[文章编号] 1003－4684(2025)01-0104-05

基于双指数跳扩散模型的沪深300ETF期权定价研究

祝兆媚，商 豪

（湖北工业大学理学院，湖北 武汉 430068）

[摘 要] 用双指数跳扩散模型来描述沪深300ETF资产收益率，用蒙特卡洛方法模拟出双指数跳扩散模型和B-S模型下样本路径，旨在选择更能反映期权实际价格变化的模型。结果显示：双指数跳扩散模型定价误差小，拟合效果更优。双指数跳扩散模型可以更准确地反映资产跳跃这一特点，同时可以很好地刻画资产的“尖峰厚尾”和“波动率微笑”。

[关键词] 双指数跳扩散模型；蒙特卡洛；沪深300ETF；期权定价

[中图分类号] F832.5 [文献标识码] A

期权定价研究有很长的历史且一直处于核心地位。Black和Scholesl(1973)[1]首次提出了Black-Scholesl (B-S)模型，这为期权定价理论开启了新篇章。B-S公式有7个假设，市场是完全竞争、标的资产价格服从几何布朗运动等，实证研究发现：这些假设过于理想，不符合市场的实际情况。为了对B-S定价模型进行优化与补充，Merton(1973)[2]在B-S模型的基础上加入了跳过程，并用泊松过程表示实际市场中标的资产价格不连续的跳跃，他认为标的资产的价格在受到重大影响的情况下会表现为跳跃。Merton(1976)[3]开始对跳扩散过程机制进行了研究和实验，提出了带“跳”的Merton跳扩散模型。但还是有很多学者认为这种跳跃是随机偶然突发事件，所以在期权定价的时候没有重视跳过程。但是经济全球化是时代发展的必然趋势，总会有各种各样的突发事情发生，例如不可预测的天灾人祸、国际关系的变化、不同国家政策的调整宏观等等，这些都可能导致稳定持续变化的市场出现较大幅波动，出现跳跃现象。

Kou S G(2002)[4]进一步在跳扩散模型的基础上细分为正反、上下跳跃以及跳跃范围，使跳跃过程具体化，提出了双指数跳跃扩散模型(KDJ模型)。后面有很多学者将KDJ模型用以实证，Tse等(2003)[5]用马尔科夫蒙特卡洛法(MCMC法)分析双指数跳扩散模型。Ramezani(2007)[6]用不对称跳跃扩散模型和对S&P500指数进行了实证分析。Lee和Mykland(2008)[7]提出了L-M法，一种全新的确定跳跃点的方法，该方法能检测出给定的收益率数据是否服从纯粹连续分布，从而识别出过程中发生的跳跃。王献东等(2009年)[8]将双指数跳跃扩散模型与股票相结合。Benth和Fred Espen(2012)[9]对电力现货价格进行实证分析，在几种模型对比下得出跳扩散模型效果最优的结论。Christara，Leung(2016)[10]基于双指数跳跃扩散模型对欧式期权和美式期权做了比较和系统论证。赵守娟(2017)[11]给出了双指数跳扩散模型下的长期生效期权定价。莫英(2020)[12]将双指数跳跃扩散模型用于对铜期权定价分析研究，发现KDJ模型拟合效果最佳。后来的研究将双指数跳跃扩散模型应用于各种不同标的期权定价分析上，包括股票价格、房地产、上证50ETF、存款保险、复合期权、开放式基金费率、豆粕和白糖等方方面面。研究表明，正是由于双指数跳扩散模型对不连续市场的合理刻画，双指数跳跃扩散模型可以灵活地解决上述各种期权定价问题，不论是传统金融衍生市场(股票价格、上证50ETF等)还是与人们生活息息相关的生产生活领域(房地产、存款保险、实物期权等)，凡具有回报率高峰、厚尾特征和“波动微笑”的资产，双指数跳跃扩散模型都可以很好地改善这一情况，具有较好的拟合效果。

[收稿日期] 2023－06－07

[基金项目] 国家社会科学基金(24BTJ068)

[第一作者] 祝兆媚(1998－)，湖北恩施人，湖北工业大学硕士研究生，研究方向为金融统计。

[通信作者] 商 豪(1982－)，湖北罗田人，湖北工业大学副教授，研究方向为随机分析及其在金融中的应用、金融统计。

作为中国市场最具代表性的宽基指数——沪深 300 指数,不仅能够作为投资业绩的评价标准,而且可以反映整个 A 股市场全貌,素有中国 A 股"晴雨表"之称。因此以沪深 300 指数为标的资产的沪深 300ETF 期权即成为投资者投资中国最合理、便捷的选择之一。所以对沪深 300ETF 期权的研究也很有意义,并能给广大投资者后续投资提供参考价值。

考虑到自 2019 年年底以来,新冠肺炎对正常社会秩序、经济稳定造成的巨大影响,对于资产价格的定价就应该要充分考虑跳过程的存在。故本文采用双指数跳扩散模型,对沪深 300ETF 期权做定价研究。与传统的 B-S 模型作比较,得到两种模型下的理论价格,而后与实际价格相比,旨在选择一个更优的模型,可以更好地拟合实际期权的价格,以减少投资风险。

1　双指数跳扩散模型介绍

Kou 提出的双指数跳跃扩散模型(KDJ 模型)是在 B-S 模型的基础上加入了一个带跳跃项的扩散过程,KDJ 模型分成了两部分:一部分是资产的价格波动关于时间 t 的连续部分用几何布朗运动来表示,另一部分是价格有跳跃的部分,其中规定跳跃规模的对数是双指数分布,并用泊松过程表达突发事件也就是会产生跳跃的事件。这样就得到了 KDJ 模型具体表达式如下:

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t-)}=(r-\lambda\xi)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W(t)+\mathrm{d}(\sum_{i=1}^{N(t)}(J_i-1))$$

一般随机微分方程:

$$S(t)=S(0)\exp\{(r-\lambda\xi-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W(t)\}\prod_{i=1}^{N(t)}J_i$$

式中:r 为短期无风险利率;σ 为波动率;$W(t)$ 为标准布朗运动;$N(t),t\geqslant o$ 是强度为 λ 的泊松过程,J_i,$i=1,2,\cdots$ 为价格跳跃幅度,是一列独立同分布的随机变量;$\xi=E(J-1)$ 为跳跃期望收益。

现定义变量 $Y=\ln(J)=\begin{cases}\xi^+ \text{ 概率为 } p\\ -\xi^- \text{ 概率为 } q\end{cases}$ 是非负随机的,且服从非对称双指数分布。其中 ξ^+、ξ^- 与 Y 的分布相同,都服从双指数分布。ξ^+ 和 ξ^- 是指数随机变量,η_1,η_2 是向上、向下跳跃幅度,p,q 表示跳上、跳下的概率。且 $E(\xi^+)=\frac{1}{\eta_1},E(\xi^-)=\frac{1}{\eta_2}$。

Y 的密度函数为:

$$f(y)=p\eta_1e^{-\eta_1y}I_{\{y\geqslant0\}}+q\eta_2e^{-\eta_2y}I_{\{y<0\}}$$

其中,I 为示性函数,$\eta_1>1,\eta_2>0,p+q=1$。

根据双指数分布得到变量 Y 的期望:

$$E(Y)=\frac{p}{\eta_1}-\frac{q}{\eta_2}$$

变量 Y 的方差:

$$Var(Y)=pq\left(\frac{1}{\eta_1}-\frac{1}{\eta_2}\right)^2+\left(\frac{p}{\eta_1^2}+\frac{q}{\eta_2^2}\right)$$

$$E(J)=E(e^Y)=\frac{p\eta_1}{\eta_1-1}+\frac{q\eta_2}{\eta_2+1}\eta_1>1,\eta_2>0$$

定义　$\gamma(\mu,\sigma,\lambda,p,\eta_1,\eta_2;a,T):=P\{Z(T)\geqslant a\}$,其中 $Z(t)=(r-\lambda\xi)t+\sigma W(t)+\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$,得到欧式看涨期权表达式为:

$$\gamma(\mu,\sigma,\lambda,\tilde{p},\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2;\ln(\frac{K}{S}),T)-$$

$$Ke^{-rT}\gamma(r-\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\xi,\sigma,\lambda,p,\eta_1,\eta_2;\ln(\frac{K}{S}),T)$$

其中,$\tilde{\lambda}=\lambda(1+\xi),\tilde{p}=\frac{p}{1+\xi}\cdot\frac{\eta_1}{\eta_1-1},\tilde{\eta}_1=\eta_1-1,\tilde{\eta}_2=\eta_2+1,\xi=\frac{p\eta_1}{\eta_1-1}+\frac{q\eta_2}{\eta_2+1}-1$,$S$ 是标的资产的初始价格,K 是期权行权价格,r 是无风险利率,T 是期权行使剩余时间,σ 是标的资产价格波动率,λ 是标的资产跳跃频数,η_1,η_2 是向上、向下跳跃幅度。

由上式公式可知,当不存在跳跃过程时即 $\lambda=0$ 时,此公式就是 B-S 模型,而跳跃幅度越趋向于 0,即 $\lambda\to0$ 时,双指数跳扩散模型公式也趋近于 B-S 模型。同时由公式可知:当其他参数不变时,期权价格与行权价格 K 呈反向变动,随着跳跃幅度 λ、扩散波动率 σ 的增大而增大。

2　基于双指数跳扩散模型的沪深 300ETF 期权定价实证分析

2.1　MCMC 算法

MCMC 法基本原理是已知一个概率密度函数,需要从这个概率分布中随机抽样,来分析这个分布的一些统计特性。就是要从后验密度函数中进行抽样,抽出参数向量。但直接从后验分布模拟原数据情况是非常困难的,所以 MCMC 方法就是设置了一个马尔可夫链 $\pi(\cdot)$,使其平稳分布是相同的后验密度。当马尔可夫链收敛,模拟值可以被视为一个样本从后得到的。

在后验密度函数 $P(S\mid\theta)$ 已知的情况下,由贝叶斯原理就可以得到 θ 在数据 S 上的条件分布,可表示为:$\pi(\theta\mid S)=cp(S\mid\theta)\pi(\theta)$,其中 $\pi(\theta)$ 是参数 θ 的先验分布。

双指数跳扩散模型的 MCMC 估计过程如下:

1)设定初值 $\theta^{(0)}$;

2)用 Glibbs 方法随机抽样:$J=(J_t t=1,2,\cdots,n)$ $Y=(Y_t t=1,2,\cdots,n)$,其中 J 是跳跃时间的后验分布,Y 是跳跃幅度的后验分布;

3)在已知参数 $\theta^{(i)}$ 下,结合公式 $\theta'=\theta+\tau\varepsilon$,计算得出备选参数 θ' ;

4)由 $T(\theta^{(i)},\theta')=\min\{1,\frac{\pi(\theta'\mid y)q(\theta^{(i)}\mid\theta')}{\pi(\theta\mid y)q(\theta'\mid\theta)}\}$ 计算得出接受概率,如果 $\theta^{(i+1)}=\theta'$,则接受;如果 $\theta^{(i+1)}=\theta^{(i)}$,则拒绝;

5)重复上述(2)-(4)步,得到 $\{\theta^{(0)},\theta^{(1)},\theta^{(2)},\cdots\}$,直到后面的参数值的后验密度 $\pi(\theta\mid y)$ 都相同。

2.2 LM逐点检验法

LM逐点检验法,是Lee和Mykland提出了一种跳识别方法即对每一个点逐一检查,判断该时刻是否发生跳跃,然后对识别出的跳跃部分进行参数估计,得到跳跃频率、幅度等参数估计值。具体步骤如下:

1)构造判定变量来判断在 t_{i-1} 到 t_i 这一时刻是否发生了跳跃:

$$L(i)=\frac{\log S(t_i)/S(t_{i-1})}{\hat{\sigma}(t_i)}$$

其中,$\hat{\sigma}(t_i)^2=\frac{1}{K-2}\sum_{j=i-K+2}^{i-1}\left|\log S(t_j)/S(t_{j-1})\right\|\log S(t_{j-1})/S(t_{j-2})|$,$S(t_i)$ 为 t_i 时刻的资产价格。$L(i)\sim N(0,\frac{1}{c^4})$,其中 $c=\sqrt{2/\pi}$ 。

2)规定 $\frac{\max_{i\in\bar{A}_n}|L(i)|-C_n}{S_n}\to\Psi$,Ψ 是一个累积分布函数 $P(\Psi\leqslant x)=\exp(-e^{-x})$,

带入确定的显著性水平 α ,然后根据 $P(\Psi\leqslant\beta^*)=\exp(-e^{-\beta^*})=1-\alpha$ 计算得出相应的阈值 β^* 。

3)根据 $\frac{|L(i)|-C_n}{S_n}>\beta^*$ 来判断该时间段存在跳过程。若满足不等式,则存在跳过程;否则不存在跳。其中 $C_n=\frac{(2\log n)^{0.5}}{c}-\frac{\log(n)+\log(\pi)}{2c(2\log n)^{0.5}}$,$S_n=\frac{1}{c(2\log n)^{0.5}}$,$n$ 是样本量 。

2.3 数据的选择与描述性分析

本文对标的资产即2020年10月9日-2022年10月14日时间沪深300ETF购2022年10月4200的日收盘价 S_i ,共488个数据,做出时间序列图,并计算出日对数收益率 x_i ,$x_i=\ln S_i-\ln S_{i-1}$ 。以 x_i 为样本,用LM逐时点检验法识别数据中的跳过程。对每一日收盘数据进行检验,找出原始数据中的跳跃部分,将识别出的跳跃点和跳跃时刻输出。

假设识别出 n_1 个跳跃幅度大于0的数据,n_2 个跳跃幅度小于0的数据,那么在所选时间段内向跳上或者向跳下的概率可直接用向上跳跃的频率和向下跳跃的频率做估计值,即 $p=\frac{n_1}{n}$,$q=\frac{n_2}{n}$,其中 n 为样本点总数。由于所选的时间为沪深300ETF 2020年10月9日-2022年10月14日的数据,并非完整的整年跨度,考虑到交易所365天中只在交易日报价,一周只有5天工作日,再去除法定节假日等,就用均值来估计一年的交易日时间。通过查阅资料通常认为一年有250个交易日,所以在计算年跳跃频数时用年交易日乘上跳跃频率,即向上、向下跳跃频数年估计值可表示为:

$$\hat{\lambda}_u=250p=\frac{250n_1}{n},\hat{\lambda}_d=250q=\frac{250n_2}{n}$$

由于双指数跳扩散模型假定价格跳跃是强度为正常数的泊松过程,满足 $P(x=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$,$k=0,1,2,\cdots$,采用矩估计来估计跳跃频率 λ 即用样本点 x_i 均值来估计,表示为 $\hat{\lambda}_L(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 。向上跳跃幅度 η_u 估计值可以 n_1 个向上跳跃点的均值做估计,向下跳跃幅度 η_d 同上。

为使数据更平滑完整,本文采用均值插补法,即用该点前后各3位共6位数的平均值代替。整理数据即得到修正后的对数收益率时间序列RC,此时的对数收益率更近似服从正态分布。根据正态分布均值与方差的极大似然估计,就得到了修正后扩散过程的均值 $\bar{R}'$ 与标准差 S' ,$\bar{R}'=\bar{R}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i$,$S'^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R_i-\bar{R})^2$ 进一步可得到跳跃过程的年波动率和年收益率估计值 $\hat{\mu}=\bar{R}'\cdot 250+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2$,$\hat{\sigma}=\sqrt{250}S'$ 。

至此双指数跳扩散模型中所有参数都做了相应的参数估计,得到了相应估计值。

2.4 实证结果

选择深交所自2020年10月9日到2022年10月14日沪深300ETF购2022年10月执行价格为4200的每日收盘价,做出时间序列图,如图1所示。

由图1可以清晰地看到近两年沪深300ETF每日收盘价波动还是比较大的。最高达到5.76,最低只有3.78。在此基础上做出时序图的概率直方图,与正态分布相比看原数据是否平衡,是否存在跳跃现象(图2)。

已知正态分布的偏度为0,峰度为3,而由图2沪深300ETF日收盘价的概率直方图输出结果可知:直方图偏度:-0.3137相对于正态分布呈现出

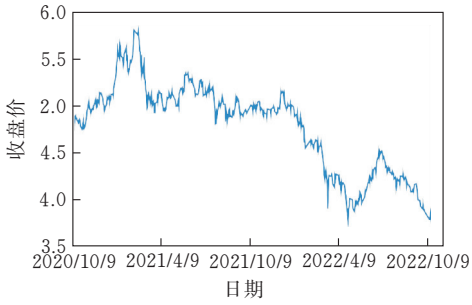

图 1　沪深 300ETF 每日收盘价时序

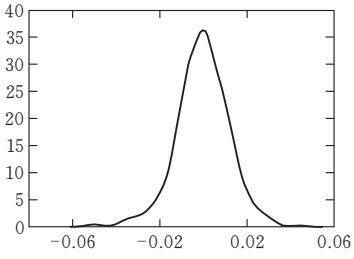

图 2　概率直方

左偏态，峰度：4.4981 大于 3 偏离正态分布。说明该数据有明显尖端现象，序列不平衡，存在跳跃点。由于原数据波动较大且反映的信息有限，下面做对数处理，$R_i = \ln S_i - \ln S_{i-1}$，做出日对数收益率时序图。而后用 LM 法逐点该序列进行跳过程识别，共筛选出 8 个跳跃点，其中 1 个向上的跳跃点，在 2022/3/15 这一天；同时筛选出 7 个向下跳跃点，分别是 2021/3/16、2021/7/26、2021/7/27、2022/1/25、2022/3/7、2022/3/14、2022/4/25 这 7 天，即可以得到向上跳跃概率 $p=1/488$，向下跳跃概率 $q=7/488$。

然后对识别出的跳跃点采取均值插补法，即用该点前后各 3 位共 6 位数的平均值代替。整理数据即得到修正后的时间序列 RC，进一步做出修正后的对数收益率时间序列图。为了更直观地看出区别，将修正前后的对数收益率时序图做在一张图上对比，如图 3 所示。

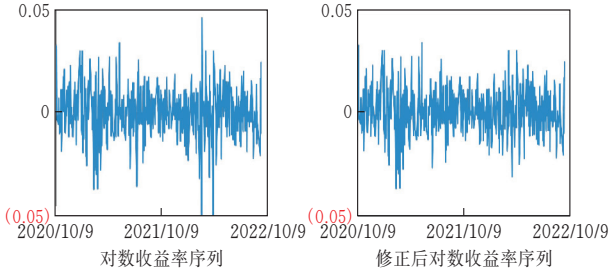

图 3　修正前后对数收益率序列对比

由图 3 对比图可以明显看出在数据中后部有几个跳跃点被剔除了，再由均值替换后得到了更平滑连续序列图。

在得到修正后的收益率数据后，计算此时的峰度、偏度。处理前后偏度由 −0.3137 变为 −0.0368；峰度 4.4981 到 3.4648，更接近正态分布的峰度值 3 了，有很大的改进。说明双指数跳扩散模型对沪深 300ETF 收盘价的处理是有效果的。进一步得出双指数跳扩散模型各参数的参数估计值。具体的估计值由表 3 所示。

表 3　双指数跳扩散模型各参数估计值

参数	估计值	参数	估计值	参数	估计值
μ	−0.0144	λ_u	0.5123	λ_d	3.5861
σ	0.1728	η_1	0.0529	η_2	−0.0362

在得到的双指数跳扩散模型各参数估计值后，用模型各参数导入运行该模型，用 MCMC 方法模拟生成收益率数据序列，然后做出模型模拟生成的数据和实际数据的 Q-Q 图，如图 4 所示。

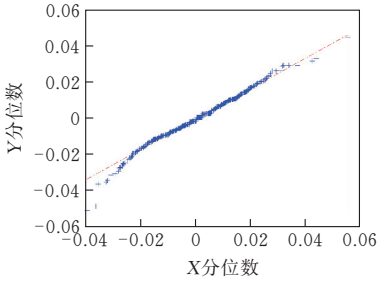

图 4　Q-Q 图

由图 4 中可以发现，所生成的拟合数据与实际值基本是一个直线，且重合程度非常大。说明用双指数跳扩散模型模拟出的数据的确能够很好拟合真实数据的分布状况，所以用双指数跳扩散模型拟合沪深 300ETF 是可行有效的。

2.5　模型比较

在样本为沪深 300ETF 购 2022 年 9 月执行价格为 4200 的数据运行 KDJ 模型和 B-S 定价模型。由于数据过多，篇幅有限，选取 2022－11－29 到 2022－12－28 一个月的数据来做模型对比分析。获取沪深 300ETF 这一个月内 $K=4200$ 的相关数据带入两个模型计算出理论期权的价格。然后利用 MAE、MPE、RMSE 三个相对误差指标来判断哪个模型计算出的期权理论价值与期权实际价格更接近。

MAE：模型预测值与真实值的绝对误差的均值

$$\mathrm{MAE}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\bar{x}_i-x_i\right|$$

MPE：模型预测值与真实值之差及其与真实值的比值

$$\mathrm{MPE}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{x}_i-x_i}{x_i}$$

RMSE：模型预测值与真实值差的平方的均值的平方根

$$\mathrm{RMSE}=\sqrt{E\left(\bar{x}_i-x_i\right)^2}$$

将每日交易真实值与计算出的模型每日理论值的结果可视化，得到图 5。

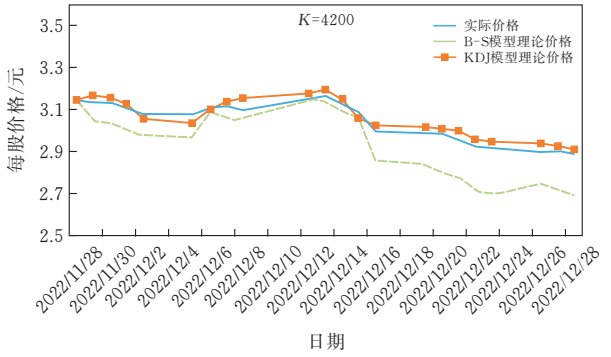

图 5 对比

通过图 5 可知，双指数跳扩散模型的图像走势和实际价格更相似，而且与实际价格的距离也更接近。计算出的三个指标的值也能看出来双指数跳扩散模型的误差更小，可以更好拟合实际价格的变化。

为避免特例干扰，随机抽取沪深 300ETF 购 2022 年 12 月 14 个行权价中的 5 个期权，重复上述的步骤，计算总误差值，汇总，以得到一个更普遍的结论。结果显示如表 4 所示。

表 4 结果

K 值	B-S 模型			KDJ 模型		
	MSE	MPE	RMSE	MSE	MPE	RMSE
3300	0.275	0.313	0.173	0.177	0.043	0.022
3800	0.108	0.208	0.264	0.067	0.056	0.038
4000	0.212	−0.152	0.084	0.133	0.025	0.008
4200	0.103	−0.046	0.019	0.028	0.004	0.015
4600	0.214	0.017	0.085	0.13	0.021	0.002
均值	0.1824	0.068	0.125	0.107	0.0298	0.017

从表 4 看，整体来说不论执行价格 K 是 3300、3800、4000、4200 还是 4600，KDJ 模型的三个指标值都是小于 B-S 模型的。KDJ 模型的 MSE 大致在 0.1 左右波动但 B-S 模型的 MSE 大致在 0.2 波动，而且 KDJ 模型 RMSE 最小可以达到 0.002，和真实数据的误差非常之小。而 B-S 的误差会稍大一些。所以总的来说，双指数跳扩散模型的理论价格比 B-S 模型的理论价值更接近沪深 300ETF 的真实值，误差更小，拟合效果更好。

3 结论

期权定价一直都是金融研究的核心，各种期权定价也得到了不断地完善。沪深 300ETF 是晴雨表，能够很好地反映经济情况。关于沪深 300ETF 的研究，有用各种模型来拟合的，但基本没有人使用双指数跳扩散模型来拟合。本文分析了 KDJ 模型适应的情景，再结合新冠疫情，KDJ 模型是很适合用来拟合疫情期间沪深 300ETF 变化的。实证表明：KDJ 模型对沪深 300ETF 的拟合效果确实优于传统的 B-S 模型。KDJ 模型能更好地刻画价格的尖端厚尾和波动率微笑，更适合于疫情期间计算期权的理论价值，可以为投资者提供参考。

[参 考 文 献]

[1] BLACK F, SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities Journal of Political Economy[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81: 637-654.

[2] MERTON R. Theory of rational option pricing. Bell Journal of Economics[J]. Bell Journal of Economics, 1973, 4: 141-183.

[3] MERTON R. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of Financial Economics, 1976(1-2): 125-144.

[4] KOU S G. A jump-diffusion model for option pricing [J]. Insurance Mathematics & Economics, 2002, 48 (08): 1086-1101.

[5] TSE Y K, ZHANG X B, YU J. Estimation of hyperbolic diffusion using the Markov chain Monte Carlo method[J]. Quantitative Finance, 2003, 3(01): 1-12.

[6] RAMEZANI C A, ZENG Y. Maximum likelihood estimation of the double exponential jump-diffusion process[J]. Annals of Finance, 2007, 3(04): 487-507.

[7] LEE S S, MYKLAND P A. Jumps in financial markets: A new nonparametric test and jump dynamics [J]. Review of Financial studies. 2008, 21 (06): 2535-2563.

[8] 王献东，杜雪樵. 跳扩散模型下的复合期权定价[J]. 数学的实践与认识，2009，39(14)：5-11.

[9] BENTH F E, KIESEL R, NAZAROVA A. A critical empirical study of three electricity spot price models. [J]. Energy Economics, 2012, 34(05): 1589-1616.

[10] CHRISTARA C C, LEUNG C H. Option pricing in jump diffusion models with quadratic spline collocation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2016, 279: 28-42.

[11] 杨建奇，赵守娟. 双指数跳扩散模型下远期生效期权的定价[J]. 数学的实践与认识，2017，47(06)：29-34.

[12] 莫英. 铜期权定价分析研究[D]. 长沙：长沙理工大学，2020.

[13] 林建伟，李慧敏. 双指数跳扩散模型下具有破产重组公司债券定价[J]. 工程数学学报，2020，37(01)：16-26.

[14] 黄金波，朱逸民，张飞鹏. 基于双对数正态分布的沪深 300ETF 期权定价[J]. 系统科学与数学，2023，43 (08)：2116-2133.

[15] 陈乐川，刘文文，何江. 基于沪深 300ETF 的期权定价实证研究[J]. 中国证券期货，2022(04)：52-59.

[16] 吴胤昊，陈荣达，汪圣楠，等. 随机利率随机波动率混合指数跳扩散模型下的期权定价[J]. 系统科学与数学，2022，42(08)：2207-2234.

（下转第 120 页）