

## 基于符号秩统计量的非参数 阶段累积和控制图

徐薪苾<sup>†</sup>, 朱永忠, 杨亦浏

(河海大学数学学院, 江苏 南京 211100)

**摘要:** 控制图是现代工业生产中常用的质量控制方法, 传统控制图通常在数据服从正态分布的情况下进行研究。然而, 在实际生产过程中, 数据的正态分布假设并不总是成立, 且有时分布的情况未知。针对这一状况, 可以采用非参数控制图对生产过程进行监控。本文提出了一种基于 Wilcoxon 符号秩统计量的非参数阶段累积和控制图, 通过对非参数累积和控制图的结构进行调整, 使得所提出的控制图在监测不同范围的位置偏移时更加灵敏。通过模拟分析了该控制图的受控与失控表现, 并与其他非参数控制图进行了比较。结果表明, 本文提出的方法具有良好的监控效果。

**关键词:** 非参数控制图; 统计过程控制; Wilcoxon 符号秩; 平均运行链长

**中图分类号:** O212

**文献标识码:** A

## Non-parametric Step Cumulative Sum Control Chart Based on Signed-rank

XU Xinyi<sup>†</sup>, ZHU Yongzhong, YANG Yiliu

(School of mathematics, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 211100, China)

**Abstract:** Control charts are commonly used quality control methods in modern industrial production, and traditional control charts are typically studied under the assumption that data follows a normal distribution. However, in actual production processes, the assumption of normal distribution for data does not always hold, and at times, the distribution is unknown. In response to this situation, non-parametric control charts can be employed to monitor the production process. This paper proposes a non-parametric step cumulative sum control chart based on the Wilcoxon signed-rank statistic. By adjusting the structure of the non-parametric cumulative sum control chart, it enhances sensitivity in detecting positional shifts across different ranges. The in-control and out-of-control performance of the proposed control chart is analyzed through Monte Carlo simulation methods and compared with other non-parametric control charts. The results indicate that the proposed control chart exhibits excellent monitoring performance.

**Key words:** non-parametric control chart; statistical process control; Wilcoxon signed-rank; average run length

统计过程控制用于监控生产过程中的质量特性, 以确保生产过程稳定, 通常使用控制图对过程进行监控。传统的控制图一般假设质量特性数据服从正态分布, 不少学者在此基础上进行了大量研究, 构建了传统控制图。进一步地, 为了监测较小

偏移, Page 等<sup>[1]</sup>提出了考虑历史数据的 CUSUM 累积和控制图, Roberts<sup>[2]</sup>提出了对历史数据和当前观测数据进行加权平均的 EWMA 控制图。然而, 在实际中, 生产数据通常不能满足特定分布的假设, 进而影响这些控制图的使用性能。而非参数

控制图则不依赖于总体的分布假设,使控制图的性能不受数据分布类型的影响,具有良好的稳健性。

在过去的几十年里,有关非参数控制图的研究得到了快速发展。Janacek 等<sup>[3]</sup>提出了基于中位数的控制图。Bakir 和 Reynolds<sup>[4]</sup>提出了基于 Wilcoxon 符号秩的 CUSUM 控制图以监控过程中的位置偏移,Amin 和 Searcy<sup>[5]</sup>提出了基于分组符号秩(GSR)的 EWMA 控制图,并讨论了自相关的影响。Jones 等<sup>[6]</sup>提出了基于子群平均秩的休哈特无分布控制图,该方法可以在不知道参考样本真实分布的情况下判断过程是否失控。Li 等<sup>[7]</sup>提出了用于检测均值偏移的非参数 CUSUM 和 EWMA 控制图,通过使用 Wilcoxon 秩和统计量获得子组中的位置信息,并与参考样本进行比较,从而判断位置参数是否发生偏移。Graham 等<sup>[8]</sup>提出了一种基于 Wilcoxon 符号秩统计量的 NPEWMA 控制图,用于有效监控未知分布的过程中位数。Riaz 等<sup>[9]</sup>通过两次 EWMA 统计量,提出了基于 Wilcoxon 符号秩的 DEWMA-SR 控制图,并与其他控制图比较,验证了这一方法的优越性。Alevizakos 等<sup>[10]</sup>在 DEWMA 控制图的基础上,将 EWMA 统计量结合三次,提出了 TEWMA-SR 控制图,并说明了这一方法的有效性。Abbas 等<sup>[11]</sup>在提出的渐进均值控制图上开发了非参数渐进均值(NPPM)控制图来监控过程中的位置参数,并提出了基于符号秩的非参数渐进均值控制图,评估了所提出控制图快速检测持续位移的能力。

在传统参数统计过程控制中,CUSUM 控制图往往是基于一个假设固定大小的偏移进行设计的,因此控制图的性能完全基于偏移大小<sup>[12]</sup>,然而在实际中,很难事先预知偏移的大小。对非参数控制图也有相似的结论,当假设偏移大小已知时,非参数 CUSUM 控制图在快速检测给定偏移时具有很好的性能,而对于大范围的偏移则表现得没那么好。当假设偏移大小未知时,非参数控制图的设计参数通常选取一个较小的值,以提高监测效率。因此,本文提出了基于 Wilcoxon 符号秩的非参数阶段累积和控制图,通过调整传统非参数 CUSUM 控制图的结构,使得该控制图可以有效监测位置参数的系列变化,改善监控位置参数偏移时的报警时延,对过程失控情况做出更灵敏的判断。同时,比较了不同分布下的平均运行长度(ARL),证明了所提方法的无分布性。通过蒙特卡洛模拟分析了不同大小偏移下不同设计参数对应控制图的表现,

并与基于 Wilcoxon 符号秩的累积和控制图(CUSUM-SR)进行比较,验证了所提方法的灵活性。同时,与基于符号秩(SR)和符号统计量(SN)的 EWMA 控制图进行对比,验证了该方法的有效性。最后,通过一个实际应用说明所提控制图的应用价值。

## 1 非参数阶段累积和控制图的构建

首先构建 Wilcoxon 符号秩统计量。在第  $i$  个观测时刻,  $i = 1, 2, \dots$ , 观测到某一未知分布的连续型变量,并采集样本容量为  $n$  的观测样本:  $\{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ij}, \dots, X_{in}\}$ 。令需要被监控的位置参数为  $\mu_0$ ,  $R_{ij}$  表示绝对值  $|X_{ij} - \mu_0|$  的次序秩,则 Wilcoxon 符号秩统计量为:

$$SR_i = \sum_{j=1}^n \text{sign}(X_{ij} - \mu_0) R_{ij}, i = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

其中

$$\text{sign}(X_{ij} - \mu_0) = \begin{cases} 1, & X_{ij} - \mu_0 > 0 \\ 0, & X_{ij} - \mu_0 = 0 \\ -1, & X_{ij} - \mu_0 < 0 \end{cases}$$

$SR_i$  是定义域为

$\left\{-\frac{n(n+1)}{2}, -\frac{n(n+1)}{2} + 2, \dots, \frac{n(n+1)}{2}\right\}$  的整数。Gibbons 等<sup>[13]</sup>证明了  $SR_i$  与符号秩和检验统计量  $T_n^+$  呈线性关系:  $SR_i = 2 T_n^+ - \frac{(n+1)n}{2}$ 。其中

$T_n^+$  为第  $i$  个样本中所有观测值大于目标值的次序秩总和,由此可以计算出  $SR_i$  的均值与方差为:  $E(SR_i) = \mu_{SR} = 0, \text{Var}(SR_i) = \sigma_{SR} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。

类似于 Li 等<sup>[7]</sup>提出的非参数 CUSUM 控制图,可以构造基于 Wilcoxon 符号秩的 CUSUM 控制图。对收集到的第  $i$  个观测样本计算 Wilcoxon 符号秩  $SR_i$ ,并利用传统 CUSUM 控制图监控统计量  $SR_i$ ,具体结构为:

$$\begin{aligned} C_i^- &= \min[0, (SR_i - \mu_{SR}) + k \cdot \sigma_{SR} + C_{i-1}^-] \\ C_i^+ &= \max[0, (SR_i - \mu_{SR}) - k \cdot \sigma_{SR} + C_{i-1}^+] \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $C_i^-$  为监测向下的位置参数偏移,  $C_i^+$  为监测向上的位置参数偏移,控制限为  $h_c$ 。该控制图累积了大于  $k \cdot \sigma_w$  的偏差,但在偏差小于  $k \cdot \sigma_w$

时没有进行累加运算, ( $k$  的取值通常与偏移大小有关), 因此传统的非参数 CUSUM 控制图对特定偏移大小的监测非常灵敏, 而在对大范围偏移进行监测时效果不佳, 可能会出现延迟报警的情况。为了改善这一状况, 本研究通过调整 CUSUM 控制图的结构, 使得所提出的控制图在发生偏移的时刻累积偏差, 减少报警延迟。

首先引入两个变量计算发生偏移后所观测到的样本数, 用  $D_i^-$ 、 $D_i^+$  分别表示  $C_i^-$ 、 $C_i^+$  上一次取值为零的时刻到当前时刻的样本数, 如式(3)所示:

$$\begin{aligned} D_i^- &= \begin{cases} 1, & C_{i-1}^- = 0 \\ 1 + D_{i-1}^-, & \text{其他} \end{cases} \\ D_i^+ &= \begin{cases} 1, & C_{i-1}^+ = 0 \\ 1 + D_{i-1}^+, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

当  $C_{i-1}^- = 0$  时, 认为第  $i-1$  时刻没有发生过程偏移, 因此只对第  $i$  时刻的观测值进行监控; 当  $C_{i-1}^- \neq 0$  时, 表明过程发生了偏移, 此时通过  $D_i^-$  构造统计量对发生偏移时刻的所有观测值进行监控, 对  $C_i^+$ 、 $D_i^+$  同理。由此定义阶段累积和统计量:

$$\begin{cases} SC_i^- = \frac{1}{D_i^-} SR_i + \left(1 - \frac{1}{D_i^-}\right) SC_{i-1}^- \\ SC_i^+ = \frac{1}{D_i^+} SR_i + \left(1 - \frac{1}{D_i^+}\right) SC_{i-1}^+ \end{cases} \quad (4)$$

观察发现, 当 CUSUM 统计量为零时, SC 统计量立即被重置, SC 统计量即为上一次 CUSUM 统计量为零时所有观测值的累加平均, 即 SC 统计量只对发生偏移时刻的观测值进行监控, 从而达到减少延迟报警的目的。通过计算可以得到 SC 统计量的均值为  $E(SC_i^-) = 0$ ,  $E(SC_i^+) = 0$ , 方差为  $\text{Var}(SC_i^-) = \frac{\sigma_{SR}^2}{D_i^-}$ ,  $\text{Var}(SC_i^+) = \frac{\sigma_{SR}^2}{D_i^+}$ 。NPSC 控制图的控制限为:

$$\begin{cases} LCL_i^{SC} = \mu_0 - L_{SC} \frac{\sigma_{SR}}{\sqrt{D_i^-}} \\ UCL_i^{SC} = \mu_0 + L_{SC} \frac{\sigma_{SR}}{\sqrt{D_i^+}} \end{cases} \quad (5)$$

其中  $L_{SC}$  为所提控制图的控制限系数, 对于第  $i$  个样本, 当  $SC_i^- < LCL_i^{SC}$  或  $SC_i^+ > UCL_i^{SC}$  时, 说明该过程失控。

所提出的 NPSC 控制图可以看作渐近均值 (NPPM) 控制图的扩展形式, 该统计量为:

$$NPPM - SR_i = \frac{\sum_{k=1}^i SR_k}{i} \quad (6)$$

进一步可以写成

$$\begin{aligned} NPPM - SR_i &= \frac{1}{i} SR_i + \\ &\left(1 - \frac{1}{i}\right) NPPM - SR_{i-1} \end{aligned} \quad (7)$$

通过比较式(5)和式(7), 可以发现所提控制图类似于 NPPM 控制图。由于 NPPM 控制图从第一个样本开始进行累加平均, 包含了所有观测值的信息, 因此在应用中可能出现延迟报警的情况。而本文所提控制图通过 CUSUM 统计量对发生偏移后的观测值进行累加平均, 省略掉发生偏移前的观测信息, 从而提高了控制图的灵敏性。

## 2 控制图性能评估

为了评估所提 NPSC 控制图, 本文使用蒙特卡洛模拟计算控制图的平均运行长度 (ARL), ARL 表示控制图在失控信号出现前的平均样本数, 对于给定的  $ARL_0$ , ARL 值越小, 表示控制图的性能越好。表 1~表 3 给出了本文的 NPSC 控制图在不同分布下的 ARL 值, 其中  $ARL_0$  设置为 500, 模拟次数设置为  $10^4$ , 并在表格最后一行给出了所提控制图在不同设计参数下的控制限系数, 该系数通过蒙特卡罗模拟法计算得到, 设计参数  $k$  根据偏移的大小设置为: 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.25, 2.5, 2.75, 3, 包含了不同范围的偏移。由表 1~表 3 可以发现该控制图的 ARL 在 IC 状态下对不同的连续分布都几乎相同, 说明该控制图不依赖于分布并且具有稳健性<sup>[14]</sup>。

通过观察可以发现, 控制限系数  $L_{SC}$  在  $k < 0.75$  时随着  $k$  的增加而增加, 在  $k \geq 0.75$  时减小。这是由于通过增加  $k$  值, 式(4)中的  $D_i^+$  减小, 增加了统计量的变化程度, 因此需要更大的控制限系数来达到期望的  $ARL_0$ 。同时式(5)中控制限由于  $\frac{1}{\sqrt{D_i^+}}$  的减小而扩大, 为了平衡这种扩大所带来的结果, 需要降低控制限系数来获得期望  $ARL_0$ , 这使得控制限系数出现了两种不同方向的变化。通过观察表 1 最后一行, 当  $k < 0.75$  时, 随着  $k$  的增加,  $D_i^+$  的减小占据主导, 因此控制限系数略有增加, 当  $k \geq 0.75$  时, 这种趋势发生了逆转。

表 1  $N(0,1)$ 分布下控制图的 ARL 值,  $ARL_0 \cong 500, n=5$

| $\delta$ | $k$     |         |         |         |         |         |         |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|          | 控制图     | 0.25    | 0.5     | 0.75    | 1       | 1.25    | 1.5     |
| 0        | NPSC    | 499.442 | 500.023 | 499.903 | 500.311 | 499.978 | 500.673 |
|          | NPCUSUM | 501.385 | 500.942 | 500.972 | 501.09  | 499.959 | 499.286 |
| 0.25     | NPSC    | 41.05   | 52.288  | 87.105  | 128.847 | 213.908 | 341.069 |
|          | NPCUSUM | 34.71   | 55.636  | 252.513 | 262.689 | 318.782 | 353.457 |
| 0.5      | NPSC    | 13.562  | 13.736  | 14.498  | 17.086  | 25.095  | 50.932  |
|          | NPCUSUM | 13.44   | 12.856  | 21.038  | 25.964  | 42.807  | 62.882  |
| 0.75     | NPSC    | 7.953   | 7.516   | 7.501   | 7.257   | 8.99    | 13.664  |
|          | NPCUSUM | 8.885   | 7.483   | 9.443   | 8.622   | 10.912  | 15.683  |
| 1        | NPSC    | 6.064   | 5.42    | 5.295   | 5.154   | 5.55    | 6.393   |
|          | NPCUSUM | 7.12    | 5.784   | 6.715   | 5.487   | 5.605   | 6.65    |
| 1.25     | NPSC    | 5.091   | 4.529   | 4.306   | 4.154   | 4.378   | 4.322   |
|          | NPCUSUM | 6.43    | 4.925   | 5.51    | 4.437   | 4.15    | 4.272   |
| 1.5      | NPSC    | 4.692   | 4.076   | 4.048   | 3.897   | 3.832   | 3.636   |
|          | NPCUSUM | 5.945   | 4.653   | 5.005   | 3.938   | 3.186   | 3.398   |
| 1.75     | NPSC    | 4.606   | 3.836   | 3.782   | 3.585   | 3.862   | 3.279   |
|          | NPCUSUM | 5.764   | 4.5     | 4.831   | 3.781   | 2.897   | 3.057   |
| 2        | NPSC    | 4.222   | 3.649   | 3.689   | 3.555   | 3.652   | 3.084   |
|          | NPCUSUM | 5.555   | 4.437   | 4.756   | 3.823   | 2.8     | 2.865   |
| 2.25     | NPSC    | 4.182   | 3.696   | 3.513   | 3.412   | 3.81    | 3.008   |
|          | NPCUSUM | 5.356   | 4.399   | 4.669   | 3.756   | 2.793   | 2.827   |
| 2.5      | NPSC    | 4.088   | 3.527   | 3.65    | 3.549   | 3.548   | 2.897   |
|          | NPCUSUM | 5.504   | 4.306   | 4.697   | 3.74    | 2.766   | 2.866   |
| 2.75     | NPSC    | 4.103   | 3.688   | 3.672   | 2.654   | 3.664   | 2.817   |
|          | NPCUSUM | 5.508   | 4.493   | 4.324   | 3.754   | 2.654   | 2.831   |
| 3        | NPSC    | 3.671   | 2.907   | 2.933   | 2.915   | 2.97    | 2.732   |
|          | NPCUSUM | 5.455   | 4.233   | 4.22    | 3.115   | 2.251   | 2.531   |
| $L_{sc}$ | NPSC    | 3.68    | 3.737   | 3.7     | 3.55    | 3.522   | 3.462   |
| $L$      | NPCUSUM | 78.76   | 47.751  | 39.562  | 23.06   | 15.225  | 7.764   |

表 2  $t(5)$ 分布下控制图的 ARL 值,  $ARL_0 \cong 500, n=5$

| $\delta$ | $k$     |         |         |         |         |         |         |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|          | 控制图     | 0.25    | 0.5     | 0.75    | 1       | 1.25    | 1.5     |
| 0        | NPSC    | 497.265 | 499.189 | 499.43  | 500.013 | 500.082 | 500.127 |
|          | NPCUSUM | 500.423 | 500.103 | 500.334 | 500.879 | 500.01  | 500.219 |
| 0.25     | NPSC    | 48.846  | 68.668  | 117.622 | 166.087 | 270.747 | 366.81  |
|          | NPCUSUM | 39.606  | 74.081  | 293.729 | 299.543 | 342.995 | 469.25  |
| 0.5      | NPSC    | 16.571  | 15.824  | 18.558  | 23.844  | 35.806  | 69.644  |
|          | NPCUSUM | 15.392  | 16.085  | 28.86   | 35.159  | 61.363  | 89.958  |
| 0.75     | NPSC    | 9.395   | 8.861   | 9.077   | 9.208   | 12.104  | 9.371   |
|          | NPCUSUM | 10.196  | 8.983   | 11.48   | 11.698  | 15.354  | 22.114  |
| 1        | NPSC    | 6.958   | 6.45    | 6.209   | 6.064   | 6.893   | 8.845   |
|          | NPCUSUM | 8.205   | 6.463   | 7.933   | 6.785   | 7.6     | 9.166   |
| 1.25     | NPSC    | 5.781   | 5.177   | 5.154   | 4.773   | 5.183   | 5.543   |
|          | NPCUSUM | 6.852   | 5.469   | 6.292   | 5.182   | 5.096   | 5.688   |
| 1.5      | NPSC    | 5.142   | 4.521   | 4.546   | 4.086   | 4.243   | 4.376   |
|          | NPCUSUM | 6.437   | 4.924   | 5.547   | 4.382   | 4.208   | 4.015   |
| 1.75     | NPSC    | 4.805   | 4.079   | 3.938   | 3.853   | 4.155   | 3.803   |
|          | NPCUSUM | 6.017   | 4.78    | 5.254   | 4.156   | 3.525   | 3.626   |
| 2        | NPSC    | 4.687   | 3.947   | 3.917   | 3.673   | 3.973   | 3.465   |
|          | NPCUSUM | 5.823   | 3.323   | 5.025   | 3.939   | 3.219   | 3.359   |
| 2.25     | NPSC    | 4.467   | 3.987   | 3.725   | 3.76    | 4.784   | 3.373   |
|          | NPCUSUM | 5.884   | 4.525   | 4.877   | 3.831   | 2.888   | 2.959   |
| 2.5      | NPSC    | 4.436   | 3.71    | 3.771   | 3.535   | 3.64    | 3.162   |
|          | NPCUSUM | 5.69    | 4.297   | 4.727   | 3.836   | 2.864   | 2.876   |
| 2.75     | NPSC    | 4.27    | 3.669   | 3.652   | 3.487   | 3.615   | 3.136   |
|          | NPCUSUM | 5.621   | 4.495   | 4.825   | 3.805   | 2.838   | 2.798   |
| 3        | NPSC    | 4.147   | 3.494   | 3.359   | 3.22    | 3.261   | 2.936   |
|          | NPCUSUM | 5.071   | 4.065   | 4.274   | 3.602   | 2.85    | 2.798   |
| $L_{sc}$ | NPSC    | 3.68    | 3.737   | 3.7     | 3.55    | 3.522   | 3.462   |
| $L$      | NPCUSUM | 78.76   | 47.751  | 39.562  | 23.06   | 15.225  | 7.764   |

2.1 NPSC 控制图与 NPCUSUM 控制图的比较

传统非参数 CUSUM 控制图的设计参数通常与偏移大小有关,导致控制图在监测特定偏移大小时性能最优,监控其他范围的偏移时性能有所降低。表 1~表 3 分别给出本文的 NPSC 控制图与式(2)所表示的 NPCUSUM 控制图在不同设计参数下监控不同偏移大小的 ARL 值,NPCUSUM 控制图的控制限通过蒙特卡洛模拟得到。通过比较发现,NPSC 控制图与 NPCUSUM 控制图在不同分布下都有自己的强势区和弱势区。

通过对比表 1~表 3 每一列的 ARL 值可以得到,当控制图根据特定偏移大小进行设计时,NPSC 与 NPCUSUM 控制图中表现更优的一方,结果如表 4~表 6 所示。(C)表示对应情况下 NPCUSUM 控制图具有最小的 ARL,(S)表示 NPSC 具有最小 ARL。可以发现三表中(S)出现的次数最多,即所提出的 NPSC 控制图对不同偏移在不同敏感系数下的表现总体优于 NPCUSUM 控制图。在实际应用中,通常无法准确知道将要发生的偏移大小,因此对大范围偏移都是高效的控制

图应用范围更广。综上所述,本文提出的控制图在监测不同范围偏移的情况下总体表现更优。

2.2 NPSC 与 NPEWMA-SR、NPEWMA-SN 控制图的比较

Mukherjee 等人<sup>[15]</sup>测试了参数 CUSUM 控制图中不同  $k$  值的影响,得出对于偏移大小的先验信息很少或没有时,较小的  $k$  值是避免监控出现延迟的最安全选择。对他们提出的 NPCUSUM-EX 控制图也得到了相似的结论,并推荐使用较小的  $k$  值甚至取  $k = 0$ 。因此,为了衡量在没有偏移的先验信息情况下所提控制图的性能,取设计参数  $k = 0, 25$ ,进行 NPSC 与 Graham 等<sup>[16]</sup>提出的 NPEWMA-SN、NPEWMA-SR 控制图的比较。NPWE-MA-SN 和 NPEWMA-SR 用于监测对称分布下位置参数的微小变化。为了公平比较,所有控制图选取  $n = 10, ARL_0 = 500$ ,NPEWMA-SR 和 NPEWMA-SN 控制图参数  $(\lambda, K)$  分别取  $(0.05, 2.612)$ 和  $(0.05, 2.610)$ 。为了比较控制图在不同偏移下的性能,考虑了 6 种偏移大小,结果如图 1 所示。

表 3  $LOG(0, \frac{\sqrt{3}}{\pi})$  分布下控制图的 ARL 值,  $ARL_0 \cong 500, n = 5$

| $\delta$ | $k$     |         |         |         |         |         |         |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|          | 控制图     | 0.25    | 0.5     | 0.75    | 1       | 1.25    | 1.5     |
| 0        | NPSC    | 501.364 | 500.588 | 500.378 | 499.533 | 501.664 | 501.407 |
|          | NPCUSUM | 498.98  | 499.817 | 499.082 | 500.265 | 500.533 | 501.507 |
| 0.25     | NPSC    | 36.859  | 41.766  | 68.504  | 101.591 | 178.728 | 294.8   |
|          | NPCUSUM | 29.78   | 45.267  | 172.962 | 196.335 | 256.107 | 316.911 |
| 0.5      | NPSC    | 12.462  | 11.479  | 11.793  | 14.259  | 20.697  | 37.108  |
|          | NPCUSUM | 12.496  | 11.8    | 17.26   | 20.542  | 30.326  | 47.315  |
| 0.75     | NPSC    | 7.379   | 7.133   | 6.888   | 6.735   | 7.903   | 10.249  |
|          | NPCUSUM | 8.64    | 7.379   | 8.742   | 7.594   | 9.128   | 11.902  |
| 1        | NPSC    | 5.721   | 5.198   | 5.1     | 4.765   | 5.343   | 5.556   |
|          | NPCUSUM | 7.076   | 5.569   | 6.442   | 5.343   | 5.161   | 6.098   |
| 1.25     | NPSC    | 5.018   | 4.436   | 4.221   | 4.243   | 4.977   | 4.361   |
|          | NPCUSUM | 6.29    | 4.817   | 5.487   | 4.351   | 3.92    | 4.129   |
| 1.5      | NPSC    | 4.763   | 4.227   | 3.925   | 3.747   | 3.919   | 3.54    |
|          | NPCUSUM | 5.9     | 4.673   | 5.044   | 3.882   | 3.27    | 3.272   |
| 1.75     | NPSC    | 4.431   | 3.758   | 3.791   | 3.772   | 3.789   | 3.293   |
|          | NPCUSUM | 5.829   | 4.563   | 4.821   | 3.84    | 3.072   | 3.143   |
| 2        | NPSC    | 4.236   | 3.809   | 3.747   | 3.637   | 3.722   | 3.176   |
|          | NPCUSUM | 5.753   | 4.352   | 4.765   | 3.799   | 2.791   | 2.919   |
| 2.25     | NPSC    | 4.441   | 3.625   | 3.597   | 3.605   | 3.7     | 3.133   |
|          | NPCUSUM | 5.463   | 4.3     | 4.745   | 3.804   | 2.831   | 2.882   |
| 2.5      | NPSC    | 4.086   | 3.563   | 3.584   | 3.504   | 3.444   | 2.884   |
|          | NPCUSUM | 5.447   | 4.424   | 4.651   | 3.799   | 2.879   | 2.842   |
| 2.75     | NPSC    | 3.997   | 3.704   | 3.493   | 3.489   | 3.688   | 2.825   |
|          | NPCUSUM | 4.478   | 4.964   | 4.433   | 3.582   | 2.476   | 2.445   |
| 3        | NPSC    | 3.565   | 3.105   | 3.166   | 3.053   | 3.276   | 2.3     |
|          | NPCUSUM | 4.169   | 3.822   | 4.155   | 3.567   | 2.28    | 2.174   |
| $L_{sc}$ | NPSC    | 3.68    | 3.737   | 3.7     | 3.55    | 3.522   | 3.462   |
| $L$      | NPCUSUM | 78.76   | 47.751  | 39.562  | 23.06   | 15.225  | 7.764   |

表 4  $N(0,1)$ 分布下具有最小 ARL 的控制图

| $\delta k$ | $k$  |     |      |     |      |     |
|------------|------|-----|------|-----|------|-----|
|            | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1   | 1.25 | 1.5 |
| 0.25       | (C)  | (S) | (S)  | (S) | (S)  | (S) |
| 0.5        | (C)  | (C) | (S)  | (S) | (S)  | (S) |
| 0.75       | (S)  | (C) | (S)  | (S) | (S)  | (S) |
| 1          | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (S)  | (S) |
| 1.25       | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (C) |
| 1.5        | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (C) |
| 1.75       | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (C) |
| 2          | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (C) |
| 2.25       | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (C) |
| 2.5        | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (C) |
| 2.75       | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (S) |
| 3          | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (S) |

表 5  $t(5)$ 分布下具有最小 ARL 的控制图

| $\delta$ | $k$  |     |      |     |      |     |
|----------|------|-----|------|-----|------|-----|
|          | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1   | 1.25 | 1.5 |
| 0.25     | (C)  | (S) | (S)  | (S) | (S)  | (S) |
| 0.5      | (C)  | (C) | (S)  | (S) | (S)  | (S) |
| 0.75     | (S)  | (C) | (S)  | (S) | (S)  | (S) |
| 1        | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (S)  | (S) |
| 1.25     | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (S) |
| 1.5      | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (C) |
| 1.75     | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (C) |
| 2        | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (C) |
| 2.25     | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (C) |
| 2.5      | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (C) |
| 2.75     | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (C) |
| 3        | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (C) |

表 6  $LOG(0, \frac{\sqrt{3}}{\pi})$  分布下具有最小 ARL 的控制图

| $\delta$ | $k$  |     |      |     |      |     |
|----------|------|-----|------|-----|------|-----|
|          | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1   | 1.25 | 1.5 |
| 0.25     | (C)  | (S) | (S)  | (S) | (S)  | (S) |
| 0.5      | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (S)  | (S) |
| 0.75     | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (S)  | (S) |
| 1        | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (S)  | (S) |
| 1.25     | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (C) |
| 1.5      | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (C) |
| 1.75     | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (C) |
| 2        | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (C) |
| 2.25     | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (C) |
| 2.5      | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (S) |
| 2.75     | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (C) |
| 3        | (S)  | (S) | (S)  | (S) | (C)  | (C) |

图 1~图 2 给出了各非参数控制图在不同偏移下对应的 ARL 性能曲线,位于下侧的曲线所对应的控制图与竞争控制图相比更优越,可以看出 NPSC 所对应的曲线在  $\delta > 0.25$  时位于最下方,说明在不同分布下 NPSC 控制图检测目标值的偏移速度更快,但在  $\delta = 0.25$  时,  $N(0,1)$  和  $t(4)$  分布所对应的 ARL 高于 NPEWMA-SR 控制图,说明在小偏移时所提控制图的性能与 NPEWMA-SR

和 NPEWMA-SN 控制图相比较差。

3 实例验证

本节使用半导体制造过程的真实数据来进行控制图的性能比较。该数据集记录了 2008 年 7 月至 2008 年 10 月通过半导体生产过程中测量点的传感器收集得到的数据。该 SECOM 数据集包含 1567

个半导体产品的 591 个质量特征,可在加州大学欧文分校的机器学习库网站上找到。本文选择一个连续变量特征值进行仿真,从 AC29 特征中截取了 200 条数据,该数据集由 40 个样本组成,每个样本大小为 5,前 25 个样本取自 IC 情形,后 15 个样本取自 OOC 情形。在此算例中过程目标值通过计算取  $68.35 (\mu_0 = 68.35)$ 。 $SR_i$  统计量和  $SC_i^+, SC_i^-$  通过式 (1)和式(4)计算得到,所有方案的设计参数取  $ARL_0 = 500$  情况下的对应值。对于 NPEWMA-SR,取  $\lambda$

$= 0.05, K = 2.69$ ,对于 NPCUSUM 控制图,取  $k = 0.25, h = 78.76$ ,对于本文提出的 NPSC 图,取  $k = 0.25, L_{sc} = 3.68$ 。结果如图 3~图 4 所示,可以看出在样本数小于 25 时,所有的图表都保持为 IC 状态,所提出的 NPSC 控制图在样本数为 26 时触发警报, NPEWMA-SR 在样本数为 27 时触发警报, NPCUSUM 在样本数为 28 时触发警报,均晚于所提出的 NPSC 控制图。

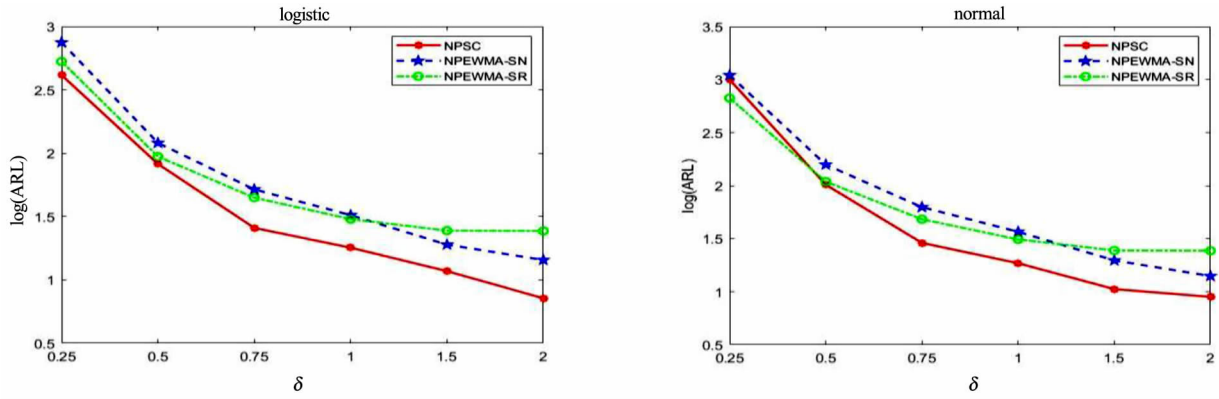


图 1 NPSC 与竞争控制图在 logistic 和标准正态分布下的 ARL 性能曲线

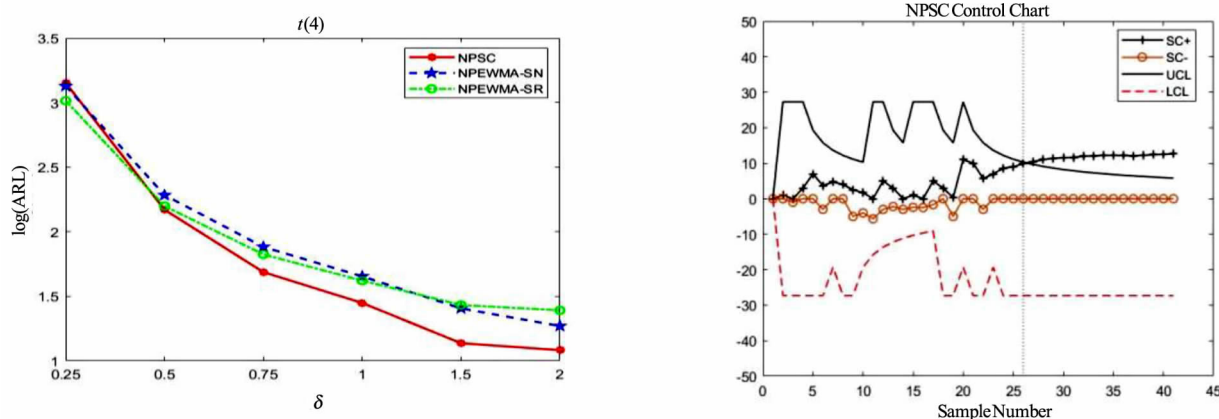


图 2 NPSC 与竞争控制图在  $t(4)$  分布下的 ARL 性能曲线及 NPSC 控制图的实际应用

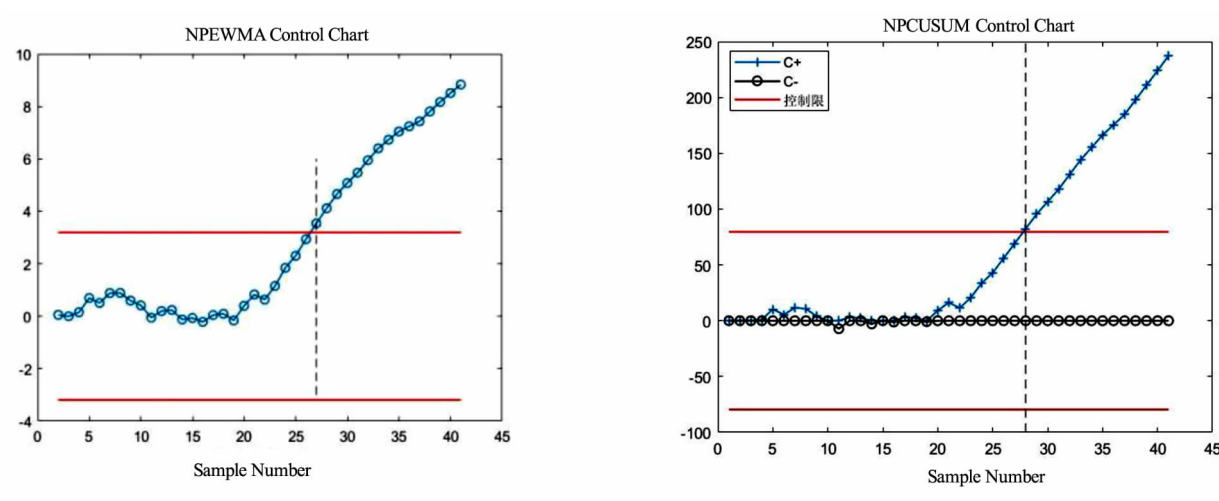


图 3 NPEWMA 与 NPCUSUM 控制图的实际应用

## 4 结 论

针对过程数据分布未知的情况,通过对非参数累积和控制图进行调整,提出了一种基于Wilcoxon符号秩统计量的阶段累积和控制图,所提控制图对非正态连续分布具有 IC 稳健性,克服了传统非参数 CUSUM 控制图只针对特定目标偏移才有最优性能的缺点,同时通过调整控制图的结构改善了延迟报警的情况。针对该控制图,本研究利用蒙特卡洛模拟方法计算了不同情况下的 ARL 性能指标,通过仿真实验,验证了所提控制图对检测过程中出现的不同大小偏移具有更好的全局性能。最后通过将半导体生产过程的实际数据应用到所提出的 NPSC 和 NPCUSUM、NPEWMA 控制图上,验证了所提控制图的优越性。

## 参考文献

[1] PAGE E S. Continuous inspection schemes [J]. *Biometrika*, 1954, 41(1-2): 100-115.

[2] ROBERTS S W. Control chart tests based on geometric moving averages [J]. *Technometrics*, 1959, 1(3): 239-250.

[3] JANACEK G J, MEIKLE S E. Control charts based on medians [J]. *Journal of the Royal Statistical Society Series D-the Statistician*, 1997, 46(1): 19-31.

[4] BAKIR S T, REYNOLDS M R. A nonparametric procedure for process control based on within-group ranking [J]. *Technometrics*, 1979, 21(2): 175-183.

[5] AMIN R W, SEARCY A J. A nonparametric exponentially weighted moving average control scheme [J]. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1991, 20(4): 1049-1072.

[6] JONES-FARMER L A, JORDAN V, CHAMP C W. Distribution-free phase i control charts for subgroup location [J].

*Journal of Quality Technology*, 2009, 41(3): 304-316.

[7] LI S Y, TANG L C, NG S H. Nonparametric CUSUM and EWMA control charts for detecting mean shifts [J]. *Journal of Quality Technology*, 2010, 42(2): 209-226.

[8] GRAHAM M A, CHAKRABORTI S, HUMAN S W. A nonparametric exponentially weighted moving average signed-rank chart for monitoring location [J]. *Computational Statistics & Data Analysis*, 2011, 55(8): 2490-2503.

[9] RIAZ M, ABBASI S A. Nonparametric Double EWMA control chart for process monitoring [J]. *Revista Colombiana de Estadística*, 2016, 39(2): 167-184.

[10] ALEVIZAKOS V, CHATTERJEE K, KOUKOUVINOS C. Nonparametric triple exponentially weighted moving average signed-rank control chart for monitoring shifts in the process location [J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2021, 37(6): 2622-2645.

[11] ABBAS Z, NAZIR H Z, AKHTAR N, et al. Non-parametric progressive signed-rank control chart for monitoring the process location [J]. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2022, 92(12): 2596-2622.

[12] BAGSHAW M, JOHNSON R A. The influence of reference values and estimated variance on the arl of cusum tests [J]. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 2018, 37(3): 413-420.

[13] SHALABH. Nonparametric statistical inference [J]. *Journal of the Royal Statistical Society Series a-Statistics in Society*, 2011, 174: 508-509.

[14] CHAKRABORTI S, VAN DER LAAN P, BAKIR S T. Nonparametric control charts: an overview and some results [J]. *Journal of Quality Technology*, 2001, 33(3): 304-315.

[15] MUKHERJEE A, GRAHAM M A, CHAKRABORTI S. Distribution-free exceedance CUSUM control charts for location [J]. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 2013, 42(5): 1153-1187.

[16] GRAHAM M A, CHAKRABORTI S, HUMAN S W. A nonparametric EWMA sign chart for location based on individual measurements [J]. *Quality Engineering*, 2011, 23(3): 227-241.