

基于等几何的板壳结构几何非线性拓扑优化

吴涛^{1,2,3}, 王禹^{1,2,3}, 张正阳^{1,2,3}, 郝鹏^{1,2,3}, 王博^{1,2,3}

(1. 大连理工大学工程力学系, 116024 大连; 2. 大连理工大学工业装备结构分析优化与 CAE 软件国家重点实验室, 116024 大连; 3. 辽宁省工业装备数字孪生重点实验室, 116024 大连)

摘 要:面向板壳结构的补强设计,提出了一种基于等几何分析的几何非线性拓扑优化方法。板壳结构的几何通过 NURBS 曲面表示,构建了基于退化实体壳单元纵向积分规则的分层模型(蒙皮和补强设计域)。补强设计域采用三场 SIMP 节点密度插值模型开展拓扑优化寻找最优构型,拓扑优化过程考虑板壳结构的几何非线性,建立了考虑大转动的样条退化壳单元格式并推导了全解析灵敏度。基于壳单元的分层模型相比于传统的实体单元模型大幅降低了模型规模,等几何分析实现了板壳结构拓扑优化与 CAD 系统的无缝集成。数值算例表明该方法能够在考虑几何非线性影响下获得板壳结构清晰的补强区域。同时,本研究讨论了小变形拓扑优化与几何非线性拓扑优化的差异,验证了板壳结构拓扑优化考虑几何非线性的必要性。

关键词:等几何分析;几何非线性;拓扑优化;板壳结构

中图分类号:V214. 19 文献标志码:A DOI:10. 11776/j. issn. 1000-4939. 2026. 01. 010

文章编号:1000- 4939(2026)01- 0110- 13 CSTR:32414. 14. cjam. issn. 1000-4939. 2026. 01. 010

Geometric nonlinear topology optimization of plate and shell structures based on isogeometric analysis

WU Tao^{1,2,3}, WANG Yu^{1,2,3}, ZHANG Zhengyang^{1,2,3}, HAO Peng^{1,2,3}, WANG Bo^{1,2,3}

(1. Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, 116024 Dalian, China; 2. State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, 116024 Dalian, China; 3. Liaoning Province Key Laboratory of Digital Twin for Industrial Equipment, 116024 Dalian, China)

Abstract: A geometric nonlinear topology optimization method based on isogeometric analysis is proposed for the reinforcement design of plate-shell structures. The geometry of the plate-shell structure is represented by NURBS surfaces, and a layered model (skin and reinforcement design domain) is constructed based on the longitudinal integral rules of the degenerate solid shell elements. In the design domain, a three-field SIMP node density interpolation model is used for topology optimization to find the optimal configuration. The geometric nonlinearity of plate-shell structure is considered in the topology optimization process, and the spline degenerate shell element scheme considering large rotation is established and the

收稿日期:2023-10-18

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 11772078)

通信作者:郝鹏,教授。E-mail:haopeng@dlut.edu.cn

引用格式:吴涛,王禹,张正阳,等,基于等几何的板壳结构几何非线性拓扑优化[J]. 应用力学学报,2026,43(1):110-122.

WU Tao, WANG Yu, ZHANG Zhengyang, et al. Geometric nonlinear topology optimization of plate and shell structures based on isogeometric analysis[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2026, 43(1):110-122.

full analytical sensitivity is derived. The hierarchical model based on shell element greatly reduces the model scale compared with the traditional solid element model, and the geometric analysis realizes the seamless integration between the topology optimization of shell structure and CAD system. Numerical examples show that the method can obtain the clear reinforcement region of the plate-shell structure under the consideration of geometric nonlinearity. At the same time, the differences between small deformation topology optimization and geometric nonlinear topology optimization are discussed, and the necessity of considering geometric nonlinearity in the topology optimization of plate and shell structures is verified.

Key words: isogeometric analysis; geometric nonlinearity; topology optimization; plate and shell structures

板壳结构广泛运用于航天航空等领域^[1],由于补强区域对板壳结构的性能有着重大的影响,学者们对补强区域的分布开展了大量的研究工作。常见的一种补强方式是板壳结构加筋,将加强筋的数目、间距、类型等作为设计变量并结合优化算法开展优化工作^[2-4]。然而,这种方法由于依赖初始构型而不能充分挖掘结构的性能。

为了充分利用材料,设计出更好的结构形式。学者们利用各类连续体拓扑优化方法探寻结构的最优构型^[5-6]。在板壳结构的补强设计研究中,部分学者采用实体单元模型对板壳结构的蒙皮与设计域进行离散,并施加挤压等约束,开展三维连续体设计域拓扑优化^[7-8],然而实体单元模型的使用会极大增加网格数目降低分析效率。一部分学者开始使用基于壳单元的分层模型,在特定层中添加或删除材料,比如LEE等^[9]与BELBLIDIA等^[10-11]使用可模拟多层结构的壳单元用于结构拓扑设计,大幅降低了模型规模,这为板壳结构的补强设计提供了一种新的思路。

固体各向同性材料惩罚(solid isotropic material with penalization, SIMP)方法^[12-14]以单元密度或节点密度构造人工材料,搭配惩罚因子驱动人工材料向实体或空洞靠近,是目前常用的一类拓扑优化方法。但是, SIMP 单元密度插值模型开展拓扑优化过程中,两种数值问题随之出现,一种是单元间密度连续性不能保证导致的棋盘格现象;另一种是拓扑结构随网格变化的网格依赖性问题。针对以上数值问题,灵敏度过滤^[15]或密度过滤^[16-17]是效果较好、使用较广的方法。SIMP 节点密度插值模型保证了单元密度的连续性,可有效限制棋盘格现象,受到了诸多学者的关注^[18-26]。虽然采用连续密度场的方式抑制了棋盘格现象,但是孤岛现象出现在使用节点密度作为设计变量的拓扑结构中。PAULINO等^[27]对单元节点与设计变量点进行 Q4/Q4M 安排,并采用内部平均策略来限制孤岛现象的产生。KANG等^[28]指出使用高阶单元能够有效限制孤岛现象的

产生,但高阶单元的形状方程无法适用于密度插值,提出了一种基于 Shepard 插值的节点设计变量拓扑优化方法。LAMBE等^[29]提出了一种将连续材料场与自适应网格细化相结合的拓扑优化方法,使用具有不同于分析和设计网格的连续材料场,使得拓扑结构不受棋盘格现象与孤岛现象等数值问题的影响。但无论是灵敏度过滤或者密度过滤,在最后的拓扑结构中仍然存在较多的中间密度,但中间密度是一种虚假的材料,学者们在灵敏度过滤与密度过滤之后增加投影技术^[20,30-31],减少中间密度的产生。

值得注意的是,基于小变形假设虽然能满足部分工程需求。然而,在实际工程中,结构变形往往是非线性的,特别是结构存在较大变形时,小变形假设无法得到结构的真实响应,导致无法获得合理的优化结果。在拓扑优化中考虑几何非线性的影响是非常重要的,而且几何非线性的影响随着载荷的增加而增加^[17,32-38]。低密度区域在线弹性拓扑问题中不会产生影响,而在考虑几何非线性的拓扑优化问题中会导致切线刚度矩阵奇异、分析收敛困难等数值问题。

基于有限元的分析,需要使用网格离散几何获得仿真模型再进行分析,由于复杂的壳体结构对几何特征敏感程度更高,从而导致网格数目以及计算成本剧增。基于 NURBS 的等几何分析技术(isogeometric analysis, IGA)由 HUGHES等^[39]提出,IGA 方法将 CAD 与 CAE 无缝连接,能有效解决标准 FEA 网格构造中成本高、耗时长、几何误差大的问题。并很快引入到拓扑优化中,SEO等^[40]基于 IGA 方法,使用修剪技术,将修剪样条曲线引入来形成新的边界。HASSANI等^[41]与 TAVAKKOLI等^[42]利用 NURBS 基函数方程将材料连续分布在设计域中,用控制点坐标构造密度场,同时作为拓扑问题的设计变量。GAO等^[43]提出一种基于等几何分析并使用增强密度分布函数的高效拓扑优化方法,利用 Shepard 函数提高节点密度的整体平滑度,以控制点密度作为设计变量,最终获得的拓扑结构具有光滑的边

界和明显的固体与空隙界面。

本研究通过 NURBS 曲面表示板壳结构的几何,构建基于壳单元的分层模型(蒙皮和补强设计域),考虑板壳结构的几何非线性,采用三场 SIMP 节点密度插值模型开展补强设计域拓扑优化寻找最优构型,讨论了小变形拓扑优化与几何非线性拓扑优化的差异,验证了板壳结构拓扑优化考虑几何非线性的必要性。

1 考虑几何非线性的等几何分析

1.1 基于 NURBS 的等几何分析

IGA 采用描述几何形状的形状函数作为基函数,实现了几何模型与分析模型的无缝集成,提高了分析效率。本节简要介绍基于 NURBS 的等几何分析。NURBS 基函数建立在 B 样条基函数的基础上。为了构造一组有序的 B 样条基函数,在参数空间中定义一个节点向量,是一维的一组坐标,即

$$\xi = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_{n+p+1}] \quad (1)$$

式中: ξ_i 是第 i 个节点; n 是基函数的数量; p 是基函数的次数。

$N_{i,p}(\xi)$ 表示 p 次 B 样条基函数,该定义根据 Cox-de Boor 递归公式给出

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad (2)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3)$$

式中, $i = 1, 2, \dots, n + p + 1$ 。

一个 p 次 NURBS 曲线定义为

$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i}, 0 \leq \xi \leq 1 \quad (4)$$

式中: P_i 是 NURBS 的控制点; w_i 是权重; $N_{i,p}(\xi)$ 由公式定义,除非另有说明,定义

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(\xi) w_j} \quad (5)$$

公式被重写为

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(\xi) P_i \quad (6)$$

对于 NURBS 曲面,在 B 样条基函数的基础上建

立了 NUBRS 基函数。NUBRS 基函数在描述几何图形时更加灵活。二元向量分段有理基函数表达式为

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m N_{k,p}(\xi) N_{l,q}(\eta) w_{k,l}} \quad (7)$$

式中: $N_{i,p}(\xi)$ 与 $N_{j,q}(\eta)$ 是 p 次与 q 次双变量 B 样条基函数; $w_{i,j}$ 是 $N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta)$ 对应的权重。 u 方向 p 次 v 方向 q 次 NURBS 曲面可写为

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) P_{i,j}, 0 \leq \xi, \eta \leq 1 \quad (8)$$

基于等参概念,在结构分析过程中将 NURBS 基函数作为单元基函数,位移函数表示为

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) u_{i,j}, 0 \leq \xi, \eta \leq 1 \quad (9)$$

1.2 考虑大转动的等几何退化壳单元

本研究中通过在退化壳单元的位移场引入转动自由度的非线性函数,从而克服壳单元在变形过程中小转角的限制。在这里仅对基于等几何分析的退化壳单元进行简单介绍。基于二次 NURBS 基函数设置的退化壳单元的坐标和位移,如图 1 所示。NURBS 基函数保证了壳单元中使用的几何信息的准确性。在退化壳单元中,高斯积分点和控制点的方向向量是最重要的几何信息。利用 NURBS 曲面的偏转,可以很容易地得到高斯积分点的精确方向向量。然而,控制点并不在表面上。因此,控制点需要通过 Greville abscissae^[44] 计算 NURBS 面上对应点,然后得到在对应点处的方向向量。高斯积分点可以直接得到精确的方向向量。

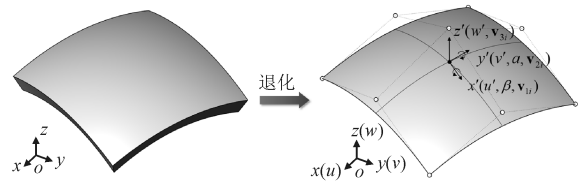


图1 基于2次 NURBS 曲面的退化壳单元

Tab. 1 Degenerate shell element based on 2-degree NURBS surface

壳单元中任意点的全局坐标可以表示为控制点坐标的插值形式。位置向量为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n R_i(\xi, \eta) \left(\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}_{\text{mid}} + \frac{t_i \xi}{2} \mathbf{v}_{3i} \right) \quad (10)$$

式中: $\mathbf{v}_{3i}$ 是 NURBS 曲面的单位法向量; n 是控制点数量。根据壳体理论的基本假设, 变形后中间曲面法线仍为一条直线, 忽略其长度的变化。因此, 单元上任一点的位移通过控制点的基于总体坐标系 (x, y, z) 的平动自由度 (u_i, v_i, w_i) 与基于局部坐标系 (x', y', z') 转动自由度 (α_i, β_i) 表示。位移向量为

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n R_i(\xi, \eta) \left(\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} + \frac{\zeta t_i}{2} [\mathbf{v}_{1i}, -\mathbf{v}_{2i}] \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} \right) \quad (11)$$

式中: $\mathbf{v}_{1i} = [l_{1i} \ m_{1i} \ n_{1i}]^T$ 与 $\mathbf{v}_{2i} = [l_{2i} \ m_{2i} \ n_{2i}]^T$ 是第 i 个控制点在单元上对应点的方向向量。 $\mathbf{v}_{1i}$ 与 $\mathbf{v}_{2i}$ 定义为

$$\begin{aligned} \text{if } \mathbf{i} \times \mathbf{v}_{3i} \neq 0, \mathbf{v}_{1i} &= \frac{\mathbf{i} \times \mathbf{v}_{3i}}{|\mathbf{i} \times \mathbf{v}_{3i}|}, \mathbf{v}_{2i} = \frac{\mathbf{v}_{3i} \times \mathbf{v}_{1i}}{|\mathbf{v}_{3i} \times \mathbf{v}_{1i}|}, \\ \text{if } \mathbf{i} \times \mathbf{v}_{3i} = 0, \mathbf{v}_{1i} &= \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{v}_{3i}}{|\mathbf{j} \times \mathbf{v}_{3i}|}, \mathbf{v}_{2i} = \frac{\mathbf{v}_{3i} \times \mathbf{v}_{1i}}{|\mathbf{v}_{3i} \times \mathbf{v}_{1i}|} \end{aligned} \quad (12)$$

式中, $\mathbf{i}$ 是 x 轴的单位向量。如果 $\mathbf{v}_{3i}$ 与 x 轴平行, 用沿 y 轴的单位向量 $\mathbf{j}$ 替换 $\mathbf{i}$ 。 $\mathbf{v}_{1i}$ 与 $\mathbf{v}_{2i}$ 垂直于 $\mathbf{v}_{3i}$ 且互相正交。单元中任意点的局部坐标系可通过公式进行精确计算, 计算公式为

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y'} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{if } \mathbf{i} \times \mathbf{v}_3 \neq 0, \mathbf{v}_1 &= \frac{\mathbf{i} \times \mathbf{v}_3}{|\mathbf{i} \times \mathbf{v}_3|}, \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1|}, \\ \text{if } \mathbf{i} \times \mathbf{v}_3 = 0, \mathbf{v}_1 &= \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{v}_3}{|\mathbf{j} \times \mathbf{v}_3|}, \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1|} \end{aligned} \quad (14)$$

局部坐标系方向矩阵可表示为

$$[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

在式(11)中定义的位移场要求小的转动, 为了克服该限制, 通过在位移场中使用适当的非线性函数来定义节点转动^[45], 位移场向量为

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n R_i(\xi, \eta) \left(\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} + \frac{\zeta t_i}{2} \mathbf{F}_i \right) \quad (16)$$

式中

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_i^A + \mathbf{F}_i^B) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i^A &= \sin \alpha_i \cos \beta_i \mathbf{v}_{1i} - \sin \beta_i \mathbf{v}_{2i} + (\cos \alpha_i \cos \beta_i - 1) \mathbf{v}_{3i}, \\ \mathbf{F}_i^B &= \sin \alpha_i \mathbf{v}_{1i} - \cos \alpha_i \sin \beta_i \mathbf{v}_{2i} + (\cos \alpha_i \cos \beta_i - 1) \mathbf{v}_{3i} \end{aligned} \quad (18)$$

对于几何非线性问题, 需要考虑格林应变的二次项, 格林应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_L + \boldsymbol{\varepsilon}_N \quad (19)$$

式中, $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}_N$ 分别对应格林应变的线性项与二次项。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_L &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_N \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

壳单元虚功方程为

$$\delta W = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}' d\Omega \quad (21)$$

式中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}' &= [\varepsilon_{x'x'}' \quad \varepsilon_{y'y'}' \quad \varepsilon_{z'z'}' \quad \varepsilon_{y'z'}' \quad \varepsilon_{x'z'}' \quad \varepsilon_{x'y'}']^T, \\ \boldsymbol{\sigma}' &= [\sigma_{x'x'}' \quad \sigma_{y'y'}' \quad \sigma_{z'z'}' \quad \sigma_{y'z'}' \quad \sigma_{x'z'}' \quad \sigma_{x'y'}']^T\end{aligned}\quad (22)$$

式中, $\boldsymbol{\varepsilon}'$ 与 $\boldsymbol{\sigma}'$ 为 (x', y', z') 坐标系的格林应变与 Piola Kirchhoff 应力。进一步假定材料线弹性, 局部坐标系下格林应变与 Piola Kirchhoff 应力有如下关系

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}' \quad (23)$$

根据壳理论, 忽略沿 z' 方向的应变 $\varepsilon_{z'}$ 与应力 $\sigma_{z'}$, 弹性矩阵 $\mathbf{D}$ 为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & 2l_2l_3 & 2l_1l_3 & 2l_1l_2 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & 2m_2m_3 & 2m_1m_3 & 2m_1m_2 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 & 2n_2n_3 & 2n_1n_3 & 2n_1n_2 \\ m_1n_1 & m_2n_2 & m_3n_3 & m_2n_3 + m_3n_2 & m_1n_3 + m_3n_1 & m_1n_2 + m_2n_1 \\ l_1n_1 & l_2n_2 & l_3n_3 & l_2n_3 + l_3n_2 & l_1n_3 + l_3n_1 & l_1n_2 + l_2n_1 \\ l_1m_1 & l_2m_2 & l_3m_3 & l_2m_3 + l_3m_2 & l_1m_3 + l_3m_1 & l_1m_2 + l_2m_1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

根据式(21)、式(23)、式(25), 壳单元虚功方程可改写为

$$\delta W = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (27)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{xz} \quad \varepsilon_{xy}]^T, \\ \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{xy}]^T\end{aligned}\quad (28)$$

整体坐标系下格林应变与 Piola Kirchhoff 应力有如下关系

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{D}}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (29)$$

式中

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^T \quad (30)$$

平衡方程可写为

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{D}} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (31)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (32)$$

式中: $\mathbf{F}$ 为外部力向量; $\mathbf{U}$ 为节点位移向量。

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} = -\mathbf{K}_T \quad (33)$$

在本研究中通过 Newton-Raphson 方法求解方程。

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-v}{2k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-v}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} \quad (24)$$

式中: $k = 1, 2$; E 与 v 为材料的弹性模量和泊松比。局部与整体坐标系下的格林应变的关系为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon}' \quad (25)$$

2 拓扑方案

2.1 拓扑问题描述

图 2 为拓扑优化设计的初始模型。假定相邻的层被完美结合在一起, 式中 Ω_d 为补强设计域, Ω_s 为蒙皮。在厚度方向上的补强设计域与蒙皮共用一个壳单元, 分别采取 2 个高斯点进行积分, gs 为高斯积分点。

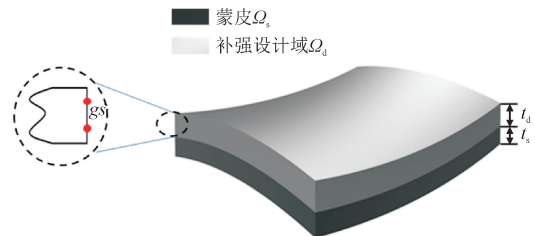


图 2 双层结构

Tab. 2 Two-layer structure

在本研究中, 采用三场 SIMP 节点密度插值模型对板壳结构开展补强设计, 结构使用拥有 N 个控制点的 2 次 NURBS 面片对结构进行建模。为了区分各变量值, 将 ρ_i 称为第 i 个控制点的设计密度, $\hat{\rho}_i$

为设计变量经过节点密度平滑之后第 i 个控制点密度, $\hat{\rho}_i$ 称为第 i 个控制点的物理密度。

拓扑问题数学表达为

$$\begin{aligned} \min_{\rho} &: f(\rho) \\ \text{subject to } & \mathbf{R} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{D}} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \mathbf{F} = 0 \\ & \int_{\Omega_d} \hat{\rho} d\Omega_d \leq v^* \\ & 0 \leq \rho_i \leq 1 (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (34)$$

式中: $f(\rho)$ 为结构柔顺度; $\mathbf{R}$ 为残余力向量; $\mathbf{B}$ 代表应变矩阵; Ω_d 为结构设计域; $\boldsymbol{\varepsilon}$ 代表应变向量, $\hat{\rho}$ 为设计域中物理密度场; v^* 为设计域体积上限, 本研究中将设计域剩余材料体积与设计域体积之比作为体分比; $\bar{\mathbf{D}}$ 为弹性矩阵。在分析阶段, 将 NURBS 分为 L 个区域块进行积分, 采用减缩积分方法, 共 M 个高斯点。第 m 个高斯积分点处的物理密度计算公式为

$$\hat{\rho}_m = \sum_{n=1}^N N_{m,n} \hat{\rho}_n \quad (35)$$

式中: N 为结构总控制点数量; $N_{m,n}$ 为第 n 个控制点基函数在第 m 个高斯点处的值。

为了寻找结构最优的补强区域, 构建了基于壳单元的分层模型(蒙皮和补强设计域), 如图 2 所示。蒙皮采用弹性模量 E , 补强设计域使用 SIMP 节点密度插值模型构造的人工材料, 设计域中第 m 个高斯点处弹性模量可表示为

$$\bar{E}_m = \hat{\rho}_m^p (E - E_0) + E_0 \quad (36)$$

式中: $\hat{\rho}_m$ 为第 m 个高斯点处物理密度; E 为实体材料的弹性模量; E_0 为空心单元的弹性模量, 在单层结构进行拓扑时取 $E_0 = 10^{-9}E$ 防止刚度阵奇异, 在双层结构拓扑优化中 $E_0 = 0$, $p \geq 1$ 为惩罚指数, 使得节点密度向 0 与 1 靠近, 通常情况下, 选定 $p \geq 3$ 维持不变。在这里采用连续惩罚指数的形式防止数值分析困难。

在设计域中引入人工材料后, 因为结构厚度方向只有一个单元, 因此对方程中积分项求解时, 对于壳单元处于补强设计域的高斯积分点, 需要将弹性矩阵中 E 替换为 $\bar{E}_m$, 处于蒙皮域的高斯积分点仍使

用 E 作为弹性模量, 构造的人工材料仅会影响到补强设计域。

2.2 平滑节点密度与投影技术

相对于单元密度为设计变量, 以节点密度为设计变量的 SIMP 方法保证了单元密度的连续性, 可有效限制棋盘格现象的产生, 但是孤岛现象出现在使用节点密度作为设计变量的拓扑结构中。本研究采用 Shepard 函数提高节点密度的整体平滑度^[43], 如图 3 所示。

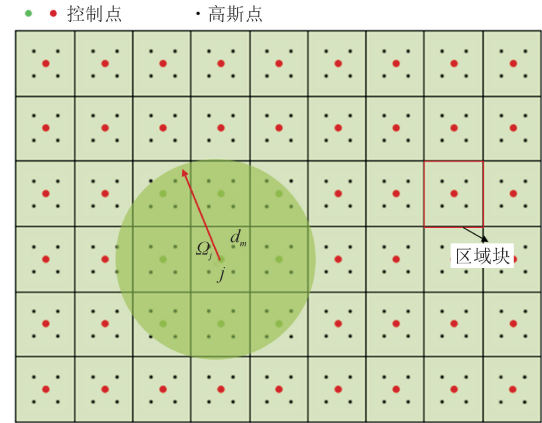


图3 平滑节点密度

Fig. 3 Smooth node density

第 i 个控制点的密度经过平滑之后密度计算公式为

$$\hat{\rho}_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^N w_{j,i}} \sum_{i=1}^N w_{j,i} \rho_i \quad (37)$$

式中: Ω_j 为离第 j 个控制点距离为 d_m 的区域; $w_{j,i}$ 为第 i 个控制点权重, 计算公式为

$$\begin{cases} w_{j,i} = (1 - r)^6 + (35r^2 + 18r + 3) & (d \leq d_m) \\ w_{j,i} = 0 & (d > d_m) \end{cases} \quad (38)$$

式中, $r = d/d_m$, d 为第 j 个控制点到第 i 控制点的欧拉距离。

通过节点密度平滑, 在得到的拓扑结构中仍然不可避免出现中间密度, 无法获得清晰的结构特征, XU 等^[30]提出一种基于 Heaviside 函数的保体积密度投影技术。随后 WANG 等^[31]提出替代公式, 提供了一种更快计算 0/1 投影的方法, 特别是对于向量化计算, 计算公式为

$$\hat{\rho}_n = \frac{\tanh(\beta\eta) + \tanh[\beta(\hat{\rho}_j - \eta)]}{\tanh(\beta\eta) + \tanh[\beta(1 - \eta)]} \quad (39)$$

在本研究中,惩罚指数达到设定的最大值且柔顺度改变量小于0.1%,增加 β 值减少拓扑结构中间密度,初始值为1,以2的倍数增加至32,式中 η 取0.5。

2.3 灵敏度公式

在本研究中,结构使用2次NURBS面片对结构进行离散,设计变量为节点密度 ρ_i ,寻求合适的向量 ρ 使得结构柔顺度 C 最小。结构柔顺度由下式求取

$$C = f(\rho) = \mathbf{F}^T \mathbf{U} \quad (40)$$

式中: $\mathbf{F}$ 为外力向量; $\mathbf{U}$ 为结构处于平衡状态的位移向量。

目标函数的灵敏度为

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_i} = \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_i} \quad (41)$$

使用伴随法求解位移向量的灵敏度。引入拉格朗日乘子向量 λ ,假设结构处于平衡状态, $\lambda^T \mathbf{R} = 0$,目标函数可表示为

$$f(\rho) = \mathbf{F}^T \mathbf{U} + \lambda^T \mathbf{R} \quad (42)$$

目标函数的灵敏度可改写为

$$\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho_i} = \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_i} + \lambda^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_i} + \lambda^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_i} \quad (43)$$

式中,残差向量 $\mathbf{R}$ 对位移向量 $\mathbf{U}$ 的偏分等于结构平衡状态时的切线刚度阵 $\mathbf{K}_T$ 。因为 $\mathbf{R} = 0$,拉格朗日乘子 λ 可以任意取值,为了消除位移矢量对设计变量的导数,可取拉格朗日乘子 λ ,使得

$$(\mathbf{F}^T + \lambda^T \mathbf{K}_T) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_i} = 0 \quad (44)$$

因此,目标函数对设计变量的灵敏度的计算公式为

$$\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho_i} = \lambda^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_i} \quad (45)$$

式中,拉格朗日乘子可通过下式求取。

$$\mathbf{K}_T \lambda = -\mathbf{F} \quad (46)$$

式中, $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_i}$ 采用链式法则进行计算。

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_i} = \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho_i} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{\rho}} \frac{\partial \hat{\rho}_G}{\partial \hat{\rho}} \frac{\partial f(\rho)}{\partial \hat{\rho}_G} \quad (47)$$

式中, $\hat{\rho}_G$ 为 M 个高斯点物理密度组成的向量。

$$\frac{\partial \hat{\rho}_G}{\partial \hat{\rho}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial \hat{\rho}_1} & \frac{\partial \hat{\rho}_2}{\partial \hat{\rho}_1} & \dots & \frac{\partial \hat{\rho}_M}{\partial \hat{\rho}_1} \\ \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial \hat{\rho}_2} & \frac{\partial \hat{\rho}_2}{\partial \hat{\rho}_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial \hat{\rho}_N} & & & \frac{\partial \hat{\rho}_M}{\partial \hat{\rho}_N} \end{bmatrix} \quad (48)$$

式中, $\frac{\partial \hat{\rho}_m}{\partial \hat{\rho}_n}$ 为第 m 个高斯点处物理密度对第 n 个控制点物理密度的偏导,值为第 n 个控制点对应基函数在第 m 个高斯点处的值 $N_{m,n}$ 。

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial \rho_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial \hat{\rho}_2}{\partial \rho_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{\partial \hat{\rho}_N}{\partial \rho_N} \end{bmatrix} \quad (49)$$

式中, $\frac{\partial \hat{\rho}_n}{\partial \hat{\rho}_j}$ 为第 n 个控制点物理密度对第 j 个控制点过滤后密度的偏导,计算公式为

$$\frac{\partial \hat{\rho}_n}{\partial \hat{\rho}_j} = \frac{\beta \{1 - \tanh^2[\beta(\hat{\rho}_n - \eta)]\}}{\tanh(\beta\eta) + \tanh[\beta(1 - \eta)]} \quad (50)$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial \rho_1} & \frac{\partial \hat{\rho}_2}{\partial \rho_1} & \dots & \frac{\partial \hat{\rho}_N}{\partial \rho_1} \\ \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial \rho_2} & \frac{\partial \hat{\rho}_2}{\partial \rho_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial \rho_N} & & & \frac{\partial \hat{\rho}_N}{\partial \rho_N} \end{bmatrix} \quad (51)$$

式中, $\frac{\partial \hat{\rho}_j}{\partial \rho_i}$ 为第 j 个控制点平滑后密度对第 i 个控制点设计密度的偏导,计算公式为

$$\frac{\partial \hat{\rho}_j}{\partial \rho_i} = \frac{w_{j,i}}{\sum_{i=1}^N w_{j,i}} \quad (52)$$

3 数值算例

3.1 悬臂梁

本节考虑悬臂梁(图4)的最小端部柔度的问题,其中高度 t 为0.25 m,长度 h 为1 m,厚度为0.1 m,弹性模量为3 GPa,泊松比为0.4,体分比为50%,集中力大小为144 kN,采用60×15个控制点的NURBS面离散结构。

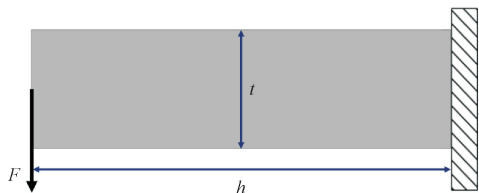


图4 端部受集中力的悬臂梁

Fig. 4 A cantilever beam with a concentrated force at its end

拓扑过程中惩罚因子每经过一次迭代步增加0.1,从1增加到3,拓扑结果如图5所示,与文献[32]中结果相符,结构变形图如图6所示,其中端部竖直向下。

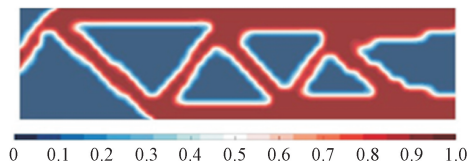


图5 悬臂梁几何非线性拓扑结果

Fig. 5 Geometric nonlinear topological results of cantilever beams

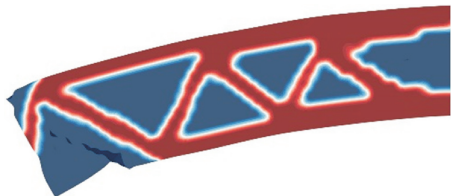


图6 结构变形示意图

Fig. 6 Structural deformation diagram

悬臂梁拓扑优化迭代曲线如图7所示,柔顺度为28 kJ,其中迭代曲线柔顺度的波动是因为投影技术的 β 值变化导致。通过216步迭代得到几乎没有中间密度存在的清晰结构,重建之后悬臂梁拓扑结构如图8所示。

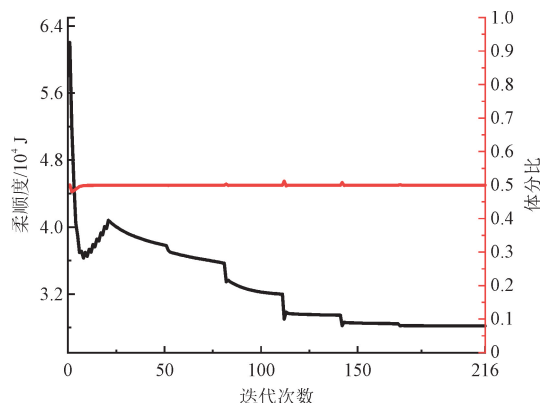


图7 悬臂梁拓扑优化迭代曲线

Fig. 7 Iterative curve of topology optimization for cantilever beam

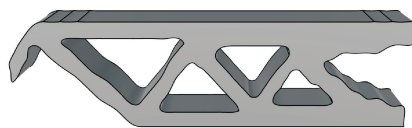


图8 重建的悬臂梁拓扑结构

Fig. 8 Reconstructed cantilever beam topology

3.2 板结构设计

本节对图9所示板结构开展拓扑优化,其中边长为6 m,厚度为0.3 m,补强设计域为 Ω_d ,用于形成补强结构, Ω_s 作为蒙皮,并且 $\frac{t_s}{t_d} = \frac{1}{3}$,体分比为40%。在本节中考虑了板结构在4种不同边界条件的拓扑优化,边界条件a、b、c、d设置如图10(a)~10(d)所示。

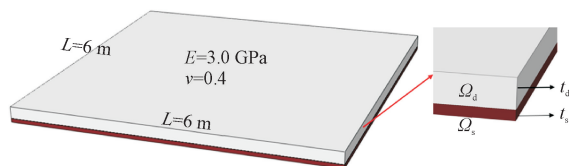
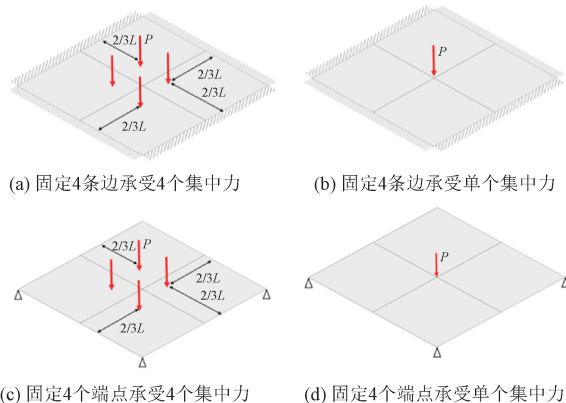


图9 板结构

Fig. 9 Plate structure



(a) 固定4条边承受4个集中力 (b) 固定4条边承受单个集中力

(c) 固定4个端点承受4个集中力 (d) 固定4个端点承受单个集中力

图10 边界条件

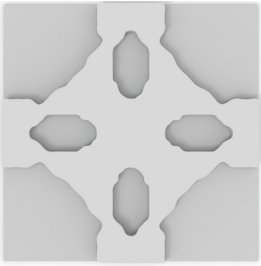
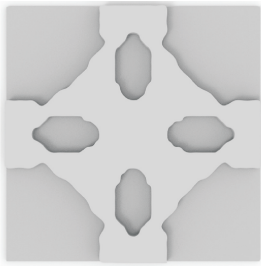
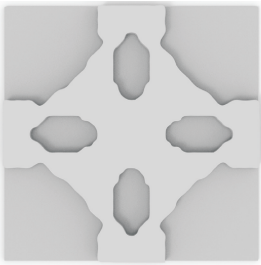
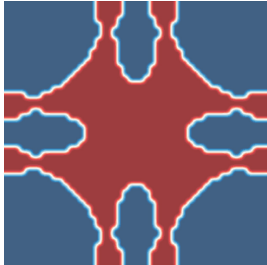
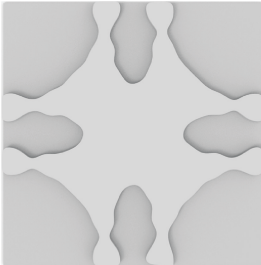
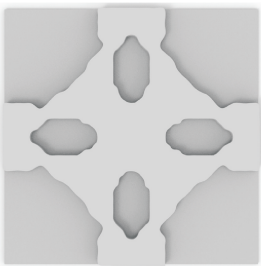
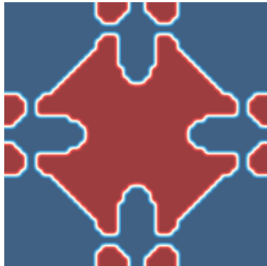
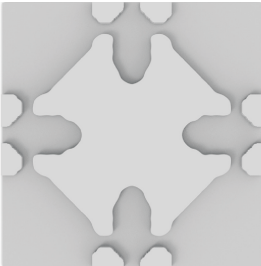
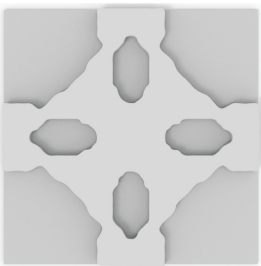
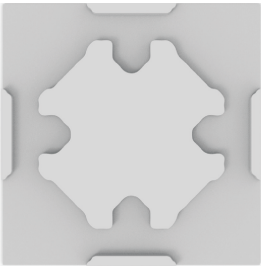
Fig. 10 Boundary condition

边界条件 a 情况下,结构四边固定,受 4 个集中力作用,在不同载荷下考虑几何非线性拓扑结果与基于小变形假设拓扑结果如表 1 所示。其中,载荷的增加并没有对基于小变形假设的拓扑结果产生影

响,但是考虑几何非线性的拓扑结果随着载荷增加逐渐变化,载荷较小时与基于小变形假设拓扑结果一致,但是随着载荷的增加,拓扑结果的差异逐渐变大。

表 1 边界条件 a 情况的拓扑优化结果

Tab. 1 Topology optimization results of boundary condition a

载荷 P/kN	基于小变形假设		考虑几何非线性影响	
	拓扑结构	重构结构	拓扑结构	重构结构
1 000				
3 000				
5 000				
10 000				

边界条件 a 情况下,拓扑结构柔顺度值如表 2 所示。随着载荷的增加,结构的柔顺度差异随之增加。基于小变形假设与考虑几何非线性拓扑迭代曲

线如表 3 所示,中间体分比的跳动是因为采用投影技术时 β 值的变化所引起。

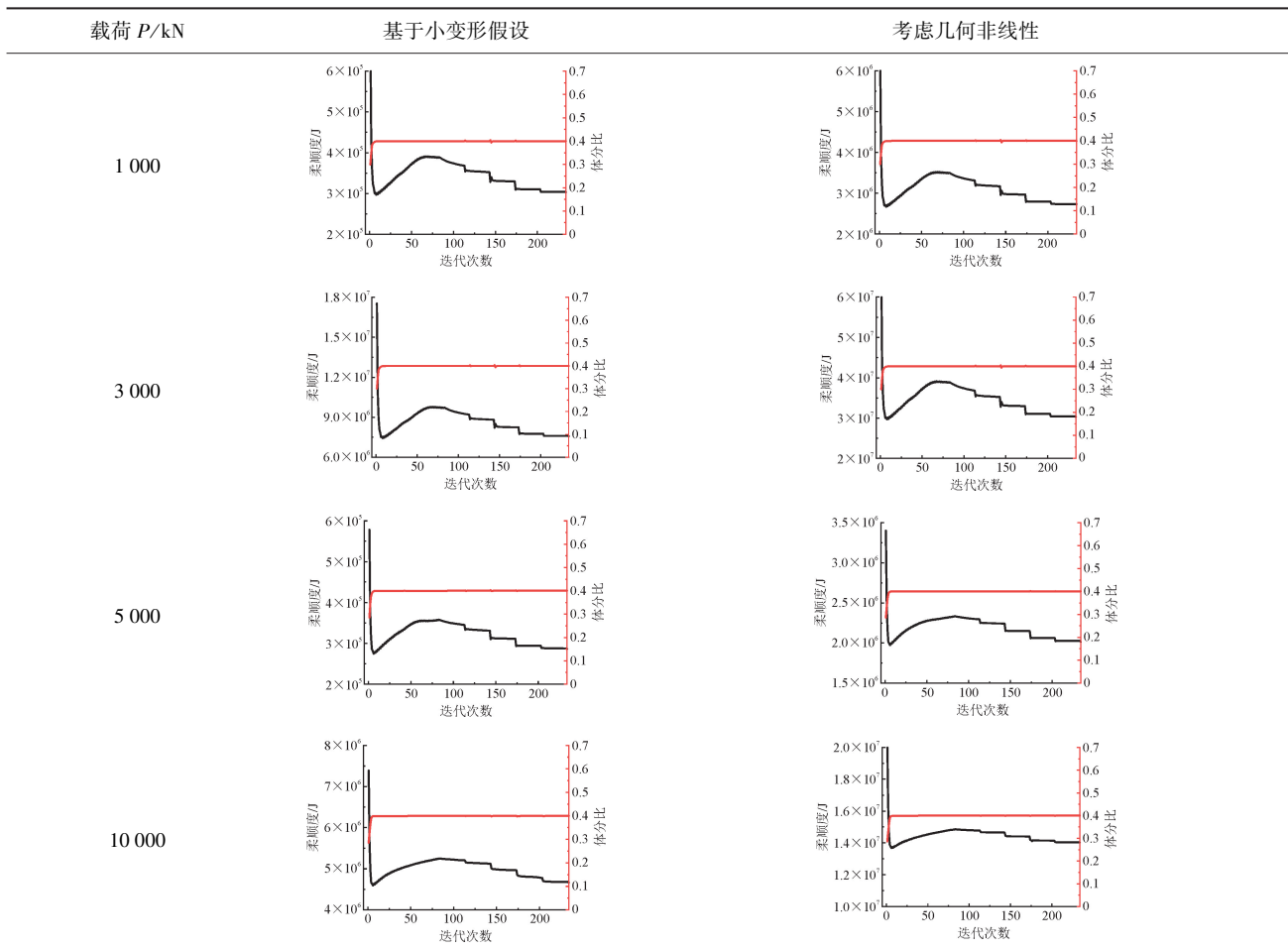
表 2 边界条件 a 情况下的拓扑结构的柔顺度

Tab. 2 Compliance of topological structure for boundary condition a

载荷 P/kN	考虑几何非线性拓扑 结构的柔顺度/ kJ	基于小变形假设拓扑 结构的柔顺度/ kJ	载荷 P/kN	考虑几何非线性拓扑 结构的柔顺度/ kJ	基于小变形假设拓扑 结构的柔顺度/ kJ
1 000	2.9×10^2	3.0×10^2	5 000	4.7×10^3	7.6×10^3
3 000	2.0×10^3	2.7×10^3	10 000	1.4×10^4	3.0×10^4

表3 边界条件a的迭代曲线

Tab.3 Iteration curve of boundary condition a



边界条件b、c、d在不同载荷下考虑几何非线性拓扑优化的结果如图11所示。

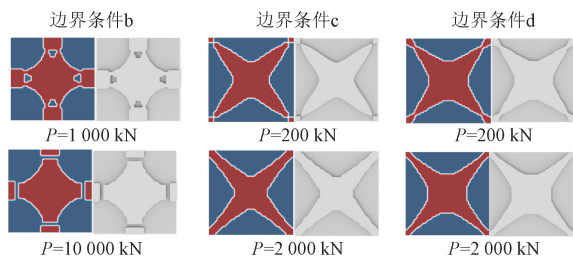


图11 边界条件b、c、d情况下几何非线性拓扑结果

Fig. 11 Geometric nonlinear topological results of boundary conditions b, c and d

在该算例中,蒙皮的存在为低密度壳单元提供了刚度,分析阶段不会出现矩阵奇异等数值问题。

3.3 壳结构设计

本节对如图12所示壳结构进行拓扑优化设计,

其中 $\frac{t_s}{t_d} = \frac{1}{3}$, 初始结构由二次 NURBS 曲面描述,结

点向量分别为 $\xi = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$, $\eta = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$, 控制点信息如表4所示,单位为m,控制点权重为1。厚度为0.1m,弹性模量为3GPa,泊松比为0.4,体分比为50%,结构的几何信息如表所示。采用60×60个控制点的NURBS面离散结构,4个端点固定。

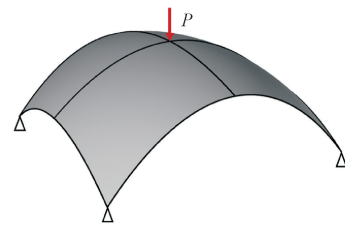


图12 四角固定受集中力的壳结构

Fig. 12 Shell structure with four fixed corners receiving concentrated forces

在不同载荷情况下考虑几何非线性的拓扑结果如图13所示,其中实线为拓扑结构承受载荷点处位移拟合的曲线,在图中展示了拓扑结果以及相对应

的重建结构。

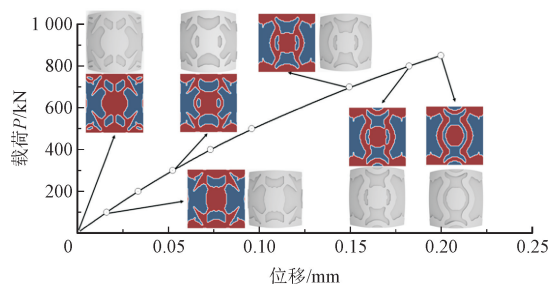


图 13 拓扑设计结果

Fig. 13 Topological design results

因为基于小变形假设拓扑结果不随载荷变动,仅展示载荷为 500 kN 拓扑结果,如图 14 所示,与结构小载荷情况下考虑几何非线性的拓扑结果相似。表 5 为不同载荷情况下结构几何非线性拓扑迭代曲线。

表 5 迭代曲线

Tab. 5 Iteration curve

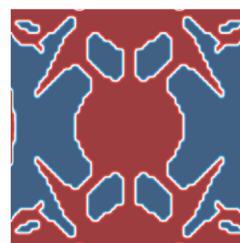
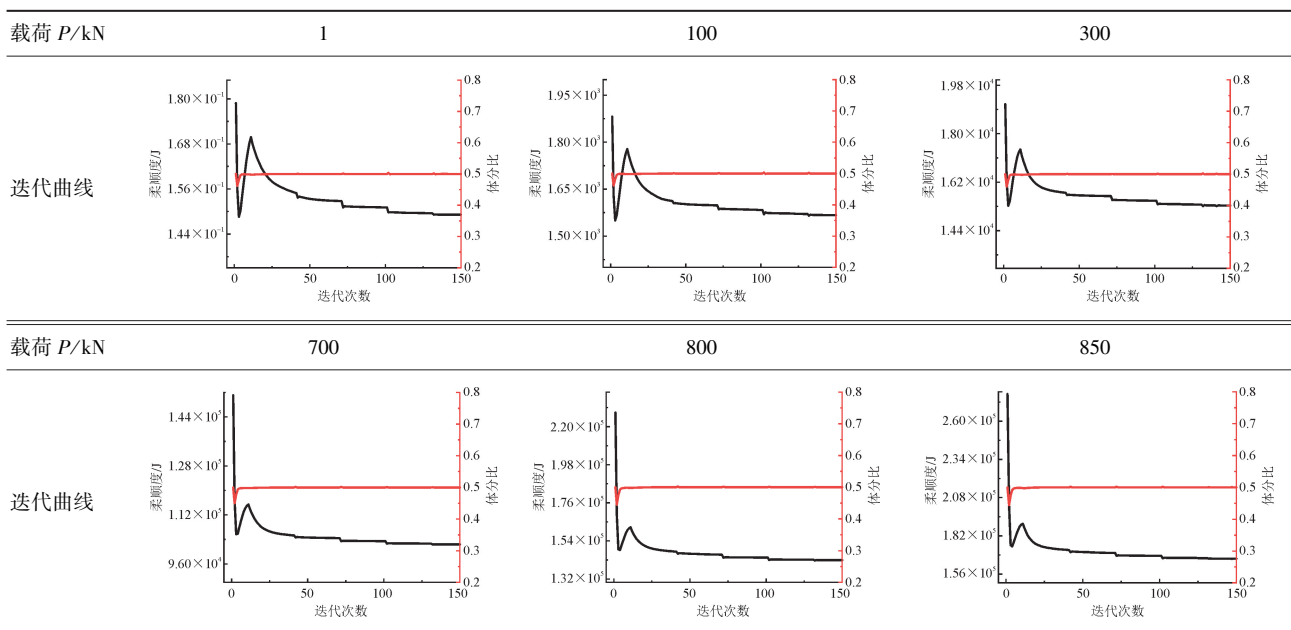


图 14 基于小变形假设的拓扑结果

Fig. 14 Topological results based on the small deformation hypothesis

表 4 曲面控制点信息

Tab. 4 Surface control point information

i	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$	$P_{i,3}$
1	(0,0,0)	(3,0,4)	(6,0,0)
2	(0,3,2)	(3,3,4)	(6,3,2)
3	(0,6,0)	(3,6,4)	(6,6,0)

图 15 示出了载荷分别为 500、850 kN 的几何非线性拓扑优化结构以及基于小变形假设拓扑结构的载荷位移曲线。基于小变形假设的结构受 850 kN 载荷时位移为 0.21 mm, 载荷为 500 kN 考虑几何非线性的拓扑结构受 850 kN 载荷时位移为 0.2 mm, 载荷为 850 kN 考虑几何非线性的拓扑结构受 850 kN 载荷时位移为 0.19 mm。从图中可以看出基于小变形假设的结构位移更大, 考虑几何非线性的拓扑结构不仅能够满足设计载荷, 并且相对于基于小变形假设拓扑, 承载能力有所提高。基于小变形假设拓扑结构不随载荷改变, 不能确定结构是否在承载能力范围内, 在某些情况下似乎是危险的。

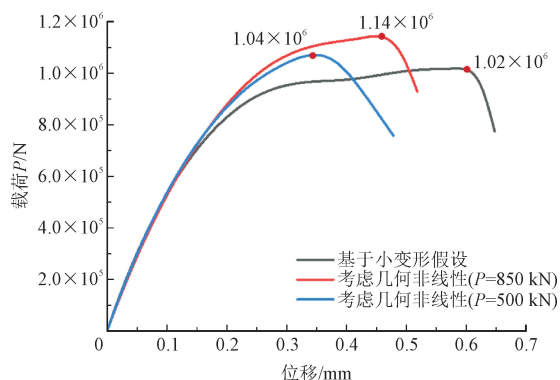


图 15 位移-载荷曲线

Fig. 15 Displacement-load curve

4 结束语

本研究提出一种基于等几何的板壳结构几何非线性拓扑优化方法,以 NURBS 面片建立板壳结构分析模型,构建了基于退化实体壳单元的分层模型(蒙皮和补强设计域),结合三场 SIMP 节点密度插值模型寻找板壳结构的最优补强结构,拓扑优化过程考虑板壳结构的几何非线性,建立了考虑大转动的退化壳单元格式并推导了全解析灵敏度。最后,将该方法运用于板壳结构的拓扑优化中,获得了清晰的补强区域,并讨论了考虑几何非线性拓扑优化与基于小变形假设拓扑优化的区别。一方面,基于小变形假设的拓扑结果与载荷无关,考虑几何非线性的拓扑结构随着载荷的增加与基于小变形假设的拓扑结构差异逐渐增大;另一方面,考虑几何非线性的拓扑优化不仅能够满足设计载荷,相对于基于小变形假设的拓扑优化结构,承载能力也有所增加。验证了在拓扑优化中考虑几何非线性的影响是必要的。

参考文献:

- [1] MAES V K, PAVLOV L, SIMONIAN S M. An efficient semi-automated optimisation approach for (grid-stiffened) composite structures; application to ariane 6 interstage [J]. *Composite structures*, 2019, 209: 1042-1049.
- [2] PUTRA G L, KITAMURA M, TAKEZAWA A. Structural optimization of stiffener layout for stiffened plate using hybrid GA [J]. *International journal of naval architecture and ocean engineering*, 2019, 11(2): 809-818.
- [3] KALLASSY A, MARCELIN J L. Optimization of stiffened plates by genetic search [J]. *Structural optimization*, 1997, 13(2): 134-141.
- [4] SINGH K, KAPANIA R K. Accelerated optimization of curvilinearly stiffened panels using deep learning [J]. *Thin-walled structures*, 2021, 161: 107418.
- [5] 解妙霞, 朱明辉, 姚飞龙, 等. 基于能量有限元的薄板结构多目标拓扑优化 [J]. *应用力学学报*, 2024, 41(6): 1327-1335.
XIE Miaoxia, ZHU Minghui, YAO Feilong, et al. Multi-objective topology optimization of thin-plates based on energy finite element analysis [J]. *Chinese journal of applied mechanics*, 2024, 41(6): 1327-1335 (in Chinese).
- [6] 张鹤志, 罗文亨, 冷建波, 等. 基于渐进结构优化的竹结构设计及静力试验研究 [J]. *应用力学学报*, 2024, 41(4): 778-785.
ZHANG Huzhi, LUO Wenheng, LENG Jianbo, et al. Investigation of design and static test for bamboo structure based on evolutionary structural optimization [J]. *Chinese journal of applied mechanics*, 2024, 41(4): 778-785 (in Chinese).
- [7] WARWICK B T, MECHEFSKE C K, KIM I Y. Topology optimization of a pre-stiffened aircraft bulkhead [J]. *Structural and multi-disciplinary optimization*, 2019, 60(4): 1667-1685.
- [8] ZHOU Y, TIAN K, XU S L, et al. Two-scale buckling topology optimization for grid-stiffened cylindrical shells [J]. *Thin-Walled structures*, 2020, 151: 106725.
- [9] LEE S J, BAE J E, HINTON E. Shell topology optimization using the layered artificial material model [J]. *International journal for numerical methods in engineering*, 2000, 47(4): 843-867.
- [10] BELBLIDIA F, LEE J E B, RECHAK S, et al. Topology optimization of plate structures using a single- or three-layered artificial material model [J]. *Advances in engineering software*, 2001, 32(2): 159-168.
- [11] BELBLIDIA F, BULMAN S. A hybrid topology optimization algorithm for static and vibrating shell structures [J]. *International journal for numerical methods in engineering*, 2002, 54(6): 835-852.
- [12] BENDSOE M P. Optimal shape design as a material distribution problem [J]. *Structural optimization*, 1989, 1(4): 193-202.
- [13] BENDSOE M P, SIGMUND O. Material interpolation schemes in topology optimization [J]. *Archive of applied mechanics*, 1999, 69(9): 635-654.
- [14] 焦洪宇, 周奇才, 李英. 基于 SIMP 材料插值模型的周期性结构拓扑优化 [J]. *应用力学学报*, 2014, 31(4): 578-581.
JIAO Hongyu, ZHOU Qicai, LI Ying. Optimal design of periodic structures using SIMP method [J]. *Chinese journal of applied mechanics*, 2014, 31(4): 578-581 (in Chinese).
- [15] SIGMUND O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization [J]. *Mechanics of structures and machines*, 1997, 25(4): 493-524.
- [16] BOURDIN B. Filters in topology optimization [J]. *International journal for numerical methods in engineering*, 2001, 50(9): 2143-2158.
- [17] BRUNS T E, TORTORELLI D A. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms [J]. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2001, 190(26/27): 3443-3459.
- [18] RAHMATALLA S, SWAN C C. Form finding of sparse structures with continuum topology optimization [J]. *Journal of structural engineering*, 2003, 129(12): 1707-1716.
- [19] CARBONARI R C, SILVA E C N, NISHIWAKI S. Topology optimization applied to the design of multiactuated piezoelectric micro-tools [C]// *Smart Structures and Materials 2004: Modeling, Signal Processing, and Control*. Bellingham, WA, USA: SPIE, 2004: 277-288.
- [20] GUEST J K, PRÉVOST J H, BELYTSCHKO T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions [J]. *International journal for numerical methods in engineering*, 2004, 61(2): 238-254.
- [21] MATSUI K, TERADA K. Continuous approximation of material distribution for topology optimization [J]. *International journal for numerical methods in engineering*, 2004, 59(14): 1925-1944.
- [22] RAHMATALLA S F, SWAN C C. A Q4/Q4 continuum structural

- topology optimization implementation[J]. Structural and multidisciplinary optimization, 2004, 27(1): 130-135.
- [23] GUEST J K. Topology optimization with multiple phase projection [J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2009, 199(1/2/3/4): 123-135.
- [24] GUEST J K, SMITH GENUT L C. Reducing dimensionality in topology optimization using adaptive design variable fields[J]. International journal for numerical methods in engineering, 2010, 81(8): 1019-1045.
- [25] DU Y X, YAN S Q, XIE H H, et al. Research of topology optimization of nodal density based on bilinear interpolation[J]. Applied mechanics and materials, 2015, 713: 1825-1829.
- [26] HE Q Z, KANG Z, WANG Y Q. A topology optimization method for geometrically nonlinear structures with meshless analysis and independent density field interpolation[J]. Computational mechanics, 2014, 54(3): 629-644.
- [27] PAULINO G H, LE C H. A modified Q4/Q4 element for topology optimization [J]. Structural and multidisciplinary optimization, 2009, 37(3): 255-264.
- [28] KANG Z, WANG Y Q. A nodal variable method of structural topology optimization based on Shepard interpolant [J]. International journal for numerical methods in engineering, 2012, 90(3): 329-342.
- [29] LAMBE A B, CZEKANSKI A. Topology optimization using a continuous density field and adaptive mesh refinement[J]. International journal for numerical methods in engineering, 2018, 113(3): 357-373.
- [30] XU S L, CAI Y W, CHENG G D. Volume preserving nonlinear density filter based on Heaviside functions[J]. Structural and multidisciplinary optimization, 2010, 41(4): 495-505.
- [31] WANG F W, LAZAROV B S, SIGMUND O. On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization [J]. Structural and multidisciplinary optimization, 2011, 43(6): 767-784.
- [32] BUHL T, PEDERSEN C B W, SIGMUND O. Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization [J]. Structural and multidisciplinary optimization, 2000, 19(2): 93-104.
- [33] KEMMLER R, LIPKA A, RAMM E. Large deformations and stability in topology optimization[J]. Structural and multidisciplinary optimization, 2005, 30(6): 459-476.
- [34] KANG Z, LUO Y J. Non-probabilistic reliability-based topology optimization of geometrically nonlinear structures using convex models [J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2009, 198(41/42/43/44): 3228-3238.
- [35] GEA H C, LUO J H. Topology optimization of structures with geometrical nonlinearities[J]. Computers & structures, 2001, 79(20/21): 1977-1985.
- [36] WALLIN M, IVARSSON N, TORTORELLI D. Stiffness optimization of non-linear elastic structures[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2018, 330: 292-307.
- [37] 文桂林, 刘杰, 陈梓杰, 等. 非线性连续体拓扑优化方法综述[J]. 力学学报, 2022, 54(10): 2659-2675.
- WEN Guilin, LIU Jie, CHEN Zijie, et al. A survey of nonlinear continuum topology optimization methods[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics, 2022, 54(10): 2659-2675.
- [38] JAHANGIRY H A, GHOLHAKI M, NADERPOUR H, et al. Isogeometric level set-based topology optimization for geometrically nonlinear plane stress problems [J]. Computer aided design, 2022, 151: 103358.
- [39] HUGHES T J R, COTTRELL J A, BAZILEVS Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2005, 194(39/40/41): 4135-4195.
- [40] SEO Y D, KIM H J, YOUN S K. Shape optimization and its extension to topological design based on isogeometric analysis[J]. International journal of solids and structures, 2010, 47(11/12): 1618-1640.
- [41] HASSANI B, KHANZADI M, TAVAKKOLI S M. An isogeometrical approach to structural topology optimization by optimality criteria [J]. Structural and multidisciplinary optimization, 2012, 45(2): 223-233.
- [42] TAVAKKOLI S M, HASSANI B, GHASEMNEJAD H. Isogeometric topology optimization of structures by using MMA[J]. International journal of optimization in civil engineering, 2013, 3(2): 313-326.
- [43] GAO J, GAO L, LUO Z, et al. Isogeometric topology optimization for continuum structures using density distribution function[J]. International journal for numerical methods in engineering, 2019, 119(10): 991-1017.
- [44] LI K, QIAN X P. Isogeometric analysis and shape optimization via boundary integral [J]. Computer aided design, 2011, 43(11): 1427-1437.
- [45] SURANA K S. Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements[J]. International journal for numerical methods in engineering, 1983, 19(4): 581-615.

(编辑 张璐)