https://doi.org/10.3799/dqkx.2026.093

一种融合半监督深度学习与多点地质统计的三维地质建模及不确定性评估框架

周顺平[1],袁 创[1],储德平[2],方 芳[1],潘声勇[3],刘兆鑫[4],李 红[5],万 波[1*]

1. 中国地质大学(武汉)计算机学院,湖北武汉 430078
2. 中国地质大学(武汉)地理与信息工程学院,湖北武汉 430078
3. 武汉中地数码科技有限公司,湖北武汉 430074
4. 四川省综合地质调查研究所,四川成都 610081
5. 四川省第五地质大队,四川成都 610081

摘 要: 针对钻孔数据稀疏、类别不均衡及复杂地质结构导致的三维地质建模精度低、空间连续性差和不确定性高的问题,提出一种融合半监督深度学习与多点地质统计的分阶段联合建模方法.首先,构建基于邻域空间上下文特征的半监督空间感知注意力网络(SAAN),利用伪标签机制提升地层分类精度并生成初始模型;随后,设计多点地质统计随机邻域搜索(RNS)策略对低置信度与地质语义冲突区域进行迭代优化;最后,提出协同一致性熵量化两阶段预测一致性及联合不确定性.以成都平原地区钻孔数据为例,所提方法在地层空间分布再现、边界刻画及结构连续性方面优于反距离加权(IDW)、支持向量机(SVM)、随机森林(RF)、多层感知机(MLP)及Kolmogorov-Arnold网络(KAN)等基线方法.此外,协同一致性熵能有效识别结构性不确定性,避免高熵值但预测一致的误判.所提出的分阶段联合建模框架能在有限、不均衡钻孔数据条件下实现高精度、结构合理且不确定性可控的三维地质模型重建,为复杂地质环境下的地下结构刻画与工程应用提供有效技术支撑.

关键词: 三维地质建模;深度学习;半监督学习;多点地质统计;不确定性评估.

中图分类号: P628 **文章编号:** 1000-2383(2026)09-3547-15 **收稿日期:** 2025-12-22

A Three-Dimensional Geological Modeling and Uncertainty Analysis Framework Integrating Semi-Supervised Deep Learning and Multiple-Point Geostatistics

Zhou Shunping[1], Yuan Chuang[1], Chu Deping[2], Fang Fang[1], Pan Shengyong[3], Liu Zhaoxin[4], Li Hong[5], Wan Bo[1*]

1. *School of Computer Science, China University of Geosciences (Wuhan), Wuhan* 430078, *China*
2. *School of Geography and Information Engineering, China University of Geosciences (Wuhan), Wuhan* 430078, *China*
3. *Wuhan Zondy Cyber Technology Co., Ltd., Wuhan* 430074, *China*
4. *Sichuan Institute of Comprehensive Geological Survey, Chengdu* 610081, *China*
5. *The Fifth Geological Team of Sichuan Province, Chengdu* 610081, *China*

基金项目: 国家自然科学基金项目(No. 42571535).

作者简介: 周顺平(1967-),男,教授,研究方向为三维地质建模. ORCID: 0000-0002-2697-3383. E-mail: zhoushunping@cug.edu.cn

* **通讯作者:** 万波,ORCID: 0000-0003-2387-5419. E-mail: wanbo@cug.edu.cn

引用格式: 周顺平,袁创,储德平,方芳,潘声勇,刘兆鑫,李红,万波,2026.一种融合半监督深度学习与多点地质统计的三维地质建模及不确定性评估框架.地球科学,51(9):3547-3561.

Citation: Zhou Shunping, Yuan Chuang, Chu Deping, Fang Fang, Pan Shengyong, Liu Zhaoxin, Li Hong, Wan Bo, 2026. A Three-Dimensional Geological Modeling and Uncertainty Analysis Framework Integrating Semi-Supervised Deep Learning and Multiple-Point Geostatistics. *Earth Science*, 51(9): 3547-3561.

Abstract: To address the problems of low accuracy, poor spatial continuity and high uncertainty in 3D geological modeling caused by sparse borehole data, unbalanced categories and complex geological structures, a phased joint modeling method integrating semi-supervised deep learning and multiple-point geostatistics is proposed in this paper. Firstly, a semi-supervised Spatial-Aware Attention Net (SAAN) based on neighborhood spatial context features is constructed, and the pseudo-label mechanism is utilized to improve the classification accuracy of strata and to generate the initial model; Subsequently, the multiple-point geostatistics Random Neighborhood Search (RNS) strategy is combined to iteratively optimize the areas with low confidence and geological semantic conflicts; Finally, the collaborative consistency entropy is proposed to quantify the two-stage prediction consistency and joint uncertainty. Taking the borehole data in the Chengdu Plain area as an example, the proposed method outperforms baseline methods such as Inverse Distance Weighting (IDW), Support Vector Machine (SVM), Random Forest (RF), Multi-layer Perceptron (MLP), and Kolmogorov-Arnold Networks (KAN) in terms of reproduction of stratum spatial distribution, boundary characterization, and structural continuity. In addition, the collaborative consistency entropy can effectively identify structural uncertainties and avoid misjudgments of high entropy values but consistent predictions. The proposed phased joint modeling framework can achieve high-precision, structurally reasonable and uncertainty controllable three-dimensional geological model reconstruction under the conditions of limited and unbalanced borehole data, providing effective technical support for the characterization and engineering application of underground structures in complex geological environments.

Key words: three-dimensional geological modeling; deep learning; semi-supervised learning; multiple-point geostatistics; uncertainty assessment.

0 引言

随着城市地下空间开发需求的不断提升,准确识别复杂地质结构对于地下空间的安全与高效利用至关重要(Tian *et al.*, 2025).三维地质建模能够直观呈现地下结构,为分析地质体的空间分布提供有效支撑(Li *et al.*, 2024;扶金铭等,2024;张瀚等,2024).钻孔数据因其纵向分辨率高、空间定位精确,是三维地质建模中的重要依据(唐丙寅等,2015;郭甲腾等,2019).然而,由于钻探成本和技术条件的限制,实际应用中钻孔数据常表现为空间稀疏、地层类别分布不均等特征,显著制约了模型的精度与空间连续性,成为当前三维建模面临的主要挑战之一(Hang *et al.*, 2025).

近年来,深度学习(Deep Learning, DL)方法已被广泛引入三维地质建模领域(左仁广等,2021;周永章等,2021;Yang *et al.*, 2026).该类方法能够从有限标注数据中学习复杂的非线性空间特征,实现地层与地质体的自动分类与识别(Liu *et al.*, 2021; Li *et al.*, 2023; Chu *et al.*, 2024).然而,深度模型的有效训练通常依赖大量高质量的三维数据样本,而实际地质建模中数据往往有限(Guo *et al.*, 2024).同时,传统三维训练数据所能提供的特征信息较少,在一定程度上制约了模型对复杂地质结构的表达能力与泛化性能.

多点地质统计学(Multiple-Point Geostatistics, MPS)是一种通过训练图像(Training Image, TI)模拟地质体复杂空间结构的方法(Mariethoz and Caers, 2014).该方法通过在训练图像中提取具有代表性的空间模式,并将其应用于模拟区域(Comunian *et al.*, 2012).多点地质统计方法已在地质建模领域得到广泛应用(Meerschman *et al.*, 2013;Hou *et al.*, 2021, 2022;唐佳凡等,2024).然而,MPS方法聚焦于局部地质结构的空间连续性,导致在三维建模中更易陷入局部最优,缺乏对地质体全局结构的有效建模约束.

深度学习与多点地质统计方法的结合,为地质建模提供了一种兼顾全局结构与局部细节的策略.Bai and Tahmasebi(2020)利用卷积神经网络(CNN)从训练图像(TI)中提取空间模式特征,并在CCSIM(Cross-Correlation Simulation; Tahmasebi *et al.*, 2012)生成的初始模型基础上,对偏离硬数据约束的区域进行修正,从而更精确地再现地质结构细节.杨松桦等(2026)则通过自适应全连接深度神经网络构建初始模型,并采用多尺度迭代的MPS优化初始模型,有效克服了传统MPS方法易陷入局部最优的问题.然而该方法存在模型收敛慢、效率低等问题.

不确定性分析旨在评估地质建模结果在空间分布与预测阶段上的稳定性与可靠性(Guo *et al.*, 2022;Li *et al.*, 2023).随着多阶段、联合建模方法的引入,如何定量刻画不同建模阶段预测结果之间的不确定性特征,成为三维地质建模中的一个重要问题.针对这一问题,Chu *et al.*(2025)提出利用联合熵对多阶段建模结果的不确定性进行量化分析.然

而,该联合熵方法主要描述不同阶段预测结果的整体不确定性水平,难以有效反映多阶段预测之间的联系.

针对上述问题,本文提出一种融合深度学习与多点地质统计的三维地质建模框架.该框架通过构建空间上下文特征,缓解三维训练数据特征单一的问题,并采用半监督训练策略以克服标注样本不足的限制.同时,充分结合深度学习在全局空间模式识别与预测方面的优势,以及多点地质统计对局部结构特征的优化能力,实现对地质结构的合理刻画.最后设计协同一致性熵用以表征多阶段预测结果的空间不确定性及其阶段间协同一致关系.

1　研究方法

本文以钻孔数据为建模数据源,通过联合空间感知注意力网络(Spatial-Aware Attention Net,SAAN)与多点地质统计中的随机邻域搜索策略(Random Neighborhood Search,RNS),设计了一种三维地质结构重建方法(图 1).该方法主要包含 3 个步骤:(1)构建半监督空间感知注意力网络,以预测地质属性分布并生成初始三维模型.(2)通过随机邻域搜索方法迭代优化初始模型的局部特征,计算优化位置的协同一致性熵.(3)输出最终三维地质模型及其协同一致性熵模型,用于三维模型的可视化及其不确定性评估.

1.1　构建空间感知注意力网络

1.1.1　特征构建　本文以钻孔数据的基本空间坐标信息(X,Y,Z)为基础,引入了一种基于邻域聚合的空间上下文特征构建方法,以进一步增强地层分类特征.该方法通过提取与目标钻孔相同高程切片处的相邻钻孔地层分类信息,生成一个新的高程层面空间上下文特征.具体而言,首先,将参与建模的所有钻孔视为图网络中的节点.对于需要构建空间上下文特征的钻孔,记为目标钻孔 i,计算其与所有其他钻孔 j 的平面欧氏距离,得到距离集合:

$$D_i=\left\{d_{ij}|j=1,2,\cdots,M;j\neq i\right\},\tag{1}$$

$$d_{ij}=\sqrt{\left(x_i-x_j\right)^2+\left(y_i-y_j\right)^2},\tag{2}$$

其中,(x_i,y_i)和(x_j,y_j)分别为钻孔 i 和钻孔 j 的平面坐标,M 为钻孔总数.然后从距离集合 D_i 中选择距离最小的 n 个钻孔,构成目标钻孔 i 的邻域集合:

$$N(i)=\left\{j|d_{ij}\in\text{最小的}n\text{个距离}\right\}.\tag{3}$$

对于目标钻孔的每个采样点 p,在其邻域钻孔集合 $j\in N(i)$ 中找到位于相同高程的对应点,并提取这些邻近钻孔的地层分类信息.具体表示如下:

$$S_j=\left[s_{j,1},\ s_{j,2},\ \cdots,\ s_{j,C}\right],$$

$$s_{j,c}\in\{0,1\},\ \sum_{c=1}^{C}s_{j,c}=1,\tag{4}$$

其中,S_j 表示邻近钻孔 j 在对应高程切片处的 one-hot 编码特征,C 为地层类别总数,编码长度由地层类别总数 C 决定.$s_{j,c}=1$ 表示该点属于第 c 类地层,其余位置为 0.例如,若 $C=5$,则第 4 类地层的 one-hot 编码为(0,0,0,1,0).

随后,根据邻近钻孔 $j\in N(i)$ 与目标钻孔 i 的平面欧氏距离 d_{ij},采用反距离加权法计算其权重

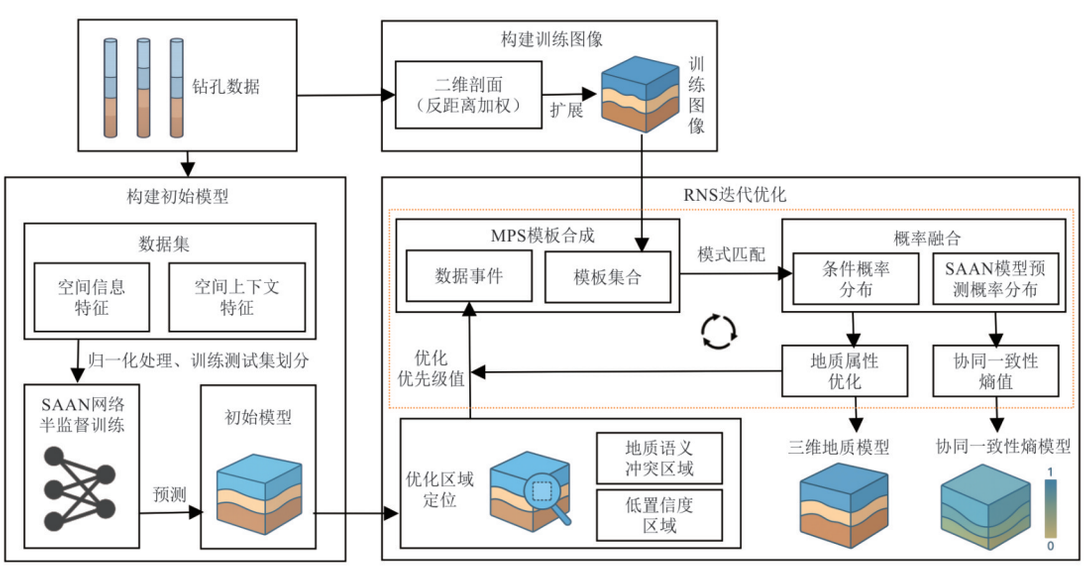

图 1　SAAN-RNS 三维地质建模流程

Fig.1　SAAN-RNS 3D geological modeling flowchart

w_{ij}，具体表示如下：

$$w_{ij}=\frac{1/d_{ij}}{\sum_{k\in N(i)}1/d_{ik}}, \tag{5}$$

对邻近钻孔 one-hot 特征 S_j 进行加权得到加权特征 $w_{ij}\times S_j$.

最后，将所有邻近钻孔的加权特征累加，生成目标钻孔采样点 p 的最终空间上下文特征，记为 $S_{i,p}$，具体计算如下：

$$S_{i,p}=\sum_{j\in N(i)}w_{ij}S_j. \tag{6}$$

最终样本特征由基本空间信息与空间上下文特征拼接而成，可表示为 $F_{i,p}=\{X_{i,p},Y_{i,p},Z_{i,p},S_{i,p}\}$，其中 $F_{i,p}$ 表示第 i 个钻孔在位置 p 的最终特征，$(X_{i,p},Y_{i,p},Z_{i,p})$ 为位置 p 的空间坐标信息，$S_{i,p}$ 为该位置的空间上下文特征.

1.1.2 空间感知注意力网络 为适应1.1.1节中构建的特征，本文设计了空间感知注意力网络.该网络由位置编码模块、共享全连接层模块以及通道注意力模块构成.其中，位置编码模块负责将空间坐标映射为多频率的高维表示，使网络能够感知局部几何变化信息；共享全连接层模块通过多层共享权重的线性映射结构，对输入特征进行统一的高维抽象，确保不同位置的钻孔在相同语义空间中表达；通道注意力模块则自适应地为各通道分配重要性权重，强化关键通道的表达能力并抑制冗余信息.网络模型结构如图2所示.

网络以空间信息特征 $x=(X,Y,Z)$ 和空间上下文特征 S 为输入.在位置编码模块中，通过多尺度频率展开对空间坐标特征进行高维嵌入.编码后的位置信息特征与空间上下文特征 S 进行特征拼接，形成的融合特征 F' 将作为后续网络的输入.具体而言，设位置编码的频带数为 L，则位置编码函数 $\gamma(x)$ 可表示为：

$$\gamma(x)=\left[\sin(2^0\pi x),\ \cos(2^0\pi x),\ \cdots,\ \sin(2^{L-1}\pi x),\ \cos(2^{L-1}\pi x)\right], \tag{7}$$

$$F'=\mathrm{Concat}(\gamma(x),S), \tag{8}$$

符号 Concat 表示特征拼接操作.经过位置编码后，得到编码特征维度为 $\gamma(x)\in R^{3\times 2L}$.将拼接后的融合特征 F' 输入共享全连接层模块，通过多层共享权重的全连接网络提取高维空间特征 F_1.为了进一步增强网络对重要通道特征的感知能力，F_1 被送入通道注意力模块，为每个通道分配自适应权重.具体而言，第一层全连接将特征映射至512维空间，经过非线性激活后，第二层全连接将其映射到64个通道维度，并对权重进行归一化至[0，1].最后将通道权重 q 与中间特征 F_1 按通道逐元素相乘得到加权特征矩阵 F_s.具体计算流程如下：

$$q=\mathrm{Sigmoid}\left(\mathrm{Linear}\left(\mathrm{ReLU}\left(\mathrm{Linear}(F_1,512)\right)\right),64\right), \tag{9}$$

$$F_s=q\odot F_1, \tag{10}$$

其中，Linear 代表全连接层，ReLU 是激活函数，Sigmoid 是归一化函数，$\odot$ 表示按通道乘法.为了得到地层的概率分布，将加权的特征 F_s 输入到全

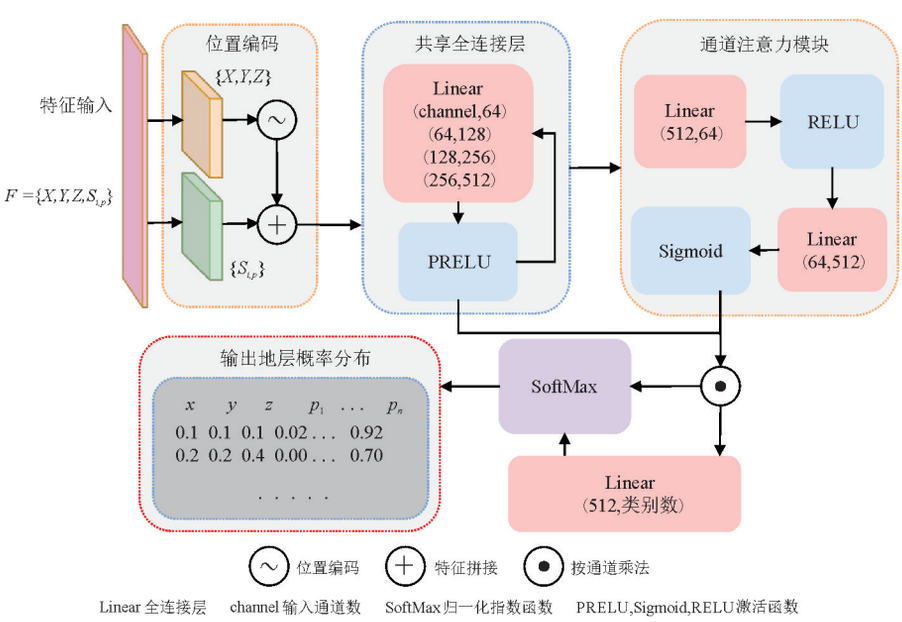

图2 空间感知注意力网络

Fig.2 Spatial-aware attention net

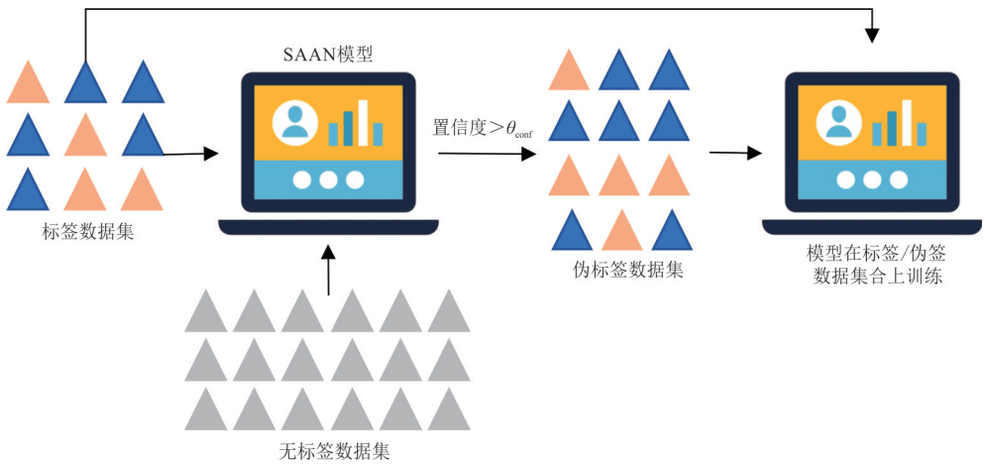

图 3　半监督学习策略

Fig.3　Semi-supervised learning strategy

连接层中,通过 softmax 将高维特征映射为各地层类别的归一化概率值,具体计算过程如下:

$$\text{probs}=\text{softmax}\left(\text{Linear}\left(qF_{s},\text{类别数}\right)\right),\quad(11)$$

其中,probs 为每个样本的地层类别概率分布.

1.1.3　半监督学习策略　在三维地质建模中,钻孔数据往往稀疏,监督样本数量有限;若仅依赖监督样本训练 SAAN,模型容易出现局部过拟合、空间连续性表达不足等问题,为此本文采用半监督学习策略.在训练过程中,半监督学习策略如图 3 所示,模型首先基于标注数据训练至预设的准确率阈值 θ_{acc},以确保其具备可靠的初始判别能力.随后,将模型应用于未标注样本,对其预测概率进行评估,并依据置信度阈值 θ_{conf} 筛选出高置信度样本,将其预测类别视为伪标签加入训练集中.扩展后的数据集用于继续训练模型,并以迭代方式重复该过程,逐轮吸收新的高置信度伪标签.

1.2　随机邻域搜索迭代优化

为建立可信的区域地质模型,应充分考虑地层层序及断层错切等地质约束.在建模阶段,若忽略这些约束,容易导致局部地质语义关系混乱.为此,本研究设计了两阶段区域定位机制,用于确定后续优化所需的空间范围,以提高模型的地质合理性和预测可靠性.

第一阶段为地质语义冲突区域定位.其基本过程为(图 4):沿钻孔深度方向提取钻孔地层属性,构建自上而下的有序层序序列;将所有钻孔的层序信息进行合并,建立完整的地层层序数据库.在初始模型中,对于任意位置,同样沿钻孔方向提取其地层层序,并与数据库进行比对.当该序列不属于数据库中任一层序的连续子序列时,即判定该位置存在地层层序冲突.此时认为该区域的地层可信度降低,并将其标记为需进一步约束与重新模拟的区域.

第二阶段为低置信度区域定位.在初始模型的地层预测阶段,SAAN 对每个网格中心点 g 输出一个完整的地层类别概率分布 $p(g)$.具体地,模型最后一层 softmax 函数将网络的原始输出(logits)映射为归一化概率:

$$p(g)_c=\frac{\exp\left(z_c(g)\right)}{\sum_{k=1}^{C}\exp\left(z_k(g)\right)},\quad c=1,\cdots,C,\quad(12)$$

其中,$z_c(g)$ 为 SAAN 对网格点 g 在类别 c 上的 logits 输出,C 为地层类别总数,$p(g)_c$ 表示网格点属于类别 c 的预测概率.基于此,设置地层置信度阈值 μ,对于每个网格点,若其最大预测概率 $\max_c p(g)_c<\mu$ 时,即模型对所有地层类别都缺乏足够置信度,则该网格被判定为低置信度区域.最终,对地质语义冲突区域与低置信度区域共同执行重新模拟与优化更新,从而保证模型在地质合理性与预测可信度上的双重一致性.

针对初始模型中识别出的待优化区域,采用随机邻域搜索策略进行迭代优化.首先,需确定优化区域内各节点的更新顺序,为此引入优化优先级值(Optimization Priority Value,OPV)以表征各节点的优化顺序,对于每个节点,其 OPV 为:

$$\text{OPV}_i=w_1\cdot\frac{M_i-M_{\min}}{M_{\max}-M_{\min}}+w_2\cdot\left(1-\frac{D_i-D_{\min}}{D_{\max}-D_{\min}}\right),\quad(13)$$

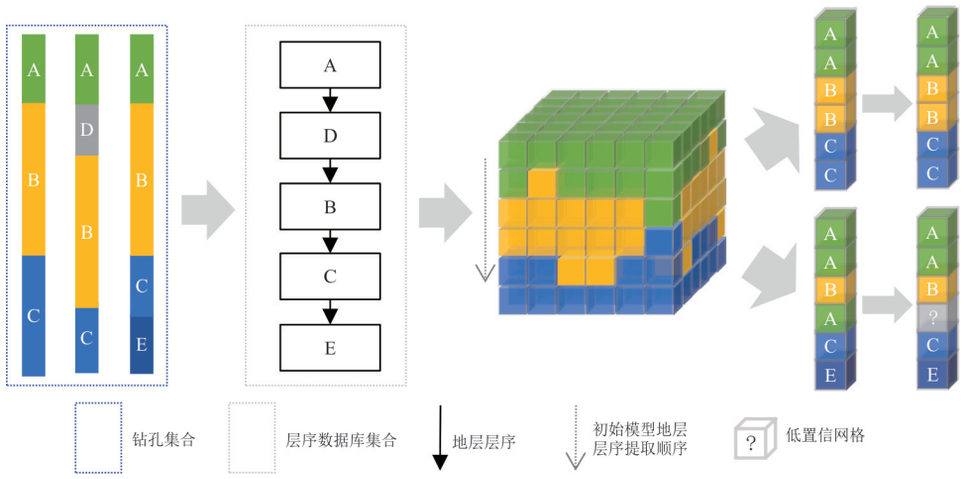

图 4 地质语义提取及匹配示意图

Fig.4 Schematic diagram of geological semantic extraection and matching

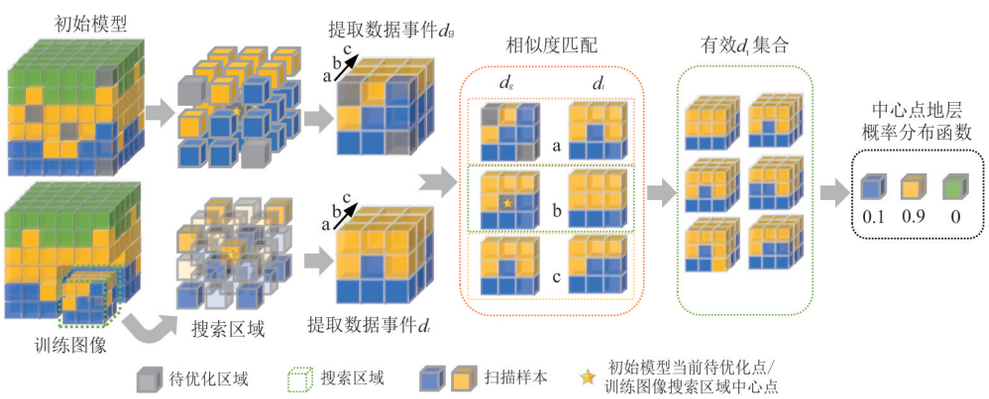

图 5 3D 中 RNS 流程

Fig.5 RNS process in 3D

其中，M_i 是当前节点与其最近的钻孔节点之间的距离 .$M_{\min}$ 和 $M_{\max}$ 分别是所有节点距其各自最近的钻孔节点的距离的最小值和最大值 .D_i 为当前节点邻域内的已知数据点数量(密度)，$D_{\min}$ 和 $D_{\max}$ 分别是所有节点邻域内已知数据点的最小值和最大值 .w_1 和 w_2 是权重系数，满足 $w_1+w_2=1$. OPV 的取值范围为 [0,1].OPV 值为 0 时说明该节点离钻孔最近，邻域信息最丰富，最先被优化；OPV 值为 1 时说明该节点离钻孔数据远，邻域信息也稀疏，最后被优化 .

在确定优化路径后，沿该路径在训练图像中执行随机邻域搜索以实现模型优化 . 其中训练图像依托钻孔数据构建，具体而言：首先基于钻孔点的 Delaunay 三角剖分关系，在相邻钻孔之间采用反距离加权方法生成二维地质剖面；随后，依据 Hou *et al.* (2022)提出的二维数据向三维扩展的方法，得到三维训练图像 . 优化流程如图 5 所示 . 对于初始模型中每个待优化点 $g(c)$，根据邻域搜索半径参数 r 构建其三维数据事件 d_g，通过在三维网格空间内对中心点 $g(c)$ 周围的偏移向量集合 $\{h_1,h_2,\cdots,h_n\}$ 进行采样，可获得该点的局部数据事件，d_g 可表示如下：

$$d_g=\{g(c+h_1),(c+h_2),\cdots,(c+h_n)\}=\{g(c_1),(c_2),\cdots,(c_n)\},\tag{14}$$

其中，$g(c_i)$ 表示初始模型中与当前模拟位置 c_i 对应的地层类别 . 通过扫描步长参数 s，在训练图像中以 $g(c_i)$ 为中心，限定一个反映局部地质结构特征的搜索邻域；随后，引入搜索比例参数 f，在该局部搜索邻域内随机抽取一定比例的候选样本，用于表征相同地层条件下的多种可能空间构型 . 同时，为增强模式搜索的多样性与全局约束能力，在局部搜索邻域之外额外随机选取 N_r 个候选样本作为补充搜索集 . 对于每一个候选样本，均采用与当前数据事件 d_g 相同的邻域结构，从训练图像中提取形态一致的候选数据事件 d_t，用于后续的相似性度量与匹配判别 .

随后,对当前数据事件d_g与所有候选数据事件d_t逐一计算相似度,并引入相似度阈值t作为筛选准则,仅保留相似度不高于t的候选事件.由此,从全部候选数据事件中筛选得到一组与d_g在空间结构与地层组合特征上最为相似的有效模式集合.对该有效模式集合中所有候选事件d_t的中心节点地层类别进行统计,可构建当前位置$g(c)$的条件类别概率分布(Conditional Probability Density Function, CPDF),用于表征在当前邻域条件下不同地层类别出现的可能性.将CPDF与深度模型预测$g(c)$的类别概率分布函数(Model-based Probability Density Function, MPDF)融合,用以确定优化位置最终的地层.初轮模拟完成后,部分单元格可能仍存在孤立噪声.对这些单元格进行二次模拟,待所有待更新网格单元完成迭代赋值后,即可获得最终的三维地质模型.

优化过程中两个数据事件之间的相似度计算参照Mariethoz *et al.*(2010):

$$d\{d_g,d_t\}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}z_i,\ z_i=\begin{cases}0, g(c_i)=t(c_i)\\1, g(c_i)\neq t(c_i)\end{cases}, \tag{15}$$

其中,m是数据事件中节点的数量;$g(c_i)$和$t(c_i)$是数据事件d_g和d_t中第i个节点的属性.概率融合使用对数线性合并公式(Lubold and Taylor,2022),其表达式如下:

$$P_E\propto P_0^{1-\sum_{i=1}^{m}w_i}\prod_{i=1}^{m}P_i^{w_i}, \tag{16}$$

其中,P_0为深度学习输出的类别概率分布(MPDF),P_1为MPS模拟得到的类别概率分布(CPDF),w_i是权重参数.

1.3　不确定性分析

为量化两阶段建模过程中地层识别结果的不确定性,本文引入信息熵作为评价指标.信息熵H用于刻画随机变量取值概率分布的不确定程度,在地质建模中,每个网格点的地层类型可视为一个随机变量,基于模型输出的类别概率分布即可计算其信息熵,从而实现对地层识别不确定性的量化(Boyd *et al.*, 2019):

$$H(x)=-\sum_{i=1}^{n}P(x_i)\lg P(x_i), \tag{17}$$

其中,n表示类别的数量,$P(x_i)$表示x属于类别i的概率.$H(x)$的值为0表示分类中的完全确定性,而$H(x)$的值为1表示高度不确定性.

在本研究中,SAAN的地层预测分类结果和基于三维随机邻域搜索的优化结果均对三维地质模型的不确定性有显著影响.针对多阶段的熵值计算,Chu *et al.*(2025)指出,应从地层分类到岩性优化的全过程中捕获信息熵,并提出联合熵估计如下:

$$H(X,S)\approx H(S)+H(X), \tag{18}$$

其中,$H(X,S)$表示联合熵,近似等于地层识别分类过程的熵$H(S)$与岩性优化过程的熵$H(X)$之和.此公式揭示了联合不确定性可由两个阶段不确定性的组合近似表示.

但其联合熵仅衡量两阶段各自的不确定性,并未衡量两者之间的关系,其无法区分“不同阶段预测一致但共同不确定”与“不同阶段预测冲突导致不确定”这两类地质含义完全不同的情形.例如,当两阶段都给出接近均匀分布时,熵值较高但二者是一致的,属于信息不足带来的不确定性,其不确定性不应被无限放大;而当两模型给出方向相反且高度确定的预测时,它们的熵可能反而较低,但却代表结构认识上的根本冲突,其不确定性应被放大.因此,仅依赖熵值之和既无法识别不确定性的来源,也忽略了两模型之间的结构关系.为此,本文受Bhattacharyya系数(Derpanis, 2008)的启发,将一致性指数定义如下:

$$I(x)=\sum_{i=1}^{C}\sqrt{P_{\mathrm{ML}}^{i}(x)\cdot P_{\mathrm{MPS}}^{i}(x)}, \tag{19}$$

其中,$P_{\mathrm{ML}}^{i}(x)$为机器学习模型在空间点x上预测属于第i类的概率,$P_{\mathrm{MPS}}^{i}(x)$是MPS方法在同一点预测为第i类的概率,C是地层分类类别总数,$I(x)$取值范围在[0,1],越接近1表示两种模型预测结果越一致;进而定义协同一致性熵(Collaborative Consistency Entropy, $H_{\mathrm{CCE}}(x)$):

$$H_{\mathrm{CCE}}(x)=\big(1-I(x)\big)\cdot\big(H_{\mathrm{ML}}(x)+H_{\mathrm{MPS}}(x)\big), \tag{20}$$

其中,$H_{\mathrm{ML}}(x)$和$H_{\mathrm{MPS}}(x)$分别表示深度学习模型与MPS方法在点x上的信息熵.$H_{\mathrm{CCE}}(x)$是协同一致性信息熵,当一致性高(即$I(x)\approx1$),说明两者很接近,乘积趋0,不确定性低;当一致性低($I(x)\approx0$),说明两者预测差异大,此时总不确定性取决于两者的不确定性之和.通过一致性指标衡量两模型概率分布的匹配程度,并以此调制熵值,使得在模型高度一致时即使熵高也不会被误判为结构性不确定性;而当模型存在显著分歧时则能够放大不确定性,从而获得更符合地质结构认知逻辑的联合不确定性表达.

2 实验及结果分析

2.1 数据集

研究区域主要位于四川省成都市的中央凹陷带及东部边缘构造带上(王波等,2021),区域内钻孔揭示的地层主要以白垩系和第四系为主,并涵盖少部分上侏罗统.其中第四系包括人工填土层、全新统冲积物等.白垩系主要由夹关组、天马山组、灌口组等组成.侏罗系包括蓬莱镇组.

建模区域及钻孔分布如图 6 所示,其中钻孔深度在 100~120 m,共 79 个实验钻孔,建模区域范围为 34.8 km×46.0 km,图中 B_1~B_8 为剖面上的钻孔,其中 B_5 为测试钻孔,不参与建模.研究区域主要地质对象代号及颜色标识如图 7a 所示.图 7b 展示了研究区部分钻孔的分层特征.

基于 1.1.1 节的特征构建方法,对实验钻孔及通过 Delaunay 三角剖分构建的钻孔间确定性剖面进行不等间隔采样,生成网络训练的标签数据.同时,将三角剖分中每个三角单元内属性一致的三角面连接形成高置信度区域,对其进行不等间隔采样,生成无标签数据,以用于后续的伪标签生成.随后,对采样数据中的空间信息特征进行归一化处理(Chu *et al.*, 2024),最终获得标签样本 9 684 个,无标签样本 168 057 个.将标签数据按 8∶2 的比例划分为训练集和测试集;随后在训练集中再按 8∶2 的比例划分为训练子集和验证集.最终训练集一共 6 198 个样本,验证集 1 549 个样本,测试集 1 937 个样本.各集合中样本岩性分布如图 8 所示.数据样本特征构成如表 1 所示,其中基本空间信息特征为归一化后的数据,空间上下文特征权重展示了各类别在空间邻域中对目标点的加权影响程度.

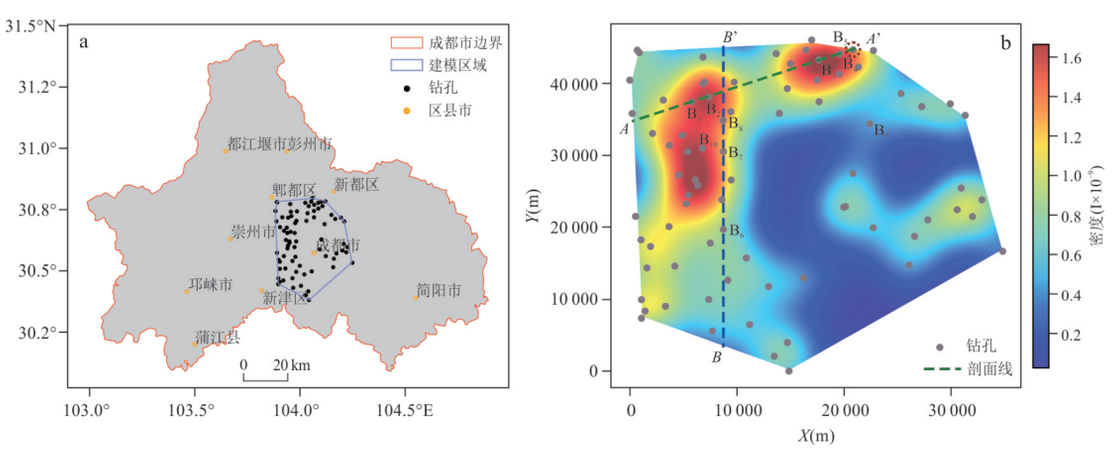

图 6 建模区域(a)和钻孔分布(b)

Fig.6 Modeling area (a) and borehole distribution (b)

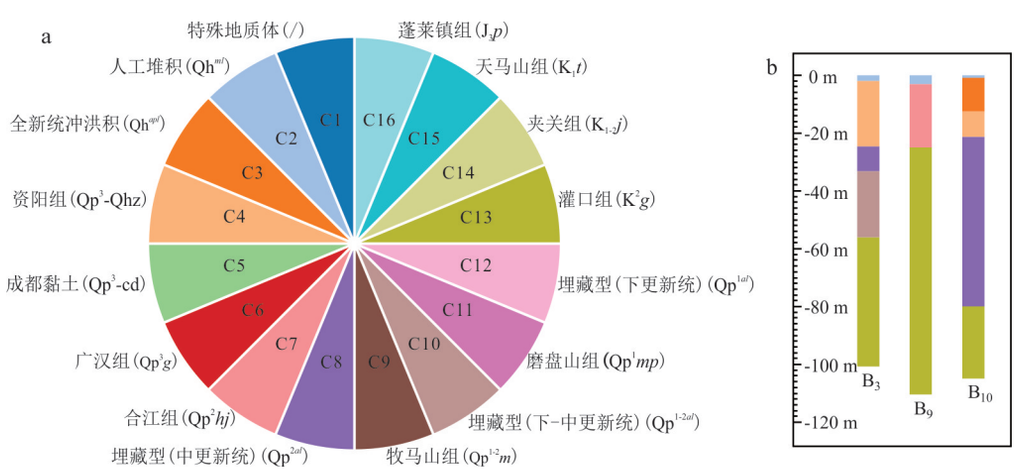

图 7 研究区主要地质对象(a)及钻孔数据可视化(b)

Fig.7 Main geological objects of the study area (a) and the visualization of borehole data (b)

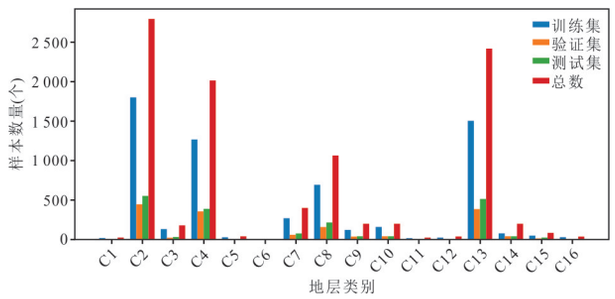

图 8　训练集、验证集和测试集岩性分布

Fig.8　Lithologic distribution in the training set, validation set and test set

2.2　实验参数

本文实验全程在PC机上完成,操作系统为64位Windows 10,采用的计算机语言是Python,版本3.10.在构建空间上下文特征时,设置邻域钻孔数量 n=3;SAAN网络训练过程中的学习率设为0.000 1,模型采用Adamax优化器.PReLU函数被用作神经网络中的激活函数,用于训练的批量大小设置为10 000.半监督学习策略中将准确率阈值 θ_{acc} 和置信度阈值 θ_{conf} 设置为0.9.优化优先级计算参数 w_1=0.8,w_2=0.2;RNS迭代优化过程中参数包括:地层置信度阈值 μ = 0.9;搜索半径 r=2;扫描步长参数 s=0.2;搜索比例参数 f=0.8;随机选取样本数 N_r=20;相似度阈值 t=0.2.

2.3　建模结果

在本研究中,模拟区域被划分为网格单元,尺寸设定为174 m×230 m×1.9 m,建模区域的边界由钻孔孔口三角网约束顶面、钻孔孔底凸包约束底面确定.每个网格点的属性由SAAN-RNS方法预测,并基于归一化的概率分布计算协同一致性熵,用于量化模型在空间上的不确定性.最终,将建模结果及对应的熵分布通过三维可视化呈现,从而直观展示地层分布及各位置的不确定性特征.

图9a展示了SAAN-RNS方法生成的三维地质建模结果;图9b对应其协同一致性熵的可视化结果,其揭示了模型的不确定性特征.图9b中代表高熵值的区域主要分布在地层边界的位置,这表明在深度网络预测阶段或RNS优化过程中,这些区域的网格点可能对应多个不同地质单元的属性类别,因此模拟结果存在较大的不确定性.相比之下,低熵值的区域主要位于地层相对均一的区域,反映了这些区域的建模结果更加稳定,空间不确定性较低.

图10a展示了模型沿 AA' 方向剖面的结果及钻孔分布.图10b呈现了测试钻孔与模型预测的虚拟钻孔在地层深度与地层属性上的对比.剖面结果表明,大多数区域与钻孔揭示的实际地质情况保持一致;但在测试钻孔邻近区域,模型结果与实测地层之间仍存在一定差异,这主要源于测试钻孔位于沉积终止区附近.从整体上看,模型能够较为合理地刻画不同地层之间的接触关系与叠置特征,地层形态连续,构造清晰,具有较好的地质合理性.

为了验证协同一致性熵的有效性,本文对普通联合熵与协同一致性熵在 BB' 剖面上的空间分布特征进行了对比分析.如图11所示,整体而言,两种熵模型在不确定性高值区的宏观分布趋势基本一致,但在局部细节刻画上存在明显差异.为进一步分析差异成因,笔者在剖面上随机选取了6个网格单元开展进一步分析,其空间位置如图11所示.表2给出了各单元对应的普通联合熵与协同一致性熵值,图12则展示了两阶段下6个网格单元的主要地层预测概率分布.其中,S1表示深度学习模型输出的地层概率分布,S2表示随机邻域搜索阶段得到的地层统计概率分布,具体地层类别编号见图7.

对于单元1和单元2,两阶段预测所识别的主要地层类型高度一致,尽管其普通联合熵取值较高,但由于两阶段地层预测趋势具有良好一致性,其不确定性不应被过度放大,协同一致性熵在此情形下对不确定性给予了合理抑制.相比之下,单元3与单

表 1　样本的特征组成示例

Table 1　Examples of sample feature composition

编号	空间信息特征 (x, y, z)	空间上下文特征权重	类别
1	(0.0331 78, 0.160 705 3, 0.216 277)	{C3: 0.999, C14: 0.001, 其他: 0}	C3
2	(0.217 720, 0.388 336, 0.431 014)	{C9: 1, 其他: 0}	C9
3	(0.967 242, 0.405 988, 0.394 255)	{C13: 0.784, C14: 0.216, 其他: 0}	C13
4	(0.005, 0.845, 0.341)	{C4: 1, 其他: 0}	C4
5	(0.175, 0.925, 0.241)	{C3: 0.515, C4: 0.240, C8: 0.245, 其他: 0}	C3
6	(0.455, 0.325, 0.525)	{C9: 0.246, C13: 0.754, 其他: 0}	C13

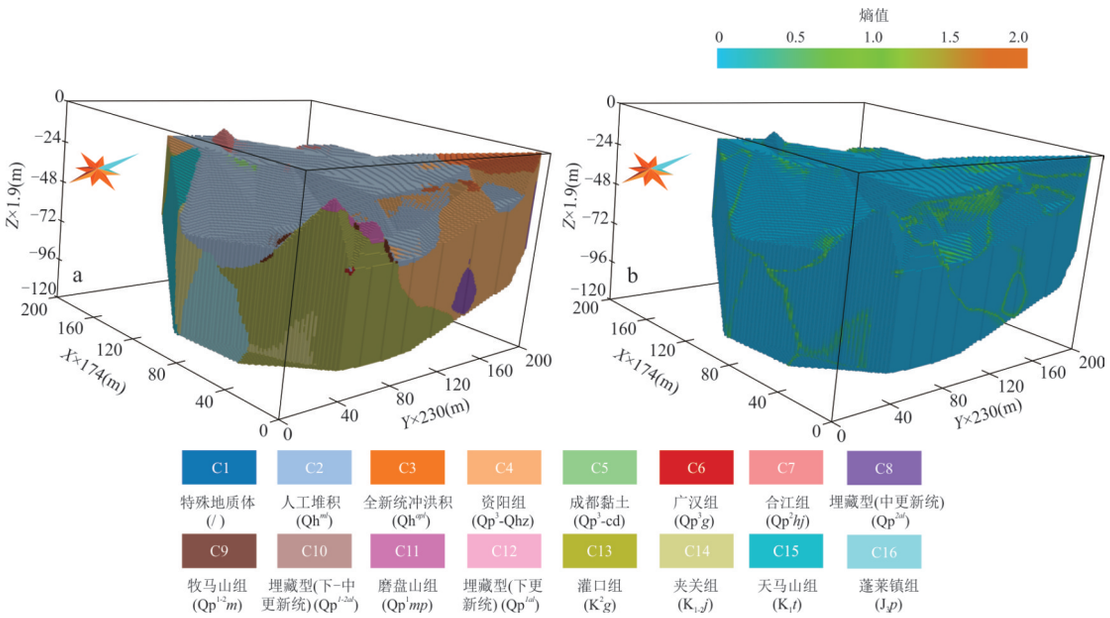

图 9 SAAN-RNS 建模结果(a)和协同一致性熵结果(b)

Fig.9 SAAN-RNS modeling results (a) and collaborative consistency entropy results (b)

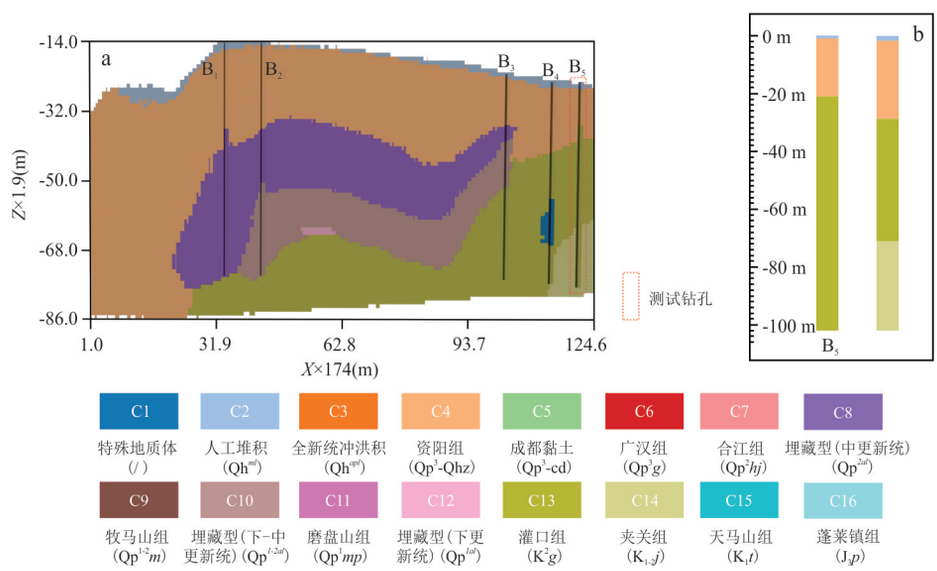

图 10 SAAN-RNS 建模结果沿 AA' 方向剖面(a)和测试钻孔(左)与最终模型中虚拟钻孔(右)的岩性对比(b)

Fig.10 Cross-section of the SAAN-RNS modeling results along the AA' (a) and comparison of lithology in borehole from true model (left) and the final model (right) (b)

元 4 在两个阶段中的主要地层预测及其概率差异显著,表现出较强冲突性.两阶段缺乏协同性导致其不确定性显著升高,因而无论是普通联合熵还是协同一致性熵均呈现较高值.单元 5 与单元 6 位于钻孔附近,深度模型对其主类的预测概率高达 99%,RNS 阶段的统计结果也具有高度确定性.同时,两阶段均表现出高度一致性,因此对应网格单元的不确定性极低,普通联合熵与协同一致性熵均处于低水平.

为验证所提出深度网络模型的有效性,本文将构建的 SAAN 模型与传统机器学习方法中的支持向量机(SVM)(Smirnoff *et al.*, 2008)和随机森林(RF)(Breiman, 2001),以及深度学习方法中的多层感知机(MLP)(Taud and Mas, 2017)和 Kolmogorov-Arnold 网络(KAN)(Liu *et al.*, 2024),在同一测试集上进行了对比评估.模型性能采用准确率(Accuracy)、精确率(Precision)、召回率(Recall)和 F1 得分(F1-score)等评价指标进行量化分析(Jia

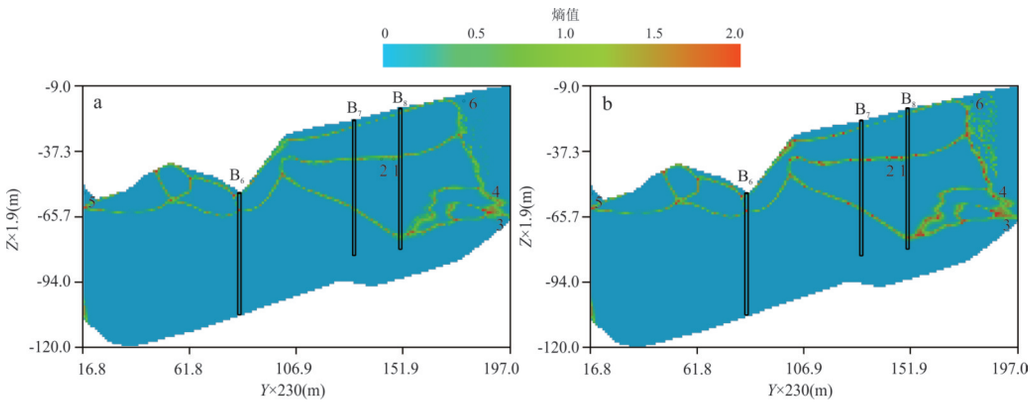

图 11　协同一致性熵模型(a)和普通联合熵模型(b)沿 BB′方向剖面

Fig.11　Cross-sections along BB′of the collaborative consistency entropy model (a) and the conventional joint entropy model (b)

表 2　六个单元格的信息熵值

Table 2　The information entropy values of the six cells

单元网格	单元格 1	单元格 2	单元格 3	单元格 4	单元格 5	单元格 6
普通联合熵值	1.168 2	1.082 3	1.095 0	1.325 5	$7.554\ 9\times10^{-5}$	$7.724\ 8\times10^{-6}$
协同一致性熵值	0.513 1	0.402 6	1.029 0	1.123 7	$4.232\ 9\times10^{-10}$	$3.683\ 5\times10^{-12}$

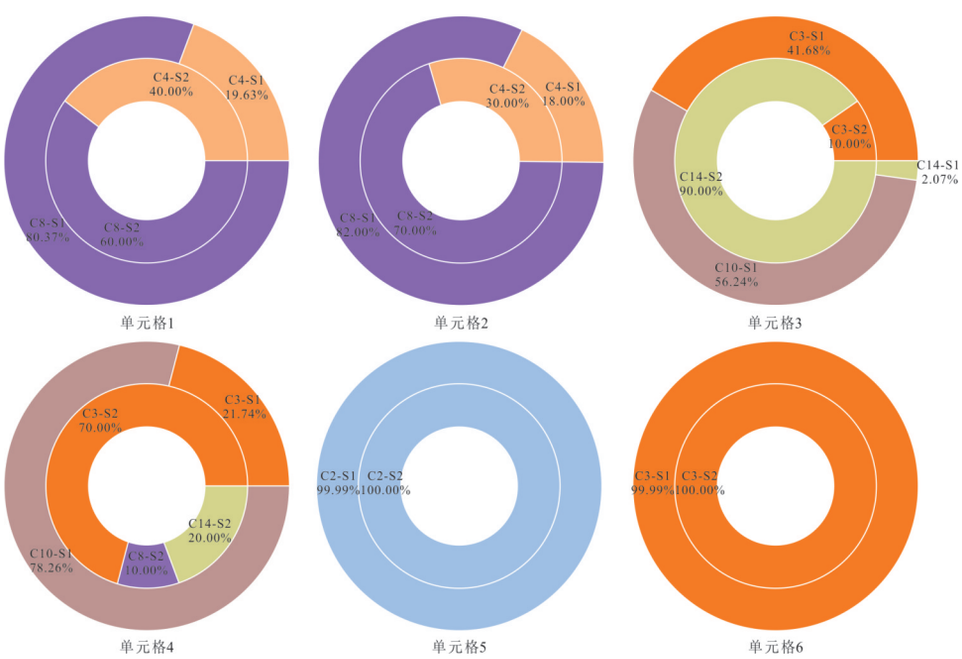

图 12　六个单元格两阶段地层属性概率分布饼图

Fig.12　Pie chart of two-stage formation attribute probability distribution in six cells

et al., 2021). 不同模型的性能对比结果如表 3 所示,其中 SAAN 模型的 F1 得分达到 0.983 0,整体性能最优.

图 13 展示了 IDW、SVM、RF、MLP、KAN、SAAN-RNS 共 6 种不同方法下的三维地质建模结果.整体来看,各方法均能反映出主要地层的空间分布特征,但在层序连续性与边界刻画精度方面存

表 3　不同模型性能评估

Table 3　Performance evaluation of different models

模型	Accuray	Precison	Recall	F1-score
SVM	0.765 1	0.739 6	0.765 1	0.739 9
RF	0.929 3	0.930 3	0.929 3	0.928 0
MLP	0.955 6	0.956 2	0.955 6	0.955 0
KAN	0.956 1	0.958 2	0.956 1	0.956 5
SAAN	0.983 0	0.983 3	0.983 0	0.983 0

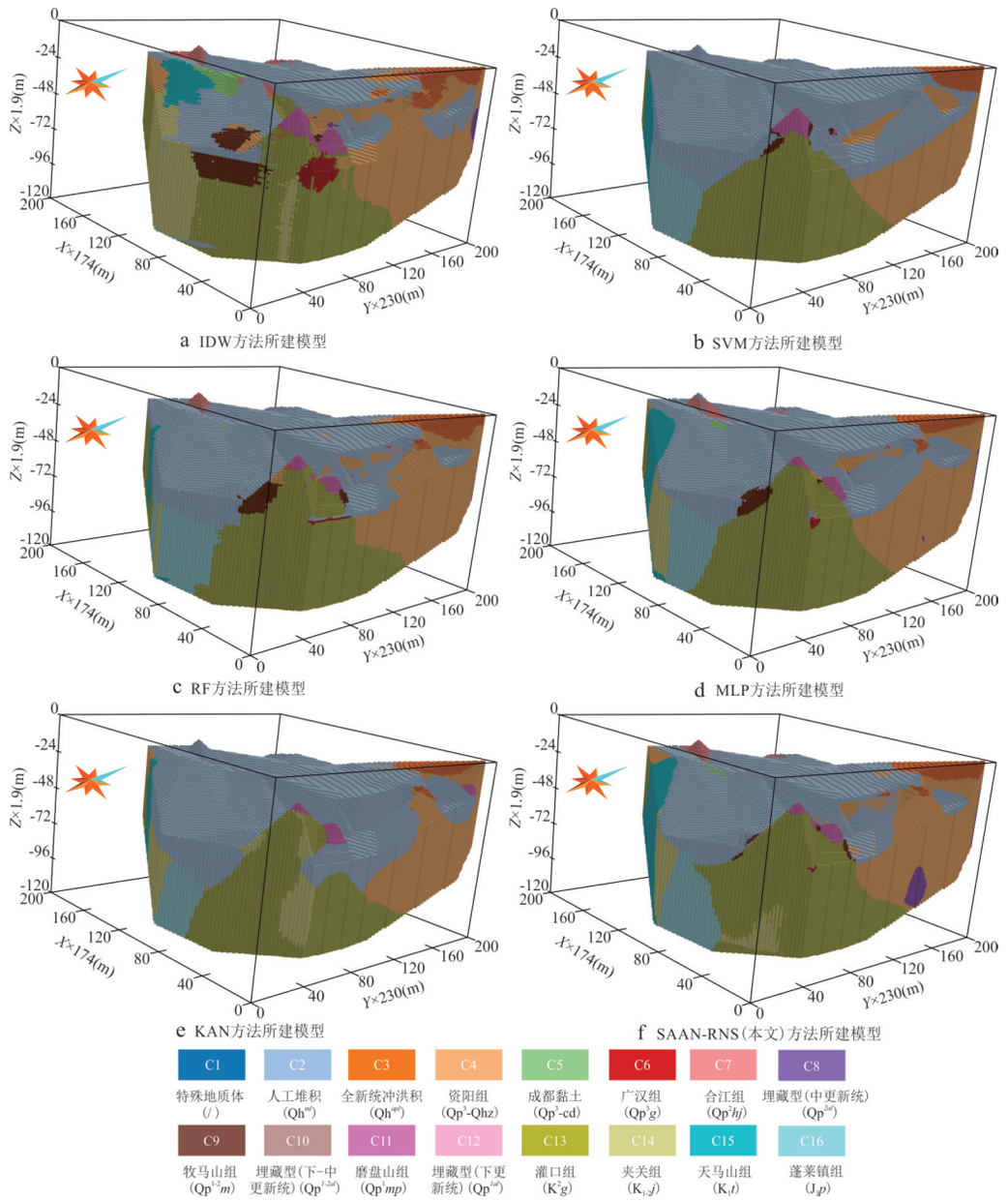

图 13 不同方法建模结果比较

Fig.13 Comparison of modeling results of different methods

在差异.其中,IDW 方法构建出了主要的地层特征,但层间平滑性较差;SVM 方法的地层整体连续,但在地层边界细节上表现不足;RF 方法结果中出现较为明显的地层不连续现象;MLP 方法生成的地层分布较为平滑,但局部出现岩性破碎与地层错序现象;KAN 方法模拟的地层边界明显,但缺少部分地层特征.SAAN-RNS 方法整体地层层序清晰,地层边界明显,仅在极小部分区域存在破碎地层现象.

为了更直观地展示模型中地层之间的覆盖关系及研究区的地层分布特征,本文对三维模型进行了剖面分析.剖面图可以清晰展示地层的侧向延伸形态,包括倾角变化和厚度分布特征.图 14 展示了不同模型沿 BB' 方向的剖面.由图可知,六种方法在总体岩性分布层序上表现出相似的趋势,但在局部地层结构的连续性与细节刻画方面存在差异.其中,IDW 方法建模剖面中出现部分地质单元的穿插现象并伴有局部特征零散分布现象;SVM 方法建模剖面的地层整体连续,层间界面平滑性好,但缺少必要的局部特征;MLP 方法建立的模型呈现较好的连续性,但不能良好复现 QP^{1al} 与 QP^{1-2al} 间的地层关系.RF 方法建模剖面中地层跳跃与不连续现象较为明显,地层结构完整性不足;KAN 方

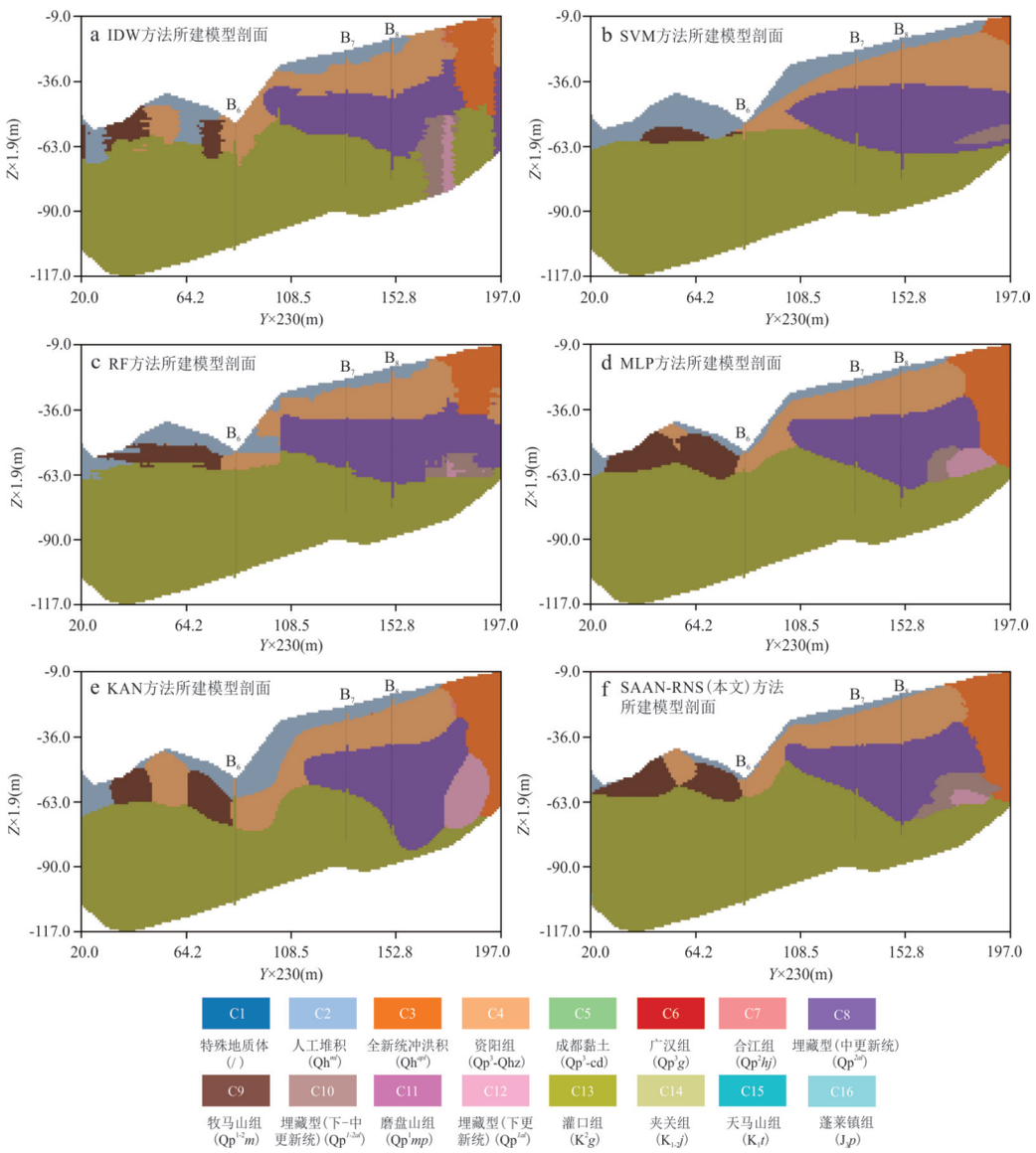

图 14　不同建模方法的二维剖面比较

Fig.14　Comparison of two-dimensional sections of different methods

法建模剖面边界清晰,但同样缺少重要的地质特征.SAAN-RNS 方法建模剖面整体地层层序清晰,地层特征明显,符合实际地质规律.

3　结论

针对钻孔数据稀疏条件下三维地质结构表达能力不足、不确定性高等问题,本文提出一种融合半监督SAAN与MPS的联合三维地质建模方法.该方法通过特征增强与半监督训练方式提升SAAN网络对复杂地质结构的预测能力,并基于训练完成的网络生成初始三维地质模型;随后,采用随机邻域搜索方法对预测结果中低置信度与语义冲突区域进行局部优化.最后,设计协同一致性熵指标,用以量化深度学习预测阶段与MPS优化阶段模型结果的不确定性.

以成都平原区域的钻孔数据进行实验,实验结果表明,本文提出的SAAN网络在性能上优于MLP等方法.在有限钻孔数据条件下,所提出方法构建的三维地质模型能够合理再现地层分布.同时,设计的协同一致性熵能够有效约束模型不确定性,对多阶段预测结果一致时出现的高熵值给予合理抑制.

本文主要基于钻孔数据开展研究,并采用后续修正方式对深度网络预测的初始地质模型进行局部优化,虽然能提升模型准确性,但也带来了额外计算开销.如何在深度网络模型阶段引入地质约束知识,并融合多源地质数据以减少后续优化需求,仍有待进一步研究.

References

Bai, T., Tahmasebi, P., 2020. Hybrid Geological Modeling: Combining Machine Learning and Multiple-Point Statistics. *Computers & Geosciences*, 142: 104519. https://doi.org/10.1016/j.cageo.2020.104519

Boyd, D. L., Walton, G., Trainor-Guitton, W., 2019. Quantifying Spatial Uncertainty in Rock through Geostatistical Integration of Borehole Data and a Geologist's Cross-Section. *Engineering Geology*, 260: 105246. https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2019.105246

Breiman, L., 2001. Random Forests. *Machine Learning*, 45(1): 5—32. https://doi.org/10.1023/A:1010933404324

Chu, D. P., Wan, B., Liu, Y. Y., et al., 2025. An Integrated Machine Learning Framework Using Borehole Descriptions for 3D Lithological Modeling. *Engineering Geology*, 351: 108050. https://doi. org/10.1016/j. enggeo.2025.108050

Chu, D. P., Fu, J. M., Wan, B., et al., 2024. A Multi-View Ensemble Machine Learning Approach for 3D Modeling Using Geological and Geophysical Data. *International Journal of Geographical Information Science*, 38(12): 2599—2626. https://doi.org/10.1080/13658816.2024.2394228

Comunian, A., Renard, P., Straubhaar, J., 2012.3D Multiple-Point Statistics Simulation Using 2D Training Images. *Computers & Geosciences*, 40: 49—65. https://doi.org/10.1016/j.cageo.2011.07.009

Derpanis, K. G., 2008. The Bhattacharyya Measure. *Mendeley Computer*, 1(4): 1990—1992.

Fu, J. M., Hu, M. S., Fang, F., et al., 2024. Complex Orebody 3D Modeling Using Radial Basis Function Surface Incorporating Stacking Integration Strategy. *Earth Science*, 49(3): 1165—1176 (in Chinese with English abstract).

Guo, J. T., Liu, Y. H., Han, Y. F., et al., 2019. Implicit 3D Geological Modeling Method for Borehole Data Based on Machine Learning. *Journal of Northeastern University* (*Natural Science*), 40(9): 1337—1342 (in Chinese with English abstract).

Guo, J. T., Wang, Z. X., Li, C. L., et al., 2022. Multiple-Point Geostatistics-Based Three-Dimensional Automatic Geological Modeling and Uncertainty Analysis for Borehole Data. *Natural Resources Research*, 31(5): 2347—2367. https://doi.org/10.1007/s11053-022-10071-6

Guo, J. T., Xu, X. C., Wang, L. Y., et al., 2024. GeoPDNN 1.0: A Semi-Supervised Deep Learning Neural Network Using Pseudo-Labels for Three-Dimensional Shallow Strata Modelling and Uncertainty Analysis in Urban Areas from Borehole Data. *Geoscientific Model Development*, 17(3): 957—973. https://doi.org/10.5194/gmd-17-957-2024

Hang, Z. Q., Xue, T., Chen, J. P., et al., 2025. A 3D Geological Modeling Method Using the Transformer Model: A Solution for Sparse Borehole Data. *Minerals*, 15(3): 301. https://doi.org/10.3390/min15030301

Hou, W. S., Liu, H. G., Zheng, T. C., et al., 2022. Extended GOSIM: MPS-Driven Simulation of 3D Geological Structure Using 2D Cross-Sections. *Earth and Space Science*, 9(6): e2021EA001801. https://doi.org/10.1029/2021EA001801

Hou, W. S., Liu, H. G., Zheng, T. C., et al., 2021. Hierarchical MPS-Based Three-Dimensional Geological Structure Reconstruction with Two-Dimensional Image(s). *Journal of Earth Science*, 32(2): 455—467. https://doi.org/10.1007/s12583-021-1443-x

Jia, R., Lv, Y. K., Wang, G. W., et al., 2021. A Stacking Methodology of Machine Learning for 3D Geological Modeling with Geological-Geophysical Datasets, Laochang Sn Camp, Gejiu (China). *Computers & Geosciences*, 151: 104754. https://doi.org/10.1016/j.cageo.2021.104754

Li, H., Wan, B., Chu, D. P., et al., 2023. Progressive Geological Modeling and Uncertainty Analysis Using Machine Learning. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, 12(3): 97. https://doi.org/10.3390/ijgi12030097

Li, H., Wan, B., Chu, D. P., et al., 2024. Integrated Framework for Geological Modeling: Integration of Data, Knowledge, and Methods. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 83(8): 303. https://doi.org/10.1007/s10064-024-03794-8

Liu, Y. M., Durlofsky, L. J., 2021. 3D CNN-PCA: A Deep-Learning-Based Parameterization for Complex Geomodels. *Computers & Geosciences*, 148: 104676. https://doi.org/10.1016/j.cageo.2020.104676

Liu, Z. M., Wang, Y. X., Vaidya, S., et al., 2024. KAN: Kolmogorov-Arnold Networks. *arXiv*, 2404.19756. https://arxiv.org/abs/2404.19756

Lubold, S., Taylor, C. N., 2022. Formal Definitions of Conservative Probability Distribution Functions (PDFs). *Information Fusion*, 88: 175—183. https://doi. org/10.1016/j.inffus.2022.07.014

Mariethoz, G., Caers, J., 2014. Multiple-Point Geostatistics: Stochastic Modeling with Training Images. Wiley, Hoboken. https://doi.org/10.1002/9781118662953

Mariethoz, G., Renard, P., Straubhaar, J., 2010. The Direct Sampling Method to Perform Multiple-Point Geostatistical Simu-

lations. *Water Resources Research*, 46(11): 2008WR007621.https://doi.org/10.1029/2008WR007621

Meerschman, E., Pirot, G., Mariethoz, G., et al., 2013. A Practical Guide to Performing Multiple-Point Statistical Simulations with the Direct Sampling Algorithm. *Computers & Geosciences*, 52: 307－324. https://doi.org/10.1016/j.cageo.2012.09.019

Smirnoff, A., Boisvert, E., Paradis, S. J., 2008. Support Vector Machine for 3D Modelling from Sparse Geological Information of Various Origins. *Computers & Geosciences*, 34(2): 127－143. https://doi.org/10.1016/j.cageo.2006.12.008

Tahmasebi, P., Hezarkhani, A., Sahimi, M., 2012. Multiple-Point Geostatistical Modeling Based on the Cross-Correlation Functions. *Computational Geosciences*, 16(3): 779－797. https://doi.org/10.1007/s10596-012-9287-1

Tang, B. Y., Wu, C. L., Li, X. C., et al., 2015. A Fast Progressive 3D Geological Modeling Method Based on Borehole Data. *Rock and Soil Mechanics*, 36(12): 3633－3638 (in Chinese with English abstract).

Tang, J. F., Tang, M. M., Lu, S. F., et al., 2024. Three-Dimensional Modeling of Estuary Reservoir Based on Coupling Sedimentary Dynamics Simulation and Multi-point Geostatistics Method. *Earth Science*, 49(1): 174－188 (in Chinese with English abstract).

Taud, H., Mas, J. F., 2017. Multilayer Perceptron (MLP). *Geomatic Approaches for Modeling Land Change Scenarios*. Cham: Springer International Publishing: 451－455. https://doi.org/10.1007/978-3-319-60801-3_27

Tian, J., Xia, Y. B., Zhang, J. H., et al., 2025. Urban Underground Space Geological Suitability—A Theoretical Framework, Index System, and Evaluation Method. *Applied Sciences*, 15(8): 4326. https://doi.org/10.3390/app15084326

Wang, B., Lei, C. Y., Liu, Z. X., et al., 2021. A Geological 3D Modeling Method of Comprehensive Geological Section for Chengdu. *Sedimentary Geology and Tethyan Geology*, 41(1): 112－120 (in Chinese with English abstract).

Yang, F. F., Zuo, R. G., Kreuzer, O. P., 2026. Interpretable Regional-Scale Geological Mapping Using a Contrastive Graph Attention Network for Multimodal Data Fusion and Recognition of Controlling Factors. *Engineering Geology*, 361: 108508. https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2025.108508

Yang, S. H., Hou, W. S., Chen, Y. H., et al., 2026. Three-Dimensional Reconstruction of Geologic Structures Based on Adaptive Fully-Connected Deep Neural Network and Multi-Point Statistics Method. *Earth Science Frontiers*, 33(5): 99－114 (in Chinese with English abstract).

Zhang, H., Gui, L., Wang, T. F., et al., 2024. Prediction of Quaternary Cover Thickness and 3D Geological Modeling Based on BP Neural Network. *Earth Science*, 49(2): 550－559 (in Chinese with English abstract).

Zhou, Y. Z., Zuo, R. G., Liu, G., et al., 2021. The Great-Leap-Forward Development of Mathematical Geoscience during 2010－2019: Big Data and Artificial Intelligence Algorithm Are Changing Mathematical Geoscience. *Bulletin of Mineralogy, Petrology and Geochemistry*, 40(3): 556－573 (in Chinese with English abstract).

Zuo, R. G., Peng, Y., Li, T., et al., 2021. Challenges of Geological Prospecting Big Data Mining and Integration Using Deep Learning Algorithms. *Earth Science*, 46(1): 350－358 (in Chinese with English abstract).

中文参考文献

扶金铭, 胡茂胜, 方芳, 等, 2024. Stacking集成策略下的径向基函数曲面复杂矿体三维建模方法. 地球科学, 49(3): 1165－1176.

郭甲腾, 刘寅贺, 韩英夫, 等, 2019. 基于机器学习的钻孔数据隐式三维地质建模方法. 东北大学学报(自然科学版), 40(9): 1337－1342.

唐丙寅, 吴冲龙, 李新川, 等, 2015. 一种基于钻孔地质数据的快速递进三维地质建模方法. 岩土力学, 36(12): 3633－3638.

唐佳凡, 唐明明, 卢双舫, 等, 2024. 基于耦合沉积动力学模拟与多点地质统计学方法的河口湾储层三维建模. 地球科学, 49(1): 174－188.

王波, 雷传扬, 刘兆鑫, 等, 2021. 三维地质建模过程中综合地质剖面构建方法研究. 沉积与特提斯地质, 41(1): 112－120.

杨松桦, 侯卫生, 陈勇华, 等, 2026. 基于自适应全连接深度神经网络和多点地质统计学方法的地质结构三维重建研究. 地学前缘, 33(5): 99－114.

张瀚, 桂蕾, 王腾飞, 等, 2024. 基于BP神经网络的第四系覆盖物厚度预测及三维地质建模. 地球科学, 49(2): 550－559.

周永章, 左仁广, 刘刚, 等, 2021. 数学地球科学跨越发展的十年: 大数据、人工智能算法正在改变地质学. 矿物岩石地球化学通报, 40(3): 556－573.

左仁广, 彭勇, 李童, 等, 2021. 基于深度学习的地质找矿大数据挖掘与集成的挑战. 地球科学, 46(1): 350－358.