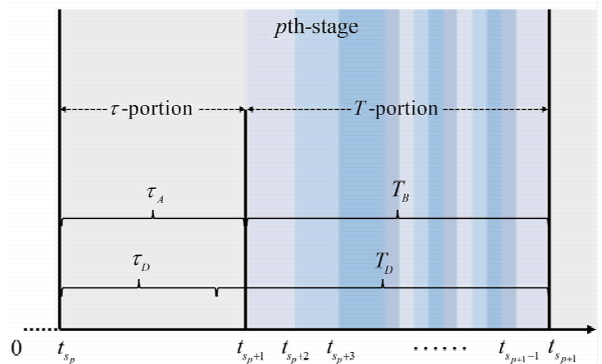


图 1 一类持续驻留时间切换规则

2 估计器设计

为了估计上述系统的状态,本文构建了如下容错状态估计器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}(r_t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{A}_\tau(r_t)\hat{\mathbf{x}}(t - \tau(t)) \\ \quad + \mathbf{K}_{p1}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \\ \dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) = \mathbf{H}(r_t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}(r_t)\hat{\mathbf{f}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{z}}}(t) = \mathbf{L}(r_t)\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{f}}(t)$ 分别是状态估计和故障估计, 矩阵 $\mathbf{K}_{p1}$ 为待确定的状态估计器增益。 $\mathbf{A}(r_t), \mathbf{A}_\tau(r_t), \mathbf{D}(r_t), \mathbf{H}(r_t), \mathbf{L}(r_t)$ 是具有合适维数的系数矩阵, 可简写为 $\mathbf{A}_p, \mathbf{A}_{\tau p}, \mathbf{D}_p, \mathbf{H}_p, \mathbf{L}_p$ 。通过定义 $\bar{\mathbf{f}}(t) = [\mathbf{f}^T(t) \quad \mathbf{f}^T(t)]^T$, 可以得到 $\dot{\bar{\mathbf{f}}}(t) = \mathbf{M}_p \bar{\mathbf{f}}(t)$, 其中 $\mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。那么通过定义 $\dot{\bar{\mathbf{f}}}(t) = [\dot{\mathbf{f}}^T(t) \quad \dot{\mathbf{f}}^T(t)]^T$, 故障估计器可以构造为:

$$\dot{\bar{\mathbf{f}}}(t) = \mathbf{M}_p \bar{\mathbf{f}}(t) + \mathbf{K}_{p2}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \quad (3)$$

其中矩阵 $\mathbf{K}_{p2}$ 为待确定的增益。进一步定义状态估计误差信号为 $\mathbf{e}_x(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ 和传感器故障估计误差 $\mathbf{e}_f(t) = \bar{\mathbf{f}}(t) - \hat{\bar{\mathbf{f}}}(t)$ 。令 $\mathbf{e}(t) = [\mathbf{e}_x^T(t) \quad \mathbf{e}_f^T(t)]^T, \tilde{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t)$ 和 $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)$ 。结合式(1)、式(2)和式(3)可以进一步表示为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}_\eta \mathbf{e}(t) + \mathbf{A}_{\tau p} \mathbf{e}_x(t - \tau(t)) + \mathbf{C}_p \omega(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{y}}}(t) = \mathbf{H}_p \mathbf{e}_x(t) + \bar{\mathbf{D}}_p \mathbf{e}_f(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{z}}}(t) = \mathbf{L}_p \mathbf{e}_x(t) \end{cases} \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_\eta = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p - \mathbf{K}_{p1} \mathbf{H}_p & -\mathbf{K}_{p1} \mathbf{D}_p \\ -\mathbf{K}_{p2} \mathbf{H}_p & \mathbf{M}_p - \mathbf{K}_{p2} \mathbf{D}_p \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{D}}_p = [\mathbf{D}_p \quad 0]$$

本文主要目的是针对具有持续驻留时间和时变时滞的 Markov 跳变系统, 利用协同设计的容错状态估计器和故障估计器构建状态估计误差系统(4), 来对故障信号进行估计, 并使其满足:

(1) 对于 $v(t) = 0$ 闭环系统满足全局一致指数稳定。

(2) 对于非零的 $v(t)$, 在零初始条件下 $\tilde{\mathbf{z}}(t)$ 满足以下性能:

$$\int_{t=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{z}}^T(s) \tilde{\mathbf{z}}(s) ds \leq \gamma^2 \int_{t=0}^{\infty} \mathbf{v}^T(s) \mathbf{v}(s) ds$$

$$\text{其中 } \mathbf{v}(t) = [\omega^T(t) \quad \bar{\mathbf{f}}^T(t)]^T。$$

引理 1^[16]: 对于在 $[\beta_1, \beta_2] \rightarrow R^n$ 内变化的可微函数 χ 及正定对称矩阵 $\mathbf{R} > 0$, 下列不等式成立。

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \dot{\chi}^T(s) \mathbf{R} \dot{\chi}(s) ds \geq \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \mathbf{H}_1^T \mathbf{R} \mathbf{H}_1 + \frac{3}{\beta_2 - \beta_1} \mathbf{H}_2^T \mathbf{R} \mathbf{H}_2, \text{ 其中 } \mathbf{H}_1 = \chi(\beta_2) - \chi(\beta_1), \mathbf{H}_2 = \chi(\beta_2) + \chi(\beta_1) - \frac{2}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \chi(s) ds。$$

引理 2^[17]: 对于正实数 $0 < \alpha < 1$, 正定对称矩阵 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ 以及任意矩阵 $\mathbf{N}$, 下列不等式成立。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \mathbf{X} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{Y} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{X} + (1-\alpha) \mathbf{T}_1 & \mathbf{N} \\ * & \mathbf{Y} + \alpha \mathbf{T}_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{其中 } \mathbf{T}_1 = \mathbf{X} - \mathbf{N} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{N}^T, \mathbf{T}_2 = \mathbf{Y} - \mathbf{N}^T \mathbf{X}^{-1} \mathbf{N}$$

引理 3^[18]: 对于 $\Omega = (a, b) (\Omega = [a, b])$ 上的微分方程 $V_i(t)$, 如果存在任意时变函数 $\phi(t)$ 和 $\phi(t)$ 使得 $LV_i(t) \leq \phi(t)V_i(t) + \varphi(t)$, 那么下列不等式成立。

$$V_i(t) \leq V_i(a) e^{\Psi(t)} + \int_a^t e^{\phi(t)-\phi(r)} \varphi(r) dr$$

$$\text{其中 } t < b, \Psi(t) = \int_a^t \phi(r) dr$$

引理 4^[19]: 在 T 一部分, 有限的切换时间间隔会导致芝诺现象发生。因此, 对于长度不小于 $\tau_D + T_D$ 的任意区间 $[t_a, t_b]$, 下列不等式成立。

$$0 \leq \Lambda(t_a, t_b) \leq \left(\frac{t_a - t_b}{T_D - \tau_D} + 1 \right) (T_D f + 1)$$

其中 $1/f$ 表示 T 一部分的最小平均切换间隔。

3 主要结论

本节将利用 L-K 泛函方法分析误差系统的稳定性和 H_∞ 性能, 进一步给出容错状态估计器的设计方法。为了简化后续表示, 现将定理证明过程中用到的矩阵及向量做如下定义。

$$\xi(t) = [\mathbf{e}_x^T(t), \mathbf{e}_f^T(t), \mathbf{e}_x^T(t - \tau(t)), \mathbf{e}_x^T(t - \bar{\tau})]$$

$$\mathbf{v}_1^T(t), \mathbf{v}_2^T(t), \omega^T(t), \mathbf{f}^T(t), \mathbf{e}_x^T(t), \mathbf{e}_f^T(t)]^T,$$

$$\mathbf{v}_1^T(t) = \int_{t-\tau(t)}^t \frac{\mathbf{e}_x(s)}{\tau(t)} ds, \mathbf{v}_2^T(t) =$$

$$\int_{t-\bar{\tau}}^{t-\tau(t)} \frac{\mathbf{e}_x(s)}{\bar{\tau} - \tau(t)} ds$$

定理: 对于给定标量 $T_D > 0, \alpha \in (0, 1), \mu \in (1, \infty), \bar{\tau}, u, f, \beta_1, \beta_2$, 如果存在任意实正定对称矩阵 $\mathbf{P}_p, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{R}$ 以及任意实矩阵 $\mathbf{X}, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \chi_1, \chi_2$, 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{E}}|_{\tau(t)=0} & \mathbf{L}_p \mathbf{e}_1 & \mathbf{E}_1^T \mathbf{X} \\ * & -\mathbf{I} & 0 \\ * & * & -\mathbf{e}^{\alpha \tilde{\mathbf{R}}} \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{E}}|_{\tau(t)=\tau} & \mathbf{L}_p \mathbf{e}_1 & \mathbf{E}_2^T \mathbf{X}^T \\ * & -\mathbf{I} & 0 \\ * & * & -\mathbf{e}^{\alpha \tilde{\mathbf{R}}} \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

$$\mathbf{P}_q < \mu \mathbf{P}_p \quad (7)$$

$$T_D > \tau_D > \frac{T_D f + 1}{\alpha} \ln \mu - T_D \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{E} = \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{\Phi}_2 + \mathbf{\Phi}_3 + \alpha \mathbf{\Pi}_1^T \mathbf{P}_p \mathbf{\Pi}_1 - \gamma^2 \mathbf{\Pi}_3^T \mathbf{\Pi}_3$$

$$\mathbf{\Phi}_0 = 2[\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_9^T \beta_1] \mathbf{l}_1 + 2[\mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_{10}^T \beta_2] \mathbf{l}_2$$

$$\mathbf{\Phi}_1 = 2\mathbf{\Pi}_1^T \mathbf{P}_p \mathbf{\Pi}_2 + \sum_{q \in M} \pi_{pq} (\mathbf{\Pi}_1^T \mathbf{P}_q \mathbf{\Pi}_1)$$

$$\mathbf{\Phi}_2 = \mathbf{e}_1^T (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) \mathbf{e}_1 - (1-u) \mathbf{e}^{-\alpha} \mathbf{e}_3^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}_3 -$$

$$\mathbf{e}^{-\alpha} \mathbf{e}_4^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{e}_4, \mathbf{\Phi}_3 = \bar{\tau}^2 \mathbf{e}_6^T \mathbf{R} \mathbf{e}_6 - \mathbf{e}^{-\alpha} \mathbf{E}_{12}^T \mathbf{R} \mathbf{E}_{12}$$

$$\mathbf{l}_1 = \mathbf{F}_1 (\mathbf{A}_p \mathbf{e}_1 + \mathbf{A}_{vp} \mathbf{e}_3 + \mathbf{C}_p \mathbf{e}_7 - \mathbf{e}_9) - \chi_1 (\mathbf{H}_p \mathbf{e}_1 + \mathbf{D}_p \mathbf{e}_2), \mathbf{l}_2 = \mathbf{F}_2 (\mathbf{M}_p \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_{10}) - \chi_2 (\mathbf{H}_p \mathbf{e}_1 + \mathbf{D}_p \mathbf{e}_2)$$

$$\mathbf{\Pi}_1 = [\mathbf{e}_1^T \quad \mathbf{e}_2^T]^T, \mathbf{\Pi}_2 = [\mathbf{e}_9^T \quad \mathbf{e}_{10}^T]^T$$

$$\mathbf{\Pi}_3 = [\mathbf{e}_8^T \quad \mathbf{e}_7^T]^T, \mathbf{E}_{12} = [\mathbf{E}_1^T \quad \mathbf{E}_2^T]^T$$

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_4 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} \frac{2\bar{\tau} - \tau(t)}{\bar{\tau}} \tilde{\mathbf{R}} & \mathbf{X} \\ * & \frac{\bar{\tau} + \tau(t)}{\bar{\tau}} \tilde{\mathbf{R}} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ 0 & 3\mathbf{R} \end{bmatrix}$$

这里 $\mathbf{e}_i, i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ 为行块向量, 使得 $\mathbf{e}_x(t) = \mathbf{e}_1 \xi(t), \dots, \mathbf{e}_f(t) = \mathbf{e}_{10} \xi(t)$ 。那么闭环系统(6)对于 $v(t) = 0$ 是全局一致指数稳定的, 并在零初始条件下满足给定的 H_∞ 性能指标。进一步估计器增益求解为 $\mathbf{K}_{p1} = \mathbf{F}_1^{-1} \chi_1, \mathbf{K}_{p2} = \mathbf{F}_2^{-1} \chi_2$ 。

证明: 构造如下 L-K 泛函:

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_1(t) + \mathbf{V}_2(t) + \mathbf{V}_3(t) \quad (9)$$

其中:

$$\mathbf{V}_1(t) = \mathbf{e}^T(t) \mathbf{P}_p \mathbf{e}(t) \quad (10)$$

$$\mathbf{V}_2(t) = \int_{t-\tau}^t \mathbf{e}^{-\alpha(s-t)} \mathbf{e}_x^T(s) \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}_x(s) ds + \int_{t-\bar{\tau}}^t \mathbf{e}^{-\alpha(s-t)} \mathbf{e}_x^T(s) \mathbf{Q}_2 \mathbf{e}_x(s) ds \quad (11)$$

$$\mathbf{V}_3(t) = \bar{\tau} \int_{-\bar{\tau}}^0 \int_{t-v}^t \mathbf{e}^{\alpha(s-t)} \mathbf{e}_x^T(s) \mathbf{R} \mathbf{e}_x^T(s) ds dv \quad (12)$$

定义 L 为 $x(t)$ 的弱无穷小算子, L 的格式为 Euclid Math One, 请后续保持一致。

$$L\mathbf{V}_1(t) = 2\mathbf{e}^T(t) \mathbf{P}_p \mathbf{e}(t) +$$

$$\sum_{q \in M} \pi_{pq}^{\xi(t)} \mathbf{e}^T(t) \mathbf{P}_q \mathbf{e}(t) = \xi^T(t) \mathbf{\Phi}_1 \xi(t) \quad (13)$$

$$L\mathbf{V}_2(t) \leq -\alpha \mathbf{V}_2(t) + \mathbf{e}_x^T(t) (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) \mathbf{e}_x(t) - (1-u) \mathbf{e}^{-\alpha} \mathbf{e}_x^T(t-\tau(t)) \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}_x(t-\tau(t)) - \mathbf{e}^{-\alpha} \mathbf{e}_x^T(t-\bar{\tau}) \mathbf{Q}_2 \mathbf{e}_x(t-\bar{\tau}) = -\alpha \mathbf{V}_2(t) + \xi^T(t) \mathbf{\Phi}_2 \xi(t) \quad (14)$$

$$L\mathbf{V}_3(t) \leq -\alpha \mathbf{V}_3(t) + \bar{\tau}^2 \mathbf{e}_x^T(t) \mathbf{R} \mathbf{e}_x(t) - \bar{\tau} \mathbf{e}^{-\alpha} \int_{t-\bar{\tau}}^t \mathbf{e}_x^T(s) \mathbf{R} \mathbf{e}_x(s) ds \quad (15)$$

利用引理 1 和引理 2 对式(15)中的积分项进行界定:

$$-\bar{\tau} \mathbf{e}^{-\alpha} \int_{t-\bar{\tau}}^t \mathbf{e}_x^T(s) \mathbf{R} \mathbf{e}_x(s) ds \leq \frac{\bar{\tau} - \tau(t)}{\bar{\tau}} \mathbf{e}^{-\alpha} \mathbf{\kappa}_1^T \mathbf{X} \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{\kappa}_1 + \frac{\tau(t)}{\bar{\tau}} \mathbf{e}^{-\alpha} \mathbf{\kappa}_2^T \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{X} \mathbf{\kappa}_2 - \mathbf{e}^{-\alpha} \begin{bmatrix} \mathbf{\kappa}_1 \\ \mathbf{\kappa}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{2\bar{\tau} - \tau(t)}{\bar{\tau}} \tilde{\mathbf{R}} & \mathbf{X} \\ * & \frac{\bar{\tau} + \tau(t)}{\bar{\tau}} \tilde{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\kappa}_1 \\ \mathbf{\kappa}_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\text{其中 } \mathbf{\kappa}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x(t) - \mathbf{e}_x(t-\tau(t)) \\ \mathbf{e}_x(t) + \mathbf{e}_x(t-\tau(t)) - 2\mathbf{v}_1(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\kappa}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x(t-\tau(t)) - \mathbf{e}_x(t-\bar{\tau}) \\ \mathbf{e}_x(t-\tau(t)) + \mathbf{e}_x(t-\bar{\tau}) - 2\mathbf{v}_2(t) \end{bmatrix}$$

结合上式, 可以得到如下不等式:

$$L\mathbf{V}(t) \leq \xi^T(t) \tilde{\mathbf{\Phi}}_3 \xi(t) \quad (17)$$

$$\text{其中 } \tilde{\mathbf{\Phi}}_3 = \mathbf{\Phi}_3 + \frac{\bar{\tau} - \tau(t)}{\bar{\tau}} \mathbf{e}^{-\alpha} \mathbf{E}_1^T \mathbf{X} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{E}_1 +$$

$$\frac{\tau(t)}{\bar{\tau}} \mathbf{e}^{-\alpha} \mathbf{E}_2^T \mathbf{X}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{X} \mathbf{E}_2。$$

对于任意矩阵, 可以得到以下等式:

$$0 = 2[\mathbf{e}_x(t) + \mathbf{e}_x(t) \beta_1]^T \mathbf{F}_1 [-\mathbf{e}_x(t) + (\mathbf{A}_p - \mathbf{K}_{p1} \mathbf{H}_p) \mathbf{e}_x(t) + \mathbf{A}_{vp} \mathbf{e}_x(t-\tau(t)) - \mathbf{K}_{p1} \mathbf{D}_p \mathbf{e}_f(t) + \mathbf{C}_p \mathbf{w}(t)] = 2\xi^T(t) [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_9 \beta_1]^T \mathbf{F}_1 [-\mathbf{e}_9 + (\mathbf{A}_p - \mathbf{K}_{p1} \mathbf{H}_p) \mathbf{e}_1 + \mathbf{A}_{vp} \mathbf{e}_3 - \mathbf{K}_{p1} \mathbf{D}_p \mathbf{e}_2 + \mathbf{C}_p \mathbf{e}_8] \xi(t) \quad (18)$$

$$0 = 2[\mathbf{e}_f(t) + \mathbf{e}_f(t) \beta_2]^T \mathbf{F}_2 [-\mathbf{e}_f(t) + (\mathbf{M}_p - \mathbf{K}_{p2} \mathbf{D}_p) \mathbf{e}_f(t) - \mathbf{K}_{p2} \mathbf{H}_p \mathbf{e}_x(t)] = 2\xi^T(t) [\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_{10} \beta_2]^T \mathbf{F}_2 [-\mathbf{e}_{10} + (\mathbf{M}_p - \mathbf{K}_{p2} \mathbf{D}_p) \mathbf{e}_2 - \mathbf{K}_{p2} \mathbf{H}_p \mathbf{e}_1] \xi(t) \quad (19)$$

考虑系统(4)中的 H_∞ 性能, 定义以下函数:

$$\mathbf{F}(t) = \bar{\mathbf{z}}^T(t) \bar{\mathbf{z}}(t) - \gamma^2 \mathbf{v}^T(t) \mathbf{v}(t) \quad (20)$$

进一步选取目标函数 $\mathbf{J} = L\mathbf{V}(t) + \alpha \mathbf{V}(t) + \mathbf{F}(t)$, 从式(13)~式(20)可以得到:

$$\mathbf{J} \leq \xi^T(t) (\mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{\Phi}_2 + \tilde{\mathbf{\Phi}}_3 + \alpha \mathbf{\Pi}_1^T \mathbf{P}_p \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{e}_1^T \mathbf{L}_p^T \mathbf{L}_p \mathbf{e}_1 - \gamma^2 \mathbf{\Pi}_3^T \mathbf{\Pi}_3) \xi^T(t) = \xi^T(t) \mathbf{\Phi} \xi(t) \quad (21)$$

考虑到 $\mathbf{J}$ 是关于 $\tau(t)$ 的线性函数, 于是就有

$$\begin{cases} J|_{\tau(t)=0} < 0 \\ J|_{\tau(t)=\bar{\tau}} < 0 \end{cases} \Rightarrow J < 0, \forall (\tau(t)) \in [0, \bar{\tau}] \quad (22)$$

接下来根据 Schur 补定理,若式(5)和式(6)成立,则可以得到 $LV(t) \leq -\alpha V(t) - F(t)$ 成立。当切换序列进入第 p 阶段时,即 $t \in [t_{s_{p+1}-1}, t_{s_{p+1}})$ 时,根据引理 3 可以得到:

$$V(t) \leq e^{-\alpha(t-t_{s_{p+1}-1})} V(t_{s_{p+1}-1}) - \int_{t_{s_{p+1}-1}}^t e^{-\alpha(t-v)} F(v) dv \quad (23)$$

由条件(7)可以得到 $V(t_{s_{p+1}-1}) \leq \mu V(t_{s_{p+1}-1}^-)$ 。显然,每个切换时刻也适用。通过不断交替其和式(23),可以推导出初始时间的函数 $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} V(t) &\leq \mu e^{-\alpha(t-t_{s_{p+1}-1})} V(t_{s_{p+1}-1}^-) - \\ &\int_{t_{s_{p+1}-1}}^t e^{-\alpha(t-v)} F(v) dv \leq \dots \leq \\ &\mu^{\lambda(t_0, t)} e^{-\alpha(t-t_0)} V(t_0) - \\ &\int_{t_0}^t \mu^{\lambda(t_0, t)} e^{-\alpha(t-v)} F(v) dv \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $\lambda(t_0, t)$ 是所有切换次数的累积。当 $v(t) = 0, F(t) = \bar{z}^T(t) \bar{z}(t) \geq 0$ 。对于 $t \in [t_{s_p}, t_{s_{p+1}})$, 根据引理 4 得到不等式:

$$0 \leq \lambda(t_0, t) \leq \left(\frac{t-t_0}{T_D + \tau_D} \right) (T_D f + 1) \quad (25)$$

将式(25)代入式(24)中,就可以得到:

$$\begin{aligned} V(t) &\leq \\ &e^{\alpha_0 + (1-\frac{t_0}{T_D + \tau_D})(T_D f + 1) \ln \mu} e^{(\frac{(T_D f + 1) \ln \mu}{T_D + \tau_D} - \alpha)t} V(t_0) \end{aligned} \quad (26)$$

显而易见,可以得到存在 $k_1 > 0$ 和 $k_2 > 0$ 满足:

$$\|Z(t)\|^2 = \max \{ \|e(t)\|^2, \|\bar{e}(t)\|^2 \}$$

$$k_1 = \min_{p \in M} \{ \lambda_{\min}(P_p) \}$$

$$k_2 = \max_{p \in M} \{ \lambda_{\max}(P_p) \} + \frac{1}{\alpha} \lambda_{\max} Q_1 + \frac{1}{\alpha} \lambda_{\max} Q_2 +$$

$$\frac{\bar{\tau}^2}{\alpha} \lambda_{\max} R, k_2 \|Z(t)\|^2 \geq V(t) \geq k_1 \|e(t)\|^2$$

进一步可得到:

$$\|e(t)\| \leq \left[\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} e^{\frac{1}{2}(\alpha_0 + (1-\frac{t_0}{T_D + \tau_D})(T_D f + 1) \ln \mu)} \right]$$

$$e^{\frac{1}{2}(\frac{(T_D f + 1) \ln \mu}{T_D + \tau_D} - \alpha)t} \|Z(0)\|$$

由于 p 是任意选择的,上述不等式适用于任何阶段。根据条件(8),可以得出 $\frac{(T_D f + 1) \ln \mu}{T_D + \tau_D} - \alpha \leq 0$ 。那么则称闭环系统(4)在 $v(t) = 0$ 的条件下是全局一致指数稳定的。

由于 $\Phi < 0$, 那么 $\int_{t_0}^{\infty} (LV(s) + \alpha V(s) + F(s)) ds \leq 0$, 显然 $V(t) > 0$ 。那么在零初始条件下就满足以下 H_{∞} 性能:

$$\int_{t=0}^{\infty} \bar{z}^T(s) \bar{z}(s) ds \leq \gamma^2 \int_{t=0}^{\infty} v^T(s) v(s) ds \quad (27)$$

从而完成了对该定理的证明。

4 仿真算例

在本节中,将模拟 F404 发动机飞机系统在干扰和传感器故障下的实际示例^[20],以验证所提出算法的可行性:

$$A(r_t) = \begin{bmatrix} -1.46 & 0 & 2.428 \\ 0.1643 + 0.5\beta(t) & -0.4 + \beta(t) & -0.3788 \\ 0.3107 & 0 & -2.23 \end{bmatrix}$$

取自 F404 发动机飞行系统的线性化模型, $\beta(t)$ 为风变化引起的不确定模型参数。假设不确定性 $\beta(t)$ 遵循 Markov 过程,且转移概率分别表示为:

$$\beta(t) = \begin{cases} 0, & \text{当 } r = 1 \\ -1, & \text{当 } r = 2 \\ -2, & \text{当 } r = 3 \end{cases}$$

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 0.5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0.1 & 0.1 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} -1.2 & 0.6 & 0.6 \\ 2.1 & -3.2 & 1.1 \\ 0.1 & 0.2 & -0.3 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0.6 & 0.4 \\ 1.8 & -3 & 1.2 \\ 0.1 & 0.1 & -0.2 \end{bmatrix}$$

在此设定下,可以获得 A_1, A_2 和 A_3 的精确值。其他矩阵遵循如下:

$$A_{\tau_1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & 0.2 & 0.1 \\ -0.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$A_{\tau_2} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & 0.2 & 0.1 \\ -0.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$A_{\tau_3} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0.2 & 0.1 \\ -0.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 0.28, \mu = 1.05$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_D = 4.5, f = 0.1$$

选取初始值为 $\mathbf{x}(0) = [0.1 \ 0.1]^T$ ，通过求解定理中的线性矩阵不等式，我们可以得到参数 $\gamma_{\min} = 0.1863$ ，取 $\gamma = 0.4$ ，求得状态估计器增益和故障估计器增益分别为：

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} -2.1040 & 0.0868 & 2.5701 \\ 3.4248 & 1.2918 & -1.4080 \\ 0.8353 & 0.1060 & -0.8770 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} -2.3343 & 0.0662 & 2.5996 \\ 0.7595 & 0.5264 & -0.0639 \\ -0.6162 & 0.1948 & 0.1425 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{13} = \begin{bmatrix} -2.0662 & 0.0920 & 3.0772 \\ -0.6714 & 0.0719 & 0.4708 \\ 0.0336 & 0.1231 & 0.8374 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} -0.1373 & -4.7903 & 4.4291 \\ -0.1496 & -1.0553 & 0.9898 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} -1.1759 & -6.0225 & 6.9099 \\ -0.3568 & -1.3040 & 1.4974 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{23} = \begin{bmatrix} 1.1559 & -7.6732 & 7.0919 \\ 0.1192 & -1.6367 & 1.5214 \end{bmatrix}$$

在上述设置下，Markov 跳变系统可能演变如图 2 所示。同时决定 Markov 链的转移概率选择采用如图 3 所示的持续驻留时间切换序列。

假设输入扰动为 $0.5\sin t$ ，图 4~图 6 分别给出了系统在三种传感器故障信号的状态估计误差信号图以及传感器故障估计的效果图。

情况 1.1: 区间型传感器故障信号

$$f(t) = \begin{cases} 8, & 15 < t < 25 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

情况 1.2: 区间型传感器故障信号

$$f(t) = \begin{cases} 5\sin(0.5\pi t), & 15 < t < 25 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

从图 4 和图 5 可以看出，在出现扰动和区间型传感器故障时，本文所设计的估计器能够及时、有效地估计出传感器故障的大小，并保证估计误差系统随机稳定且满足一定的 H_∞ 性能。

情况 2: 无穷型传感器故障信号

$$f(t) = \begin{cases} 8, & t > 15, \\ 0, & \text{其他}。 \end{cases}$$

同样从图 6 可以看出，在出现扰动和无穷型传感器故障时，所设计的估计器同样是适用的。由此验证了本文提出的估计器设计方法的可行性和有效性。

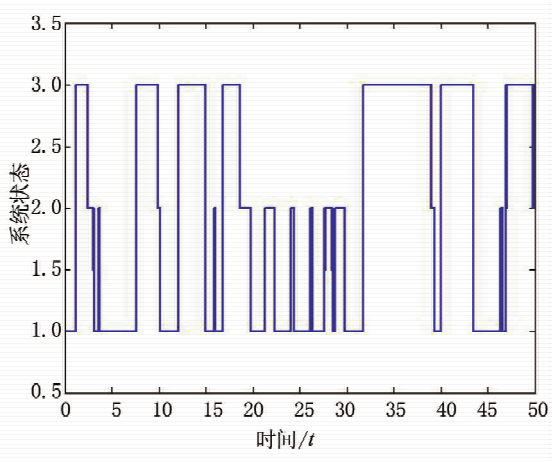


图 2 Markov 跳变序列

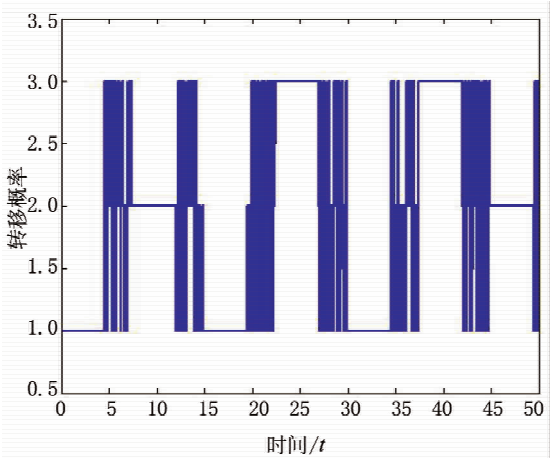
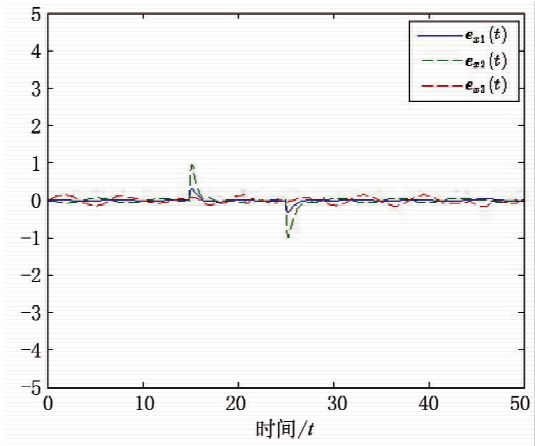


图 3 持续驻留时间切换序列



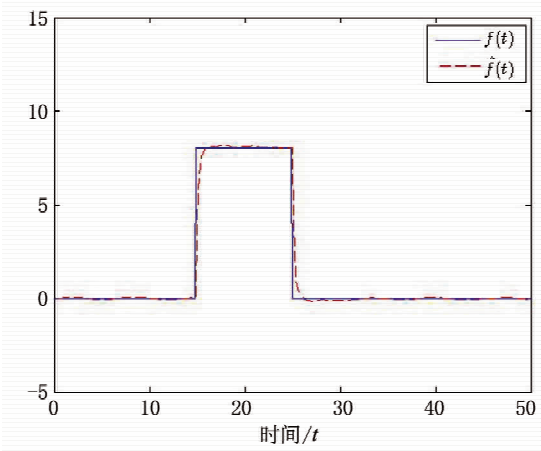


图 4 情况 1.1 区间型传感器故障仿真结果

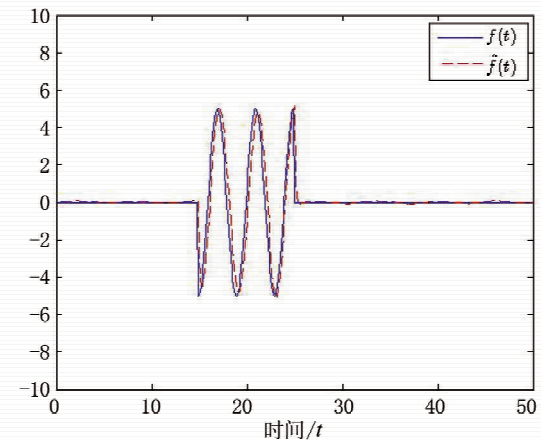
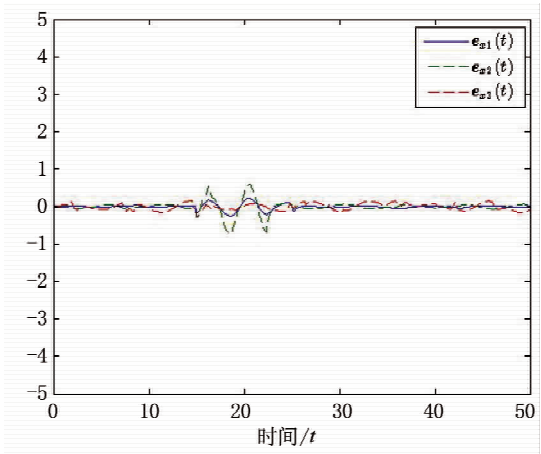


图 5 情况 1.2 区间型传感器故障仿真结果

5 结 论

研究了具有传感器故障和时变时滞的连续 Markov 跳变系统的容错状态估计问题。Markov 链的转移概率受持续驻留时间切换规则的约束。通过协同设计容错状态估计器和故障估计器,融合

故障信息构建了状态估计误差系统。基于 L-K 泛函方法、积分不等式技术和切换系统理论,推导出状态估计误差系统全局一致指数稳定并满足一定 H_{∞} 性能指标的充分条件。同时利用自由权矩阵方法得出了合适的估计器增益矩阵。最后通过 F404 发动机飞行系统模型证明了所提方法能够进行可靠、有效的故障估计。

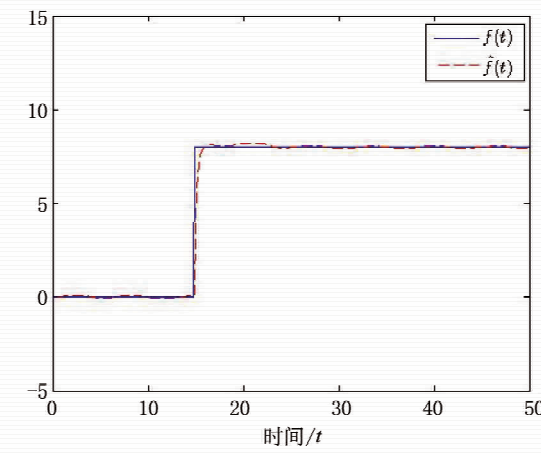
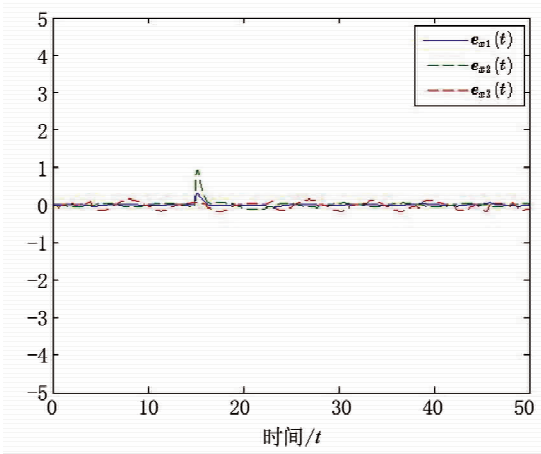


图 6 情况 2 无穷型传感器故障仿真结果

参考文献

[1] 张哈,王奇,宋云海,等. 基于马尔可夫模型下的高压换流器运行的可靠性评估[J]. 自动化与仪器仪表, 2019(2): 157—160.

[2] LEE K, BHATTACHARYA R. Stability analysis of large-scale distributed networked control systems with random communication delays: A switched system approach[J]. Systems & Control Letters, 2015, 85: 77—83.

[3] QIU L, DONG L, SHAO Z, et al. Dynamic event-triggered predictive control strategy for networked semi-Markov jump systems[J]. Systems & Control Letters, 2025, 196:

- 105986.
- [4] QIN C, LIN W J, YU J. Adaptive event-triggered fault detection for Markov jump nonlinear systems with time delays and uncertain parameters[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2024, 34(3): 1939—1955.
 - [5] FU X, PANG X. Robust fault estimation and fault-tolerant control for nonlinear Markov jump systems with time-delays[J]. *Automatica*, 2021, 62(1): 21—31.
 - [6] PANNEERSELVAM V, SAKTHIVEL R, ARAVINTH N, et al. Fault estimation for semi-Markov jump cyber-physical control systems with external disturbance[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2025, 39(2): 277—291.
 - [7] MORSE A S. Supervisory control of families of linear set-point controllers-part 1: exact matching[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(10): 1413—1431.
 - [8] BOLZERN P, COLANERI P, DE NICOLAOG. Markov jump linear systems with switching transition rates: mean square stability with dwell-time[J]. *Automatica*, 2010, 46(6): 1081—1088.
 - [9] QI W, PARK J H, CHENG J, et al. Exponential stability and L1-gain analysis for positive time-delay Markovian jump systems with switching transition rates subject to average dwell time[J]. *Information Sciences*, 2018, 424: 224—234.
 - [10] WANG J, WU J, CAO J, et al. H_∞ fuzzy dynamic output feedback reliable control for Markov jump nonlinear systems with PDT switched transition probabilities and its application[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2021, 30(8): 3113—3124.
 - [11] 和晓华, 杨建洲, 何建波, 等. 基于一种改进型逆凸不等式的混合攻击下多区域时滞电力系统的分布式控制[J]. *计算技术与自动化*, 2023(3): 5—12.
 - [12] LIN W J, WANG Q, TAN G. Asynchronous adaptive event-triggered fault detection for delayed Markov jump neural networks: A delay-variation-dependent approach[J]. *Neural Networks*, 2024, 171: 53—60.
 - [13] FAN X Y, LIN W J, LIU Z, et al. Reachable set control for nonlinear Markov jump cyber-physical systems with false data injection attacks[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2024, 361(1): 224—233.
 - [14] ZHONG G X, YANG G H. Simultaneous control and fault detection for discrete-time switched delay systems under the improved persistent dwell time switching[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2016, 10(7): 814—824.
 - [15] LIN W J, TAN G, WANG Q G, et al. Fault-tolerant state estimation for Markov jump neural networks with time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2023, 71(4): 2114—2118.
 - [16] SEURET A, GOUAISBAUT F. Wirtinger-based integral inequality: application to time-delay systems[J]. *Automatica*, 2013, 49(9): 2860—2866.
 - [17] ZHANG C K, HE Y, JIANG L, et al. An extended reciprocally convex matrix inequality for stability analysis of systems with time-varying delay[J]. *Automatica*, 2017, 85: 481—485.
 - [18] GOKSU G, BAGCI U. Observer-based H_∞ finite-time control for switched linear systems with interval time-delay[J]. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2019, 41(5): 1348—1360.
 - [19] SHEN H, HUANG Z, CAO J, et al. Exponential H_∞ filtering for continuous-time switched neural networks under persistent dwell-time switching regularity[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 50(6): 2440—2449.
 - [20] LI X, AHN C K, LU D, et al. Robust simultaneous fault estimation and nonfragile output feedback fault-tolerant control for Markovian jump systems[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2018, 49(9): 1769—1776.