

后掠平板边界层的横流线性稳定性和广义共振分析

包云飞¹, 沈露予¹, 徐家宽², 李秀仲¹

(1. 南京信息工程大学海洋科学学院, 210044 南京; 2. 西北工业大学航空学院, 710072 西安)

摘 要:横流不稳定主导了后掠机翼表面前缘附近的边界层湍流转换, 因此其稳定性分析对于通过层流控制实现飞行器的减阻、降噪以及热防护至关重要。本研究采用基于有限雷诺数理论的线性稳定性分析, 研究了 Falkner-Skan-Cooke 边界层和后掠平板边界层的不稳定特征。通过在不同压力梯度边界层求解 Orr-Sommerfeld 方程和 Rayleigh 方程揭示了黏性、无黏在横流不稳定中所起的作用, 并且基于三波共振和 Bragg 散射的广义共振机理, 给出了能够高效触发横流边界层不稳定的壁面粗糙元和定常扰动模式的特定波数。

关键词:横流边界层; 流动稳定性; 广义共振; 线性稳定性理论; 湍流转换

中图分类号: O35 文献标志码: A DOI: 10.11776/j.issn.1000-4939.2026.01.004

文章编号: 1000-4939(2026)01-0049-09 CSTR: 32414.14.cjam.issn.1000-4939.2026.01.004

Crossflow linear stability and generalized resonance analysis of the boundary-layer flow over swept flat plates

BAO Yunfei¹, SHEN Luyu¹, XU Jiakuan², LI Xiuzhong¹

(1. College of Marine Sciences, Nanjing University of Information Science & Technology, 210044 Nanjing, China;

2. School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, 710072 Xi'an, China)

Abstract: Crossflow instability dominates the laminar-turbulent transition in the boundary layer near the leading edge of the surfaces of swept wings. Therefore, its stability analysis is crucial for achieving drag reduction, noise reduction, and thermal protection through laminar flow control. In this paper, linear stability analysis based on finite Reynolds number theory is used to study the unstable eigenmodes of Falkner-Skan-Cooke and swept-flat plate boundary layers. By solving the Orr-Sommerfeld equations and Rayleigh equation in boundary layers with different pressure gradients, the roles of viscosity and inviscid effects in crossflow instability are revealed. And based on the generalized resonance mechanism of three wave resonance and Bragg scattering, this article provides specific wave numbers of wall roughness elements and steady-state disturbance modes that can efficiently trigger the instability of crossflow boundary layer. The results of this stability analysis in this article can provide useful reference for transition prediction and laminar flow control in crossflow boundary layers.

收稿日期: 2024-12-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 12072164; 12102361)

通信作者: 沈露予. E-mail: shenluyu@nuist.edu.cn

引用格式: 包云飞, 沈露予, 徐家宽, 等. 后掠平板边界层的横流线性稳定性和广义共振分析[J]. 应用力学学报, 2026, 43(1): 49-57.

BAO Yunfei, SHEN Luyu, XU Jiakuan, et al. Crossflow linear stability and generalized resonance analysis of the boundary-layer flow over swept flat plates[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2026, 43(1): 49-57.

Key words: crossflow boundary layer; hydrodynamic stability; generalized resonance; linear stability theory; turbulent transition

后掠机翼表面边界层的转捩预测和层流控制直接影响其表面摩擦阻力、热交换以及流动分离,是飞行器减阻、降噪以及热防护设计所需要掌握的关键技术,也是流动稳定性领域的难点问题^[1-2]。目前研究显示,后掠机翼表面存在着4种主要的不稳定机制,即附着线不稳定、横流不稳定^[3-4]、Tollmien-Schlichting 不稳定^[5-6]和 Görtler 不稳定^[7-8]。而风洞和飞行实验结果都表明,飞行工况下横流不稳定主导了后掠机翼前缘表面边界层的转捩过程^[9-10]。

典型的横流边界层基本流速度剖面中存在着拐点,于是 GREGORY 等^[11]根据经典的 Rayleigh 拐点不稳定理论,通过实验和理论分析得出横流不稳定为无黏不稳定模态。但是拐点不稳定理论不能准确预测横流不稳定的增长过程,因此 CHOUDHARI^[12-13]引入基于大雷诺数法的长波不稳定理论来解释横流驻波在前缘附近的线性演化机制,黏性在横流不稳定中也起到重要的作用。BUTLER 等^[14]则在此基础上,采用三层结构理论揭示了前缘区域边界层流动的非平行性对横流驻波不稳定起到不可忽略的重要作用。

自由流扰动和壁面粗糙元等外部扰动都能激发横流边界层的不稳定扰动^[14-17]。同时最近的理论研究表明,横流边界层中广义共振是一种非常有效的激发或强化不稳定波的机制^[18]。不同于二维边界层中的三波共振需要满足近似中性的条件^[19],横流边界层中不稳定扰动与壁面粗糙元也能满足三波共振条件。HE 等^[18]、XU 等^[20]通过理论分析,揭示了三波和共振是比三波差共振更加有效的不稳定机制。三波和共振关系中右分支定常中性模态波数附近的定常模态或壁面粗糙元对应的共振放大最强。对于 Bragg 散射,最不稳定定常模态波数附近的定常模态或壁面粗糙元对应的共振放大最强。这些结论与 REIBERT 等^[21]实验中发现的分布式粗糙元 (distributed roughness elements, DRE) 影响转捩的最危险尺度一致。

虽然横流转捩过程中有较长的非线性演化阶段^[22-23],但是基于线性稳定性分析的 e^N 法依然是最为经济有效的横流转捩预测法。在实际情况下,后掠平板边界层更接近实际问题,不过 Falkner-Skan-Cooke (FSC) 边界层作为理想条件下的一种边界层,对于其他实际复杂条件下边界层研究的开展具有重

要的参考价值。本研究采用基于有限雷诺数理论的线性稳定性分析^[24]对横流边界层进行线性稳定性分析,揭示黏性、无黏和非平行性在横流不稳定中所起的作用;并根据基于线性稳定性分析的 e^N 方法给出相应的转捩位置。随后,由横流边界层的广义共振关系以及线性稳定性分析的结果,给出最有效触发三波共振和 Bragg 散射的定常模态和壁面粗糙元的对应波数。

1 控制方程和数值方法

1.1 基本流方程

本研究将采用无量纲方程对横流边界层进行稳定性分析。选取边界层位移厚度 L^* 为特征长度,无穷远来流速度 U_∞^* 、密度 ρ_∞^* 为特征速度、密度。

$$\begin{cases} x = \frac{x^*}{L^*}, y = \frac{y^*}{L^*}, z = \frac{z^*}{L^*} \\ u = \frac{u^*}{U_\infty^*}, v = \frac{v^*}{U_\infty^*}, w = \frac{w^*}{U_\infty^*} \\ t = \frac{U_\infty^*}{L^*} t^*, \rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*}, p = \frac{p^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} \end{cases} \quad (1)$$

其中:上标带星号的变量为有量纲量,上标无星号的为无量纲量; x 为后掠平板的弦向, y 为法向, z 为展向; u, v, w 为3个方向上的速度分量。边界层位移

厚度雷诺数定义为 $Re = \frac{U_\infty^* L^*}{\nu_\infty^*}$, 且 $Re \gg 1$, 其中 ν_∞^*

为无穷远处的运动黏性系数。假设边界层流体运动由定常的基本流 (U_B, V_B, W_B, P_B) 和小扰动 (u', v', w', p') 组成,即

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = U_B(x, y, z) + u'(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) = V_B(x, y, z) + v'(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) = W_B(x, y, z) + w'(x, y, z, t) \\ p(x, y, z, t) = P_B(x, y, z) + p'(x, y, z, t) \end{cases} \quad (2)$$

在经典的普朗特边界层方程中引入类相似变量 $\eta = Re^{1/2} U_e^{1/2} x^{-1/2} y$, 并将基本流速度分量写成

$$\begin{cases} U_B = U_e F_\eta, W_B = W_e G \\ V_B = Re^{-1/2} U_e^{1/2} x^{-1/2} \times \\ \left\{ \frac{1}{2} [F_\eta \eta - F - m(F + F_\eta \eta)] - x F_x \right\} \end{cases} \quad (3)$$

其中: $F = F(x, \eta)$ 表示弦向速度的相似解; $G = G(x, \eta)$ 表示展向速度的相似解; U_e 和 W_e 为滑移速度; $m = \frac{x}{U_e} \frac{dU_e}{dx}$ 为无量纲加速系数。得到本研究边界层的控制方程非线性边界层方程,即

$$\begin{cases} F_{\eta\eta\eta} + \frac{1}{2}(m+1)FF_{\eta\eta} + m(1-F_\eta^2) = x(F_\eta F_{x\eta} - F_x F_{\eta\eta}) \\ G_{\eta\eta} + \frac{1}{2}(m+1)FG_\eta = x(F_\eta G_x - F_x G_\eta) \end{cases} \quad (4)$$

满足边界条件

$$F = F_\eta = G = 0, \eta = 0; F_\eta \rightarrow 1, G \rightarrow 1, \eta \rightarrow \infty \quad (5)$$

本研究将后掠平板置于具有顺压梯度的收缩管道中形成横流边界层,其滑移速度为^[25]

$$U_e(x) = \frac{\sigma_c + 1}{2} + \frac{\sigma_c - 1}{2} \frac{\sinh(2\pi x/a)}{\cosh(2\pi x/a) + 1} \quad (6)$$

其中: σ_c 为管道收缩比; a 为管道入口宽度。

W_e 由后掠角确定,其压力梯度和滑移速度分布如图1所示。该后掠平板边界层的基本流由非线性边界层方程式(4)计算得到。

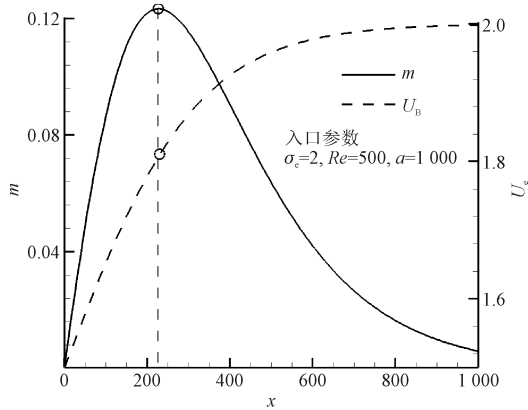


图1 后掠平板边界层压力梯度加速系数 m 和滑移速度 U_e 的弦向分布

Fig. 1 Chordwise distribution of pressure gradient acceleration coefficient m and slip velocity U_e in the boundary layer of a swept flat plate

若令式(4)右端项为0,则得到本研究采用的另一种横流边界层基本流分布,即 Falkner-Skan-Cooke (FSC) 相似解。

$$\begin{cases} F_{\eta\eta\eta} + \frac{1}{2}(m+1)FF_{\eta\eta} + m(1-F_\eta^2) = 0 \\ G_{\eta\eta} + \frac{1}{2}(m+1)FG_\eta = 0 \end{cases} \quad (7)$$

同样满足边界条件式(5),其滑移速度为 $U_e =$

$(x/x_0)^m$, 其中 x_0 为平板上计算区域入口位置。本研究稳定性分析的后掠平板边界层和 FSC 边界层的入口后掠角都为 45° 。

1.2 线性稳定性理论

根据经典线性稳定性理论,引入平行流假设,并设横流扰动为正则模态,则

$$(u', v', w', p') = [\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{w}(y), \hat{p}(y)] \times \exp \left[i \left(\int \alpha(x) dx + \beta z - \omega t \right) \right] \quad (8)$$

其中: α 为弦向扰动波数,其实部 α_r 对应弦向扰动波数,虚部 α_i 对应弦向增长率; β 为展向扰动波数; ω 为扰动频率。代入线性化 Navier-Stokes 方程,得到本研究线性稳定性分析的控制方程为^[17]

$$\begin{cases} i\alpha\hat{u} + \frac{d\hat{v}}{dy} + i\beta\hat{w} = 0 \\ i(\alpha U_B + \beta W_B - \omega)\hat{u} + \frac{dU_B}{dy}\hat{v} = -i\alpha\hat{p} + \frac{1}{Re} \left(\frac{d^2\hat{u}}{dy^2} - \alpha^2\hat{u} - \beta^2\hat{u} \right) \\ i(\alpha U_B + \beta W_B - \omega)\hat{v} = -\frac{d\hat{p}}{dy} + \frac{1}{Re} \left(\frac{d^2\hat{v}}{dy^2} - \alpha^2\hat{v} - \beta^2\hat{v} \right) \\ i(\alpha U_B + \beta W_B - \omega)\hat{w} + \frac{dW_B}{dy}\hat{v} = -i\beta\hat{p} + \frac{1}{Re} \left(\frac{d^2\hat{w}}{dy^2} - \alpha^2\hat{w} - \beta^2\hat{w} \right) \end{cases} \quad (9)$$

该齐次方程组等价于有限雷诺数法的控制方程 Orr-Sommerfeld 和 Squire 方程,且满足齐次边界条件 $u = v = w = 0, y = 0; u = v = w = 0, y \rightarrow \infty$

(10)

上述条件构成了求解横流扰动模态的特征值问题。

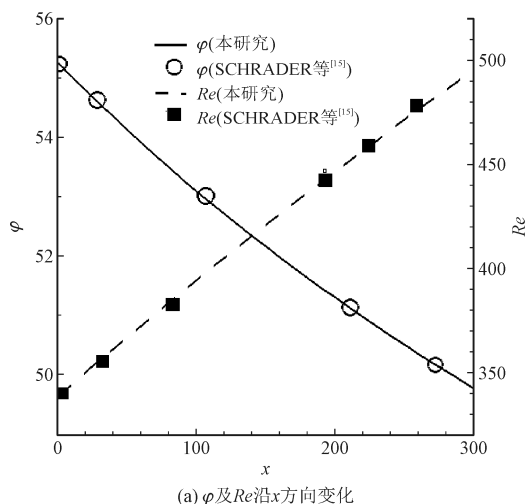
对于无黏不稳定问题,将黏性项从控制方程式(9)中舍去,得到无黏线性稳定性分析的控制方程为

$$\begin{cases} i\alpha\hat{u} + \frac{d\hat{v}}{dy} + i\beta\hat{w} = 0 \\ i(\alpha U_B + \beta W_B - \omega)\hat{u} + \frac{dU_B}{dy}\hat{v} = -i\alpha\hat{p} \\ i(\alpha U_B + \beta W_B - \omega)\hat{v} = -\frac{d\hat{p}}{dy} \\ i(\alpha U_B + \beta W_B - \omega)\hat{w} + \frac{dW_B}{dy}\hat{v} = -i\beta\hat{p} \end{cases} \quad (11)$$

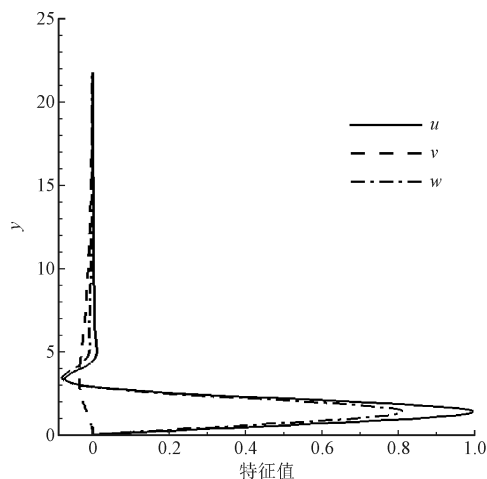
该齐次方程组等价于三维流场的 Rayleigh 方程,同样满足齐次边界条件。本研究将利用 Orr-Sommerfeld 方程(OSE)和 Rayleigh 方程(RLE)来揭示横流扰动中黏性和无黏不稳定机制。

1.3 数值方法与验证

对于基本流方程和扰动方程,壁面法向 y 上的离散都采用了 4 阶精度的 Malik 紧致有限差分格式。对于 FSC 相似解(式 7)以及特征值问题(式 9、式 11)采用了 Muller 法进行迭代求解。而非线性边界层方程式(4)是一个抛物化方程组,因此在推进方向 x 方向上采用了 4 阶精度的迎风格式,并采用 Newton-Raphson 迭代求解。



(a) φ 及 Re 沿 x 方向变化



(b) 横流模态速度分量特征函数在 y 方向分布

图2 数值方法与验证

Fig. 2 Numerical methods and verification

2 稳定性分析

为了研究黏性、无黏在横流不稳定中所起的作用,采用包含黏性和无黏作用的 Orr-Sommerfeld 方程式(9)以及描述纯无黏不稳定的 Rayleigh 方程式(11)对 $m=1$ 和 $m=0.35$ 的 FSC 边界层进行稳定性分析(基本入流参数 $U_e=1, W_e=1, Re=220$)。图 3(a)和图 3(c)分别为 $m=0.35$ 的 FSC 边界层中,频率固定为 $\omega=-0.02$,展向波数 $-0.4 \leq \beta \leq -0.25$ 区间,以及展向波数固定为 $\beta=-0.32$,频率 $-0.03 \leq \omega \leq -0.01$ 区间的非定常横流模态增长率 α_i ($\alpha_i < 0$ 时为不稳定的幅值增长波)随弦向的演化。结果显示,在 x 较大的下游区域, Rayleigh 方程的解逐渐与 Orr-Sommerfeld 方程的解趋于一致,符合经典横

为了验证本研究数值方法的可靠性,本研究复现了 SCHRADER 等^[15]在 FSC 边界层中的算例。首先采用入口参数 $m=0.34207, U_e=1, W_e=1.442, Re=337.9$,利用非线性边界层方程式(7)计算了基本流沿 x 方向的分布,得到的无黏流线方向角 φ 及当地边界层位移厚度雷诺数 Re 沿 x 方向变化,结果与 SCHRADER 等^[15]的数值结果一致,如图 2(a)所示。随后采用横流模态参数 $\omega=-0.01, \beta=-0.25, \alpha=(0.102, 0.00466)$,作为特征值问题的初值计算了相对应的横流模态的特征值和特征函数,结果与 SCHRADER 等^[15]计算得到的特征函数一致,如图 2(b)所示。以上算例充分验证了本研究边界层基本流和线性稳定性理论数值计算方法的可靠性。

流无黏不稳定的结论;但是在前缘附近区域, Orr-Sommerfeld 方程得到了远小于 Rayleigh 方程的增长率,黏性对于横流模态起到了稳定作用。此外还可以看出固定 $\omega=-0.02$ 时,展向波数 β 绝对值越小,横流模态增长率越小;固定展向波数 $\beta=-0.32$ 时,频率 ω 绝对值越小,横流模态增长率越大。图 3(b)和图 3(d)则给出了 $m=1$ 的 FSC 边界层中非定常横流模态增长率随弦向的演化,得到了与 $m=0.35$ 时相类似的结论。此外,图 3 还可以看出在相同频率波数条件下, $m=1$ 时的横流模态增长率大于 $m=0.35$ 时的增长率,这是因为 $m=1$ 时边界层具有相对较大的顺压梯度。

为了详细地分析后掠平板边界层的横流稳定性特征,采用 Orr-Sommerfeld 方程计算了具有相同入口参数($\sigma_e=2, Re=500$)的后掠平板边界层和 FSC

边界层的 (ω, β) 和 (F, R) 中性曲线,以及前缘驻点处 ($m = 1$ 的 FSC 边界层) 的中性曲线, FSC 边界层入口参数 $m = 1, U_e = 1, W_e = 1, Re = 220$, 结果如图 4 所示。中性曲线内部为不稳定横流模态区域,外

部则为稳定模态区域。图 4 中特征长度无关的无量纲的频率与雷诺数的定义为

$$F = \frac{\omega}{Re}, R = \sqrt{xRe} \quad (12)$$

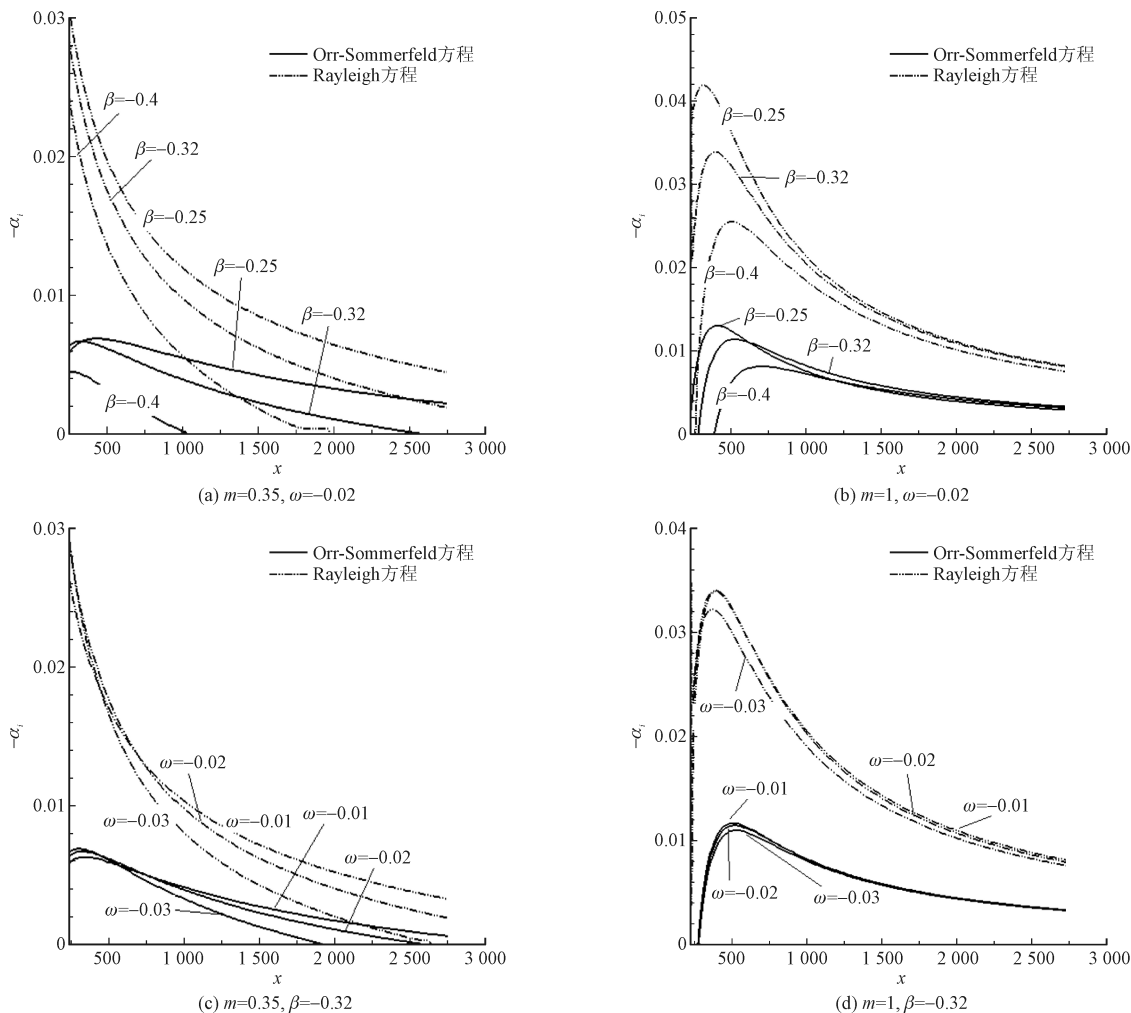


图 3 FSC 边界层内不稳定横流模态增长率 $-\alpha_i$ 在 x 方向演变

Fig. 3 The evolution of the growth rate of unstable crossflow modes in the FSC boundary layer in the x -direction

图 4(a)、图 4(d) 和图 4(b)、图 4(e) 可以看出后掠平板边界层和具有相同入口参数的 FSC 边界层的中性曲线分布相类似,在前缘附近就能产生较强的不稳定波区域,且定常扰动 ($\omega = 0$) 具有较大的展向波数 β 不稳定区间,沿弦向传播时展向波数不稳定区间逐渐变小且向 β 绝对值较小的区域移动。且 FSC 边界层的不稳定区域要大于后掠平板边界层,这是因为 FSC 边界层的顺压梯度是常数,而真实的后掠平板边界层顺压梯度主要集中在前缘区域,如图 1 所示。图 4(c) 和图 4(f) 中展示了 $m = 1$ 时的中性曲线分布,此时横流边界层的顺压梯度与前缘驻点一致。可以看出横流模态的不稳定区域没有像后

掠平板边界层沿弦向传播时逐渐变小,相反是逐渐变大的,并且其不稳定区域远大于后掠平板边界层的中性曲线。

虽然横流转捩过程中有较长的非线性演化阶段,但是基于线性稳定性分析的 e^N 法依然是最为经济有效的横流转捩预测法。因此根据线性稳定性理论计算了横流边界层不稳定扰动对应的 N 值,其定义为

$$N(x) = \int_{x_0}^x -\alpha_i(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (13)$$

图 5 的基本流入口参数为 $\sigma_e = 2, Re = 500$ 。

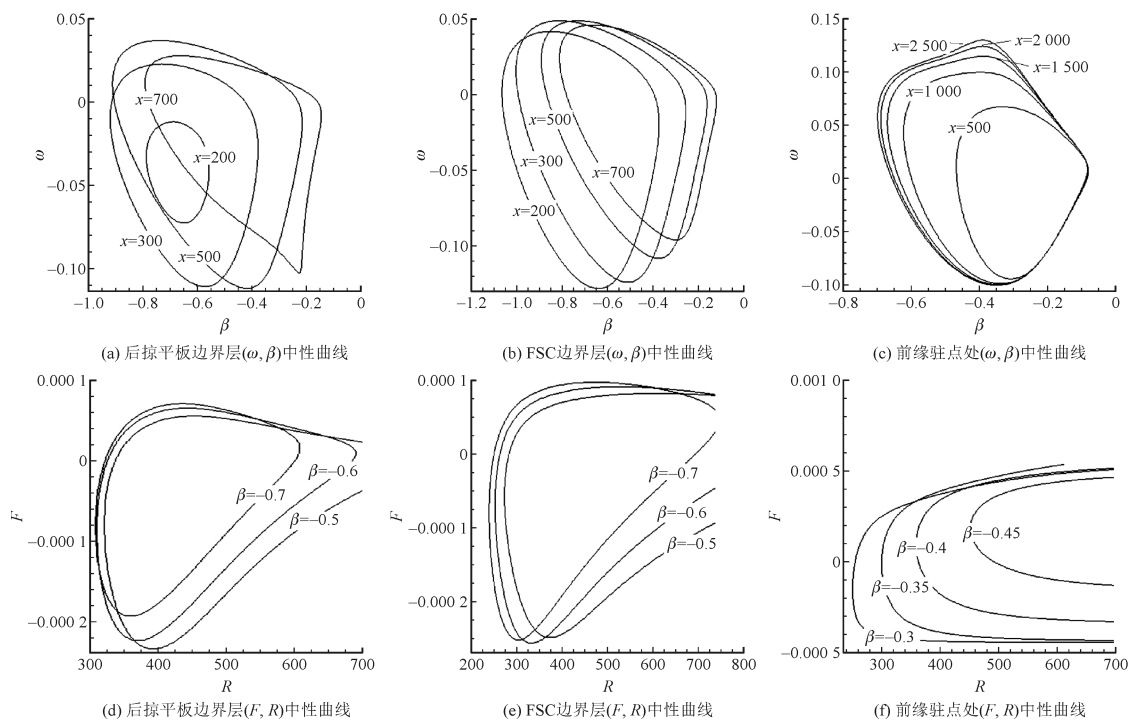
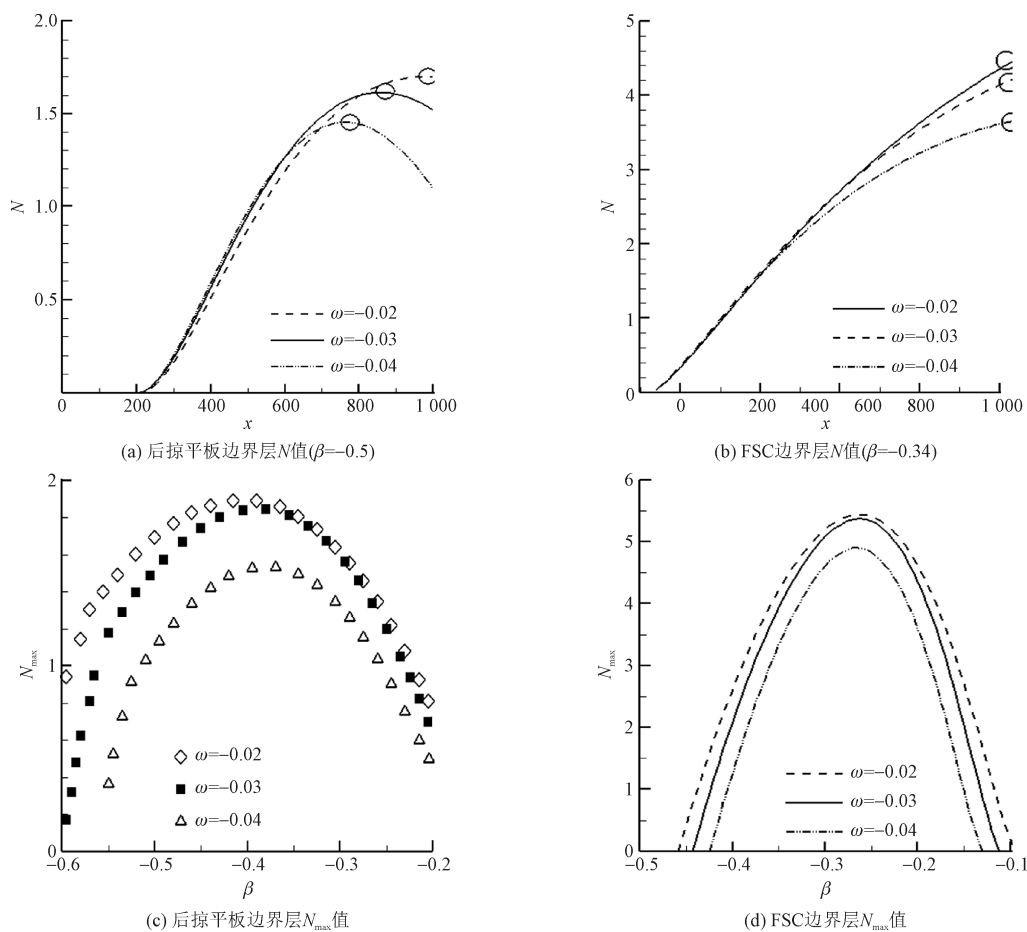


图4 后掠平板边界层的横流稳定性特征

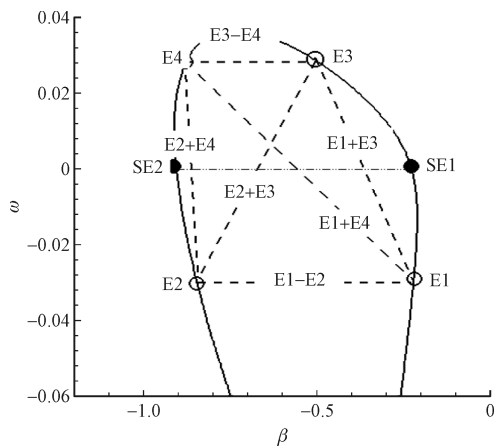
Fig. 4 The crossflow stability characteristics of a swept flat plate boundary layer

图5 由 e^N 法计算得到的不稳定横流模态的 N 值和最大值 $N_{\max}$ Fig. 5 N and $N_{\max}$ values of the unstable crossflow modes calculated by the e^N method

从图 5(a) 和图 5(c) 中可以看出,后掠平板边界层 N 的最大值出现在大于 $x=700$ 的位置,随着频率的减小 $N_{\max}$ 的值变大,并且 $N_{\max}$ 的位置向下游移动;而 FSC 边界层中 $N_{\max}$ 的出现位置不随频率变化,集中在 $x=1000$ 的位置附近,这可能是越靠近低频不稳定区间越大,所以后掠平板边界层中性曲线的边界会向下游移动,而 FSC 边界层的 m 一直不变 ($m=0.35$),在 $x=1000$ 的位置还没达到中性曲线的下游边界处,因此 N 值还有增长的趋势。从图 5(b) 和图 5(d) 可以看出,在 FSC 边界层中 $N_{\max}$ 的分布与频率相关,频率越低 $N_{\max}$ 越大,其对应的展向波数也具有选择性,最大值位于 $\beta=-0.3$ 附近。而后掠平板边界层的 $N_{\max}$ 对于频率并不敏感,但是其展向波数仍具有选择性, $N_{\max}$ 的最大值位于 $\beta=-0.4$ 附近。

3 广义共振

不同于二维边界层中的三波共振需要满足近似



(a) 后掠平板边界层

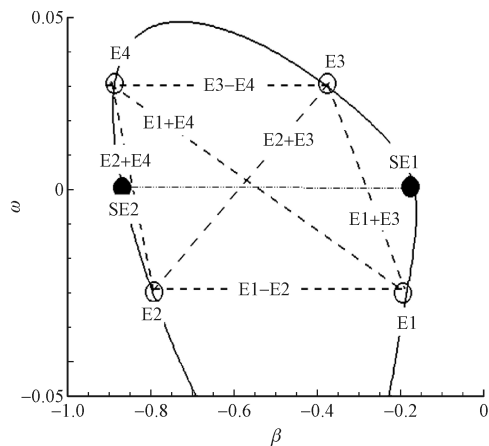
中性的条件^[19],横流边界层中不稳定扰动与壁面粗糙元也能满足三波共振条件,并且可以有效地激发和放大不稳定波^[18]。三波共振分为三波差、三波和两种共振关系,对于三波差共振,参与共振的 2 个横流不稳定模态的频率 ω_1, ω_2 和波数 $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$ 与壁面粗糙元的波数 (α_w, β_w) 需要满足

$$\begin{cases} \alpha_{li} = \alpha_{2i}, & \omega_1 = \omega_2, \\ \alpha_{lr} - \alpha_{2r} = \alpha_w, & \beta_1 - \beta_2 = \beta_w \end{cases} \quad (14)$$

三波和共振,则需要满足

$$\begin{cases} \alpha_{li} = \alpha_{2i}, & \omega_1 = -\omega_2, \\ \alpha_{lr} + \alpha_{2r} = \alpha_w, & \beta_1 + \beta_2 = \beta_w \end{cases} \quad (15)$$

图 6 基本流入口参数为 $\sigma_c = 2, Re = 500$ 。图 6(a) 和图 6(b) 中分别展示了后掠平板边界层和 FSC 边界层中满足三波共振关系的非定常横流模态,其对应色散关系如表 1 所示。其中 2 组横流模态与壁面粗糙元组合 E1-E2 和 E3-E4 满足三波差共振关系式(14);4 组横流模态与壁面粗糙元组合 E1+E3、E2+E4、E1+E4 和 E2+E3 满足三波和共振关系式(15)。



(b) FSC边界层

图 6 满足横流广义共振关系的特征模态

Fig. 6 Eigenmodes satisfying the generalized resonance relationship of crossflow

表 1 参与广义共振的横流特征模态的色散关系

Tab. 1 Dispersion relationship of crossflow eigenmodes participating in generalized resonance

参数	后掠平板边界层						FSC 边界层					
	E1	E2	E3	E4	SE1	SE2	E1	E2	E3	E4	SE1	SE2
ω	-0.03	-0.03	0.03	0.03	0	0	-0.03	-0.03	0.03	0.03	0	0
α	0.081 4	0.392 5	0.277 1	0.449 9	0.110 2	0.441 4	0.052 2	0.351 2	0.198 7	0.439 3	0.077 3	0.407 4
β	-0.23	-0.85	-0.51	-0.87	-0.23	-0.90	-0.18	-0.80	-0.38	-0.89	-0.17	-0.87

而当参与共振的 2 个横流不稳定模态为定常模态 ($\omega = 0$),则三波和共振条件退化为 Bragg 散射,满足关系

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ 2\alpha_r = \alpha_w \\ 2\beta = \beta_w \end{cases} \quad (16)$$

图6(a)和图6(b)中分别展示了后掠平板边界层和FSC边界层中满足Bragg散射关系的定常横流模态或粗糙元(SE1, SE2), 其对应色散关系如表1所示。其中2组组合SE1+SE1、SE2+SE2满足Bragg散射关系式(16)。

HE等^[18]、XU等^[20]通过理论分析, 揭示了三波和共振是比三波差共振更加有效的不稳定机制。图7的基本流入口参数为 $\sigma_c = 2$, $Re = 500$ 。图7(a)和图7(c)分别展示了后掠平板边界层和FSC边界层

定常中性模态沿 x 方向的增长率分布, 其中展向波数绝对值较大的中性模态对应了三波和共振最强的右分支(实心圆), 其展向波数的绝对值沿弦向逐渐减小, 如图7(b)和图7(d)所示。对于Bragg散射, 展向波数处于最不稳定定常模态附近的定常横流模态或壁面粗糙元对应的共振最强。图7(a)和图7(c)中, 增长率最大的横流模态(空心圆)对应了Bragg散射最强的一支, 其展向波数的绝对值沿弦向逐渐减小, 如图7(b)和图7(d)所示。

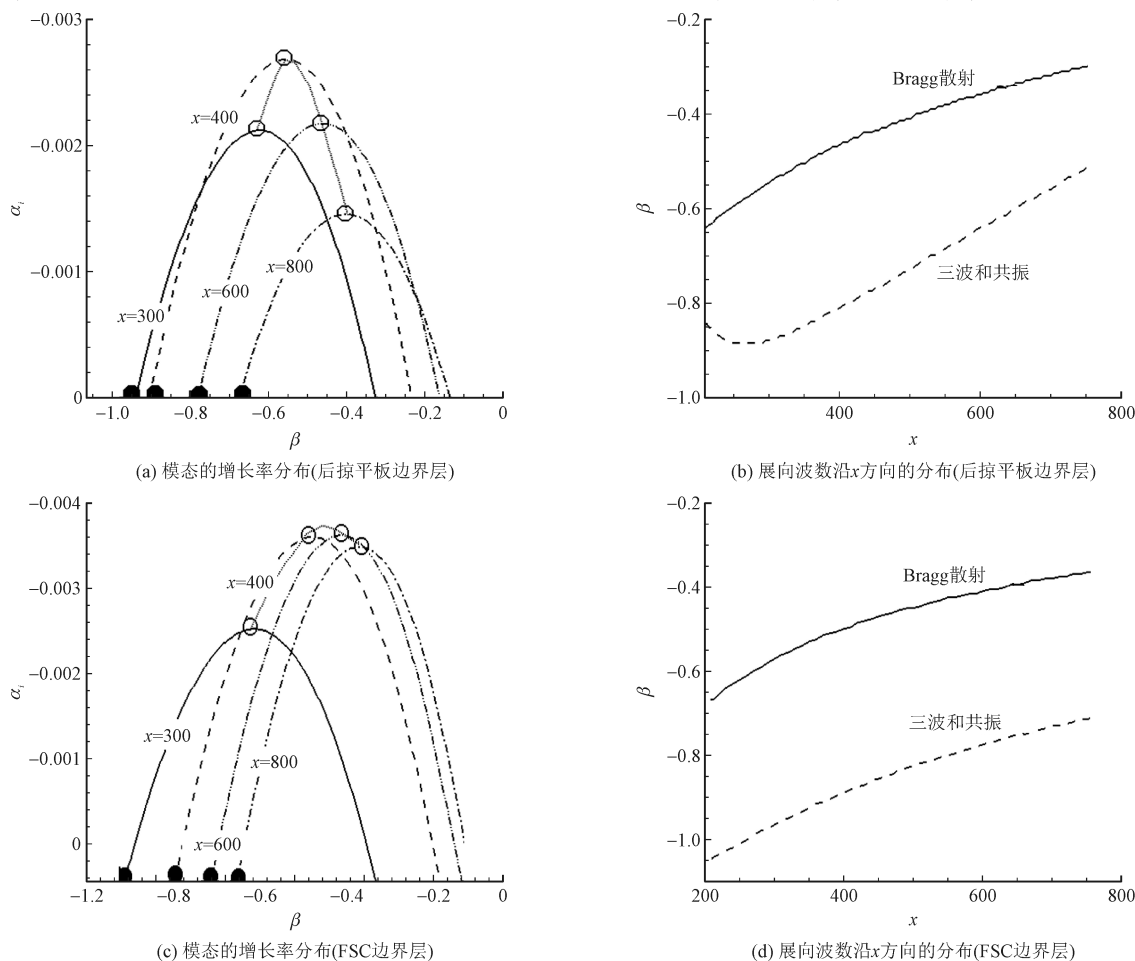


图7 模态的增长率分布及展向波数沿 x 方向的分布

Fig. 7 Growth rate distribution and the distribution of spanwise wave numbers along the x direction

4 结论

本研究通过采用基于有限雷诺数理论的Orr-Sommerfeld方程和Rayleigh方程对后掠平板边界层和FSC边界层进行了横流稳定性分析, 得到如下结论。

1) 在FSC边界层中横流不稳定扰动在下游区域由无黏不稳定主导, 但是在前缘区域黏性作用将

变得显著并起到稳定作用。

2) 由于顺压梯度主要存在于后掠平板前缘区域, 因此其在前缘区域有较强的不稳定性, 但是其不稳定频率-波数区域沿弦向逐渐减小, 并趋向于展向波数绝对值较小的区域。而在前缘驻点附近($m=1$ 的FSC边界层), 不稳定频率-波数区域沿弦向逐渐增大。

3) 通过基于线性稳定性分析的 e^N 法计算, 发现后掠平板的横流模态增长受频率影响较小, 但是对展向波数敏感, 其最大增长波数在 $\beta = -0.4$ 附近。

而 FSC 边界层则对频率和展向波数都敏感,低频模态能激发更快的不稳定增长。

4) 计算得到了后掠平板边界层和 FSC 边界层中能够激发最强三波和共振的右上支中性定常模态(或粗糙元)的展向波数沿弦向的分布;以及能够激发最强 Bragg 散射的最不稳定定常模态的展向波数沿弦向的分布。

参考文献:

- [1] 徐国亮,符松.可压缩横流失稳及其控制[J].力学进展,2012,42(3):262-273.
XU Guoliang, FU Song. The instability and control of compressible cross flows[J]. Advances in mechanics, 2012, 42(3):262-273 (in Chinese).
- [2] 周恒,苏彩虹,张永明.超声速/高超声速边界层的转捩机理及预测[M].北京:科学出版社,2015:146-149.
- [3] SHEN L Y, LU C G. Effect of leading-edge curvature on receptivity of stationary cross-flow modes in swept-plate boundary layers[J]. Advances in applied mathematics and mechanics, 2021, 13(2):467-480.
- [4] SHEN L, LU C. Excitation and linear instability of stationary modes in Falkner-Skan-Cooke boundary layer[J]. Journal of applied fluid mechanics, 2021, 14(5):1437-1445.
- [5] SHEN L Y, LU C G. Boundary-layer receptivity under interaction of free-stream turbulence and localized wall roughness[J]. Applied mathematics and mechanics, 2016, 37(3):349-360.
- [6] SHEN L Y, LU C G. Local receptivity in non-parallel boundary layer[J]. Applied mathematics and mechanics, 2016, 37(7):929-940.
- [7] XU D D, LIU J X, WU X S. Görtler vortices and streaks in boundary layer subject to pressure gradient; excitation by free stream vortical disturbances, nonlinear evolution and secondary instability[J]. Journal of fluid mechanics, 2020, 900:A15.
- [8] XU D D, ZHANG Y M, WU X S. Nonlinear evolution and secondary instability of steady and unsteady Görtler vortices induced by free-stream vortical disturbances[J]. Journal of fluid mechanics, 2017, 829:681-730.
- [9] BIPES H. Basic experiments on transition in three-dimensional boundary layers dominated by crossflow instability[J]. Progress in aerospace sciences, 1999, 35(4):363-412.
- [10] SARIC W S, REED H L, WHITE E B. Stability and transition of three-dimensional boundary layers[J]. Annual review of fluid mechanics, 2003, 35:413-440.
- [11] GREGORY N, STUART J T, WALKER W S. On the stability of three-dimensional boundary layers with application to the flow due to a rotating disk[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, series a: mathematical and physical sciences, 1955, 248(943):155-199.
- [12] CHOUDHARI M. Roughness-induced generation of crossflow vortices in three-dimensional boundary layers[J]. Theoretical and computational fluid dynamics, 1994, 6(1):1-30.
- [13] CHOUDHARI M. Long-wavelength asymptotics of unstable cross-flow modes, including the effect of surface curvature[J]. Proceedings of the Royal Society of London. series a: mathematical and physical sciences, 1995, 451(1943):515-541.
- [14] BUTLER A, WU X S. Stationary crossflow vortices near the leading edge of three-dimensional boundary layers; the role of non-parallelism and excitation by surface roughness[J]. Journal of fluid mechanics, 2018, 845:93-140.
- [15] SCHRADER L U, BRANDT L, HENNINGSON D S. Receptivity mechanisms in three-dimensional boundary-layer flows[J]. Journal of fluid mechanics, 2009, 618:209-241.
- [16] 沈露予,陆昌根.三维边界层内定常横流涡的感受性研究[J].物理学报,2017,66(1):220-234.
SHEN Luyu, LU Changgen. Receptivity of the steady cross-flow vortices in three-dimensional boundary layer[J]. Acta physica Sinica, 2017, 66(1):220-234 (in Chinese).
- [17] 沈露予,陆昌根,朱晓清.自由来流湍流与三维壁面局部粗糙诱导平板边界层不稳定 T-S 波的数值研究[J].应用数学和力学,2017,38(11):1208-1221.
SHEN Luyu, LU Changgen, ZHU Xiaoqing. Numerical study of unstable T-S waves excited by interaction between free-stream turbulence and 3D localized wall roughness in flat-plate boundary layer[J]. Applied mathematics and mechanics, 2017, 38(11):1208-1221 (in Chinese).
- [18] HE J Y, BUTLER A, WU X S. Effects of distributed roughness on crossflow instability through generalized resonance mechanisms[J]. Journal of fluid mechanics, 2019, 858:787-831.
- [19] CRAIK A D D. Non-linear resonant instability in boundary layers[J]. Journal of fluid mechanics, 1971, 50(2):393-413.
- [20] XU J K, WU X S. Surface-roughness effects on crossflow instability of swept-wing boundary layers through generalized resonances[J]. AIAA Journal, 2022, 60(5):2887-2904.
- [21] REIBERT M S, SARIC W S, CARRILLO R B Jr, et al. Experiments in nonlinear saturation of stationary crossflow vortices in a swept-wing boundary layer[C]//34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reston, VA, USA: AIAA, 1996: AIAA 1996-184.
- [22] XU J K, HAN X, QIAO L, et al. Fully local amplification factor transport equation for stationary crossflow instabilities[J]. AIAA journal, 2019, 57(7):2682-2693.
- [23] XU J K, LIU J X, ZHANG Z Y, et al. Spatial-temporal transformation for primary and secondary instabilities in weakly non-parallel shear flows[J]. Journal of fluid mechanics, 2023, 959:A21.
- [24] MACK L M. Boundary-layer linear stability theory [EB/OL]. (1984-06-01) [2024-08-19]. <https://ntrs.nasa.gov/citations/19840025688>.
- [25] GOLDSTEIN M E, DURBIN P A. The effect of finite turbulence spatial scale on the amplification of turbulence by a contracting stream[J]. Journal of fluid mechanics, 1980, 98(3):473-508.

(编辑 黄崇亚 李坤璐)