研究论文|Research Article
数理基础科学|Mathematics and Physics

引用格式:王祥东, 倪振羽. 匹配与色临界图共存约束下的谱 Turán 问题研究 [J]. 海南大学学报(自然科学版中英文), 2026, 44(4): 451−457.

Citation: Wang Xiangdong, Ni Zhenyu. Research on spectral Turán problems under coexistence constraints of matching and color-critical graphs[J]. Natural Science of Hainan University, 2026, 44(4): 451−457.

Open Access

匹配与色临界图共存约束下的谱 Turán 问题研究

王祥东[1,2], 倪振羽[1,2] ✉

(1. 海南大学 数学与统计学院, 海南 海口 570228;
2. 海南省工程建模与统计计算重点实验室, 海南 海口 570228)

摘　要: 研究了同时禁止大小为$s+1$的匹配M_{s+1}和色数为$r+1$的色临界图F的谱 Turán 问题。通过引入图的覆盖数与独立覆盖数等组合参数, 建立了一个分析退化图族谱极值的理论框架。在此框架下, 证明了当s充分大时, n阶$\{M_{s+1}, F\}$-$free$图的最大谱半径由完全r部图$G(n,r,s)$达到, 且该极值图是唯一的。该结果不仅将 Alon 和 Frankl 关于边极值的结果推广到谱情形, 并完全刻画了匹配约束与色临界图约束共存条件下的谱极值结构。

关键词: 色临界图; 最大谱半径; Turán 问题; 极值图

中图分类号: O157.5　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1004-1729(2026)04-0451-07

DOI: 10.65658/j.hndk.2026010802　　CSTR: 32403.14.hndk.2026010802

Research on spectral Turán problems under coexistence constraints of matching and color-critical graphs

Wang Xiangdong[1,2], Ni Zhenyu[1,2] ✉

(1. School of Mathematic and Statistics, Hainan University, Haikou 570228, China;
2. Hainan Key Laboratory for Engineering Modeling and Statistical Calculation, Haikou 570228, China)

Abstract: This paper investigates the spectral Turán problem for graphs simultaneously excluding a matching M_{s+1} of size $s+1$ and a color-critical graph F with chromatic number $r+1$. By introducing combinatorial parameters such as the covering number and independent covering number of the graph, this paper develops a unified framework for analyzing spectral extremal problems of degenerate forbidden graph families. Based on this framework, it is proved that, for sufficiently large s, the maximum spectral radius of an n-vertex $\{M_{s+1}, F\}$-$free$ graph is attained by the complete r-partite graph $G(n,r,s)$, and this extremal graph is uniquely determined. This result not only extends the edge-extremal results of Alon and Frankl to the spectral setting, but also completely determines the spectral extremal structure under the coexistence constraints of matchings and color-critical graphs in this setting.

Keywords: chromatic critical graph; maximum spectral radius; Turán problem; extremal graph

Received: 2026−01−08; **Revised:** 2026−02−12; **Accepted:** 2026−02−15.

✉ **Corresponding author(s):** Ni Zhenyu, E-mail: 995264@hainanu.edu.cn.

0 引 言

谱 Turán 问题是极值图论与谱图论交叉领域的重要课题,旨在研究不含特定子图的图中谱半径的最大值及其极值图。谱 Turán 问题由 Nikiforov[1] 提出,成为经典 Turán 问题的自然推广。与边极值问题相比,谱 Turán 问题更能体现图的代数特征与结构约束之间的深刻联系,详见文献 [2–4]。

在谱 Turán 问题的研究中,退化图族(即包含二分图的图族)的情形尤为引人关注。由于此类问题的边极值仅为$O(n)$,其谱极值分析需要更为精细的工具和方法。近年来,关于匹配与其他图共存约束下的谱极值问题取得了一系列进展。例如,Wang 等[5] 确定了$spex(n,\{M_{s+1},K_{r+1}\})$的精确值;Jiang 等[6] 研究了$\{M_{s+1},F\}$在$F$为非二分图时的谱极值问题。

色临界图作为一类特殊图类,图中存在一条边使得删除此边后会导致图的色数减少,这使得相关极值问题往往有精确解。将色临界图引入禁止子图族,不仅丰富了谱 Turán 问题的结构内涵,也为探索谱极值问题的边界情形提供了理想对象。Alon 等[7] 通过研究$ex(n,\{M_{s+1},F\})$的边极值问题,完全确定了极值图的结构,但相应的谱极值问题尚未得到系统研究。

令$G(n,r,s)$是一顶点数为n的完全r部图,其中一个部集的顶点数为$n-s$,而剩下的$r-1$个部集构成一个s个顶点集合的均衡划分,其顶点数为$\left\lfloor\frac{s}{r-1}\right\rfloor$或$\left\lceil\frac{s}{r-1}\right\rceil$。对于图$F$,覆盖$C$是$V(F)$的子集,满足$F$的每条边至少有一个端点属于$C$。基于图的覆盖,可以定义辅助图集$\mathscr{M}(F)=\{F[C]\colon C\text{是}F\text{的覆盖}\}$。令$B(F)\vee I_{n-s}$表示一个图集合,此图集合中的每一个元素都是通过在完全二部图$K_{s,n-s}$的小顶点部集中嵌入一个顶点数为s的$\mathscr{M}(\mathscr{F})$-$free$且边数最大的图得到。

本研究旨在研究图族$\mathscr{F}=\{M_{s+1},F\}$的谱 Turán 问题,其中$F$为色临界图。通过引入覆盖数,建立了一个统一的谱极值分析框架,并在此框架下证明了当s充分大时,谱极值图与边极值图相同,均为$G(n,r,s)$。

下面给出本研究的主要定理。

定理 1 设F为色临界图,$\chi(F)=r+1\geqslant 3$。则对充分大的n,在n阶$\{M_{s+1},F\}$-$free$图中,谱半径最大的图属于集合$B(F)\vee I_{n-s}$,即

$$Ex_{sp}(n,\{M_{s+1},F\})\subset B(F)\vee I_{n-s}$$

进一步地,当s充分大时,谱半径最大的图是唯一的,且等于$G(n,r,s)$,即

$$Ex_{sp}(n,\{M_{s+1},F\})=\{G(n,r,s)\}$$

本研究首先利用 Perron 向量的性质,在$\{M_{s+1},F\}$谱极值图中建立顶点度与对应的向量分量之间的关系,然后通过对$\{M_{s+1},F\}$谱极值图稳定性的分析,给出了谱极值图的近似结果,最后利用禁用子图集合中色临界图F 的性质刻画了谱极值图的结构。

1 预备引理

设$G=(V,E)$为简单图。$|G|=|V|$为顶点数,$e(G)=|E|$为边数。K_n表示n阶完全图,M_{s+1}表示大小为$s+1$的匹配。图G的谱半径$\lambda(G)$为其邻接矩阵的最大特征值。给定图族$\mathscr{F}$,若G不包含任何$F\in\mathscr{F}$作为子图,则称G为$\mathscr{F}$-$free$。谱 Turán 数$spex(n,\mathscr{F})=\max\{\lambda(G)\colon |G|=n,G\text{是}\mathscr{F}\text{-}free\text{图}\}$。记$Ex_{sp}(n,\mathscr{F})$为达到最大谱半径的$\mathscr{F}$-$free$图集。

需要以下关于匹配和色临界图边极值的基本结果。

引理 1[7] 设F为色临界图,$\chi(F)=r+1\geqslant 3$。则对充分大的n和s,有

$$ex(n,\{M_{s+1},F\})=e(G(n,r,s))$$

其中,$G(n,r,s)$是完全r部图,其一部有$n-s$个顶点,其余$r-1$部的大小均为$\left\lfloor\frac{s}{r-1}\right\rfloor$或$\left\lceil\frac{s}{r-1}\right\rceil$。

引理 2[5] 设G是n阶$\{M_{s+1},K_{r+1}\}$-$free$图,则对充分大的n,$\lambda(G)\leqslant\lambda(G(n,r,s))$,等号成立当且仅当$G=G(n,r,s)$。

引理 3[8] 设G是一个具有n个顶点的图, 其独立数为$\alpha(G)=s$, 则有

$$\lambda(G)\geqslant\lambda(K_{s,n-s})=\sqrt{s(n-s)}$$

等号成立当且仅当G同构于完全二部图$K_{s,n-s}$。

谱分析中常用到以下关于特征向量的技术性引理。对于图G, 称其邻接矩阵对应于最大特征值的特征向量为图G的 Perron 向量。

引理 4[9] 设G是连通图, $\boldsymbol{x}$是其 Perron 向量。若顶点u,v满足$x_u\geqslant x_v$, 且存在顶点集$\{v_i|1\leqslant i\leqslant s\}\subseteq N_G(v)\backslash(N_G(u)\cup\{u\})$, 令$G'=G-\{vv_i|1\leqslant i\leqslant s\}+\{uv_i|1\leqslant i\leqslant s\}$, 则$\lambda(G')>\lambda(G)$。

在处理匹配约束时, 以下关于边数与匹配数、最大度之间关系的结果非常有用。

引理 5[10] 对于任意的图G, 有$e(G)\leqslant\nu(G)(\Delta(G)+1)$, 其中$\nu(G)$为匹配数, $\Delta(G)$为最大度。

根据引理 5 可以得到本研究中关于谱极值图边数的一个上界: 由于任意n个顶点的图G均有$\Delta(G)+1\leqslant n$成立, 则当图G的匹配数$\nu(G)=s$(即M_{s+1}-$free$)时有$e(G)\leqslant sn$成立。

2 主要引理及其证明

本研究主要讨论如下谱极值问题: 设F为色临界图, $\chi(F)=r+1\geqslant 3$, s充分大, 求n阶$\{M_{s+1},F\}$-$free$图的最大谱半径及其极值图。

为证明定理 1, 需要建立一系列关于谱极值图结构特征的断言。设G是n阶$\{M_{s+1},F\}$-$free$图, 令$\lambda(G)=\lambda$, 且$\lambda(G)$达到最大。令$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$为对应$\lambda(G)$的 Perron 向量, 满足$\max\boldsymbol{x}_i=1$, 记$\boldsymbol{x}_{u^*}=1$。

引理 6 对于某个正实数$\mathrm{c}>0$, 令$S(\mathrm{c})=\{v\in V(G)|x_v\geqslant\mathrm{c}\}$, 则$|S(\mathrm{c})|\leqslant D(\mathrm{c})\sqrt{n}$, 其中$D(\mathrm{c})$为仅依赖于c和$s$的数。

证明 对任意$u\in S$, 有$\lambda x_u\leqslant d(u)$。由于$\lambda\geqslant\lambda(K_{s,n-s})=\sqrt{s(n-s)}$, 根据引理 1 可得

$$2sn\geqslant 2e(G)\geqslant\sum_{u\in S(c)}d(u)\geqslant|S(\mathrm{c})|\mathrm{c}\sqrt{s(n-s)}$$

其中, c为常数。

因此$|S(\mathrm{c})|\leqslant D(\mathrm{c})\sqrt{n}$, 其中$D(\mathrm{c})=\dfrac{2\sqrt{s+1}}{\mathrm{c}}$。

证毕。

以下引理基于$S(\mathrm{c})$的定义讨论了 Perron 向量分量与顶点度之间的内在联系。

引理 7 对任意顶点$u\in V(G)$, 有

$$d_G(u)\geqslant\frac{sx_u-3\mathrm{c}s}{x_u+s}n-\frac{s^2x_u}{x_u+s}$$

证明 对于整数$i=1,2$, 令$N_i(u)=\{w:\ d(w,u)=i\}$表示与顶点u距离为i的顶点集合, 显然$N_1(u)=N(u)$, 则任意顶点$v\in N(u)$均有$N(v)\subset N_1(u)\cup N_2(u)\cup\{u\}$。

根据$S(\mathrm{c})$和$N_1(u)$可以划分为 2 个集合S_1和T_1的不交并, 其中$S_1=N_1(u)\cap S(\mathrm{c})$且$T_1=N_1(u)\backslash S(\mathrm{c})$。同理$N_2(u)=S_2\cup T_2$, 其中$S_2=N_2(u)\cap S(\mathrm{c})$且$T_2=N_2(u)\backslash S(\mathrm{c})$。

从等式

$$\lambda^2x_u=d(u)x_u+\sum_{v\in N(u)}\sum_{w\in N(v)\backslash\{u\}}x_w$$

出发。结合$N_1(u)$的划分可得不等式:

$$\sum_{v\in S_1}\sum_{w\in N(v)\backslash\{u\}}x_w\leqslant\sum_{v\in S_1}\left(\sum_{w\in N(v)\cap(S_1\cup S_2)}1+\sum_{w\in N(v)\cap(T_1\cup T_2)}\mathrm{c}\right)$$

因此,

$$\sum_{v\in S_1}\sum_{w\in N(v)\setminus\{u\}} x_w \leqslant 2e(S_1)+e(S_1,S_2)+e(S_1,T_1\cup T_2)\mathrm{c}$$

同理,有

$$\sum_{v\in T_1}\sum_{w\in N(v)\setminus\{u\}} x_w \leqslant 2e(T_1)\mathrm{c}+e(T_1,T_2)\mathrm{c}+e(T_1,S_1\cup S_2)$$

注意到,根据顶点划分有2个不等式成立:

$$2e(S_1)+e(S_1,S_2)+e(T_1,S_1\cup S_2)\leqslant e(S(\mathrm{c}))+e(G[N(u)\cup S(\mathrm{c})])$$

以及

$$2e(T_1)+e(T_1,T_2)+e(S_1,T_1\cup T_2)\leqslant 2e(G)$$

因此,根据引理1,可知当n充分大时有

$$\lambda^2 x_u \leqslant d_G(u)x_u+2\mathrm{c}sn+sd_G(u)+2sD(\mathrm{c})\sqrt{n}\leqslant d_G(u)(x_u+s)+3\mathrm{c}sn \tag{1}$$

从而由$\lambda\geqslant\lambda(K_{s,n-s})=\sqrt{s(n-s)}$引理7得证。

证毕。

在下面的证明中,为了简化计算通常要求c是充分小的正常数而n是足够大的正整数。令$L=S(\mathrm{c}^{\frac{1}{2}})\subset S(\mathrm{c})$。基于引理7,可以进一步分析高分量顶点的性质。

引理8 对任意顶点$u\in L$,有

$$d_G(u)\geqslant\frac{sx_u-3\mathrm{c}s}{x_u+s-1}n-\frac{s^2x_u}{x_u+s-1}$$

证明 类似于引理7中的讨论,对于整数$i=1,2$,令$N_i(u)$表示与顶点u距离为i的顶点集合。同样的,记$N_1(u)=S_1\cup T_1$和$N_2(u)=S_2\cup T_2$,其中对于$i=1,2$有$S_i=N_i(u)\cap S(\mathrm{c})$,$T_i=N_i(u)\setminus S(\mathrm{c})$。同样的,有以下3个不等式成立:

$$\lambda^2x_u\leqslant d_G(u)x_u+A+B\mathrm{c}$$

其中,

$$A=2e(S_1)+e(S_1,S_2)+e(T_1,S_1\cup S_2)\leqslant 2e(L)+e(T_1,S_1\cup S_2)$$

且

$$B=2e(T_1)+e(T_1,T_2)+e(S_1,T_1\cup T_2)\leqslant 2e(G)$$

为了估计B的大小,首先证明T_1中至多有$s-1$个顶点v满足$e(v,S_1\cup S_2)\geqslant s$。实际上,应用反证法假设$T_1$中有$s$个具有这样性质的顶点$v$,则可以在$G[T_1\cup S_1\cup S_2]$中找到一个$s$匹配$M_s$。另一方面,根据引理7,c足够小和$n$足够大的条件可知,

$$d_G(u)\geqslant\frac{\mathrm{c}^{\frac{1}{2}}s-3\mathrm{c}s}{\mathrm{c}^{\frac{1}{2}}+s}n-\frac{\mathrm{c}^{\frac{1}{2}}s^2}{\mathrm{c}^{\frac{1}{2}}+s}>\frac{1}{2}\mathrm{c}^{\frac{1}{2}}n>2s$$

显然,可以找到一个不包含在M_s中的顶点与u相邻,即在G中找到一个$s+1$匹配。这与G是$\{M_{s+1},F\}$-$free$的假设相矛盾。

因此,有不等式

$$e(T_1,S_1\cup S_2)\leqslant(|T_1|-(s-1))(s-1)+(s-1)|S_1\cup S_2|\leqslant d_G(u)(s-1)+s|L|$$

成立。又因为$L\subset S$,综上所述根据引理7有

$$\lambda^2x_u\leqslant d_G(u)x_u+2\mathrm{c}sn+(s-1)d_G(u)+3D(\mathrm{c})s\sqrt{n}\leqslant(s-1+x_u)d_G(u)+3\mathrm{c}sn \tag{2}$$

成立。由$\lambda\geqslant\lambda(K_{s,n-s})=\sqrt{s(n-s)}$得到顶点$d_G(u)$的度下界,从而引理8得证。

证毕。

注意到$x_{u^*}=1>\mathrm{c}^{\frac{1}{2}}$, 因此, $u^*\in L$。下面证明集合L中顶点的分量都接近于 1。

引理 9　对任意$u\in L$, 有$x_u\geqslant 1-\mathrm{c}^{\frac{1}{4}}$。

证明　应用反证法。假设存在达到$u\in L$使得$x_u<1-\mathrm{c}^{\frac{1}{4}}$。因为$u^*\in L$, 对于整数$i=1,2$, 令$N_i(u^*)$表示与顶点$u$距离为$i$的顶点集合。令$N_1(u^*)=S_1\cup T_1$和$N_2(u^*)=S_2\cup T_2$, 其中对于$i=1,2$有$S_i=N_i(u^*)\cap L$, $T_i=N_i(u^*)\backslash L$。显然, $T_2\subset V(G)\backslash N(u^*)$且$V(G)=T_1\cup L\cup(V(G)\backslash N(u^*))$。因此$d_G(u)\leqslant e(u,T_1)+e(u,L)+e(u,V(G)\backslash N(u^*))$。又根据引理 8 进行简单计算可知, $d_G(u)\geqslant\frac{1}{2}\mathrm{c}^{\frac{1}{2}}n$且$d_G(u^*)\geqslant(1-4\mathrm{c})n$。故有

$$e(u,T_1)\geqslant\left(\frac{1}{2}\mathrm{c}^{\frac{1}{2}}-4\mathrm{c}\right)n-|L|>\frac{1}{4}\mathrm{c}^{\frac{1}{2}}n$$

为了估计$e(u,T_1)$的上界, 再次应用引理 7 类似的讨论, 研究等式

$$\lambda^2x_{u^*}=d(u)x_{u^*}+\sum_{v\in N(u)}\sum_{w\in N(v)\backslash\{u\}}x_w$$

的性质。基于$x_u<1-\mathrm{c}^{\frac{1}{4}}$的假设, 有不等式

$$\sum_{v\in T_1}\sum_{w\in N(v)\backslash\{u^*\}}x_w\leqslant\sum_{v\in T_1}\left(\sum_{w\in(N(v)\cap(S_1\cup S_2))\backslash\{u\}}1+\sum_{w\in N(v)\cap(T_1\cup T_2)}\mathrm{c}\right)+e(u,T_1)\left(1-\mathrm{c}^{\frac{1}{4}}\right)$$

成立。因此,

$$\sum_{v\in T_1}\sum_{w\in N(v)\backslash\{u^*\}}x_w\leqslant 2e(T_1)\mathrm{c}+e(T_1,T_2)\mathrm{c}+e(T_1,S_1\cup S_2)-\mathrm{c}^{\frac{1}{4}}e(u,T_1)$$

另一方面仍然有

$$\sum_{v\in S_1}\sum_{w\in N(v)\backslash\{u^*\}}x_w\leqslant 2e(S_1)+e(S_1,S_2)+e(S_1,T_1\cup T_2)\mathrm{c}$$

成立。类似于引理 8 的计算可知,

$$\lambda^2=\lambda^2x_{u^*}\leqslant(s-1+x_{u^*})d_G(u^*)+3s\mathrm{c}n-\mathrm{c}^{\frac{1}{4}}e(u,T_1)\tag{3}$$

由于$\lambda\geqslant\lambda(K_{s,n-s})=\sqrt{s(n-s)}$, 经过简单的放缩可知

$$e(S_1,T_1\cup T_2)\leqslant\mathrm{c}^{-\frac{1}{4}}(sn+4\mathrm{c}sn-s(n-s))<4\mathrm{c}^{\frac{3}{4}}n<\frac{1}{4}\mathrm{c}^{\frac{1}{2}}n$$

成立。这与前面推导关于$e(u,T_1)$下界的结论是矛盾的, 从而引理 9 得证。

证毕。

引理 10　$|L|=s$且$e(G[R])=0$, 其中$R=V(G)\backslash L$。

证明　首先, 证明$|L|\geqslant s$。再次分析$\lambda^2x_{u^*}=d(u^*)x_{u^*}+\sum_{v\in N(u^*)}\sum_{w\in N(v)\backslash\{u^*\}}x_w$的性质, 令$N_1(u^*)=P_1\cup Q_1$和$N_2(u^*)=P_2\cup Q_2$, 其中对于$i=1,2$有$P_i=N_i(u^*)\cap L$, $Q_i=N_i(u^*)\backslash L$, 则有以下 3 个不等式成立:

$$\lambda^2x_{u^*}\leqslant d_G(u^*)x_{u^*}+A+B\mathrm{c}^{\frac{1}{2}}$$

其中,

$$A=2e(P_1)+e(P_1,P_2)+e(Q_1,P_1\cup P_2)\leqslant 2e(L)+e(Q_1,P_1\cup P_2)$$

$$B=2e(Q_1)+e(Q_1,T_2)+e(P_1,Q_1\cup Q_2)\leqslant 2e(G)$$

所以根据$\lambda\geqslant\lambda(K_{s,n-s})=\sqrt{s(n-s)}$和引理 6 可得

$$s(n-s)\leqslant d_G(u^*)+e(Q_1,P_1\cup P_2)+2e(L)+2e(G)\mathrm{c}^{\frac{1}{2}}\leqslant e(V(G)\backslash L,L)+2\mathrm{c}sn+(2s+1)|S(\mathrm{c})|\leqslant(n-|L|)|L|+3\mathrm{c}sn$$

所以$|L|\geqslant s$。

开始证明$|L|\leqslant s$。应用反证法,假设$|L|\geqslant s+1$。则根据引理8和引理9可知对于$\forall u\in L$有$d_G(u)>(1-\frac{1}{2}c^{\frac{1}{4}})n>2s$成立。显然,此时可以在$G$中通过贪婪算法找到$M_{s+1}$,与$G$是$\{M_{s+1},F\}$-$free$矛盾。同理可知,当$|L|=s$时,$e(G[R])=0$。

综上所述,$|L|=s$且$e(G[R])=0$,引理10得证。

证毕。

3 定理1的证明

定理1 设F为色临界图,$\chi(F)=r+1\geqslant 3$。则对充分大的n,在n阶$\{M_{s+1},F\}$-$free$图中,谱半径最大的图属于集合$B(F)\vee I_{n-s}$,即

$$Ex_{sp}(n,\{M_{s+1},F\})\subset B(F)\vee I_{n-s}$$

进一步地,当s充分大时,谱半径最大的图是唯一的,且等于$G(n,r,s)$,即

$$Ex_{sp}(n,\{M_{s+1},F\})=\{G(n,r,s)\}$$

证明 根据引理10,可以得到谱极值图G具有如下结构:存在顶点集$L(|L|=s)$和$R(|R|=n-s)$,使得L中顶点度接近n,$G[R]$是空图且L与R之间几乎全连通。因此,为了完成证明只需验证$G[L]$是$\mathscr{M}(F)$-$free$。实际上,若存在$H\in\mathscr{M}(F)$是$G[L]$的子图,则根据引理8和引理9可知

$$\left|\left(\bigcap_{u\in V(H)}N_G(u)\right)\backslash L\right|\leqslant|V(H)|\left(1-\frac{1}{2}c^{\frac{1}{4}}\right)n-(|V(H)|-1)n-|L|\leqslant\left(1-|V(H)|\frac{1}{2}c^{\frac{1}{4}}\right)n-s\leqslant|V(F)|$$

成立。这意味着,根据$\mathscr{M}(F)$的定义可以在图G中找到一个同构于F的图,矛盾。因此,G属于$B(F)\vee I_{n-s}$。

进一步地,由于F是色数为$r+1$的染色临界图,在$\mathscr{M}(F)$中一定存在一个色数为r的染色临界图H。根据Erdös等[11]的结论,当s充分大时,$G[L]$同构于$T_{r-1}(s)$。因此,G恰好是$T_{r-1}(s)\vee I_{n-s}$,即$G(n,r,s)$。

证毕。

4 结 论

本研究讨论了同时禁止匹配M_{s+1}和色临界图F的谱Turán问题。通过引入覆盖的概念,并运用谱分析方法,证明了当s充分大时,谱极值图与边极值图相同,均为完全r部图$G(n,r,s)$。这一结果不仅将Alon和Frankl关于边极值的结果推广到谱情形,而且也深化了对匹配与色临界图共存约束下图谱性质的理解。

参考文献:

[1] Nikiforov V. The spectral radius of graphs without paths and cycles of specified length[J]. Linear Algebra and its Applications, 2010, 432(9): 2243−2256.

[2] Cioabă S, Desai D N, Tait M. A spectral Erdős-Sós theorem[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2023, 37(3): 2228−2239.

[3] Fang L F, Tait M, Zhai M Q. Decomposition family and spectral extremal problems on non-bipartite graphs[J]. Discrete Mathematics, 2025, 348(10): 114527.

[4] Wang J, Kang L Y, Xue Y S. On a conjecture of spectral extremal problems[J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 2023, 159: 20−41.

[5] Wang H Y, Hou X M, Ma Y. Spectral extrema of graphs with bounded clique number and matching number[J]. Linear Algebra and its Applications, 2023, 669: 125−135.

[6] Jiang S X, Yuan X Y, Zhai Y N. Some stability results for spectral extremal problems of graphs with bounded matching number[J]. Linear Algebra and its Applications, 2025, 708: 513−524.

[7] Alon N, Frankl P. Turán graphs with bounded matching number[J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 2024, 165: 223−229.
[8] Hong Y. Bounds of eigenvalues of graphs[J]. Discrete Mathematics, 1993, 123(1/2/3): 65−74.
[9] Wu B F, Xiao E L, Hong Y. The spectral radius of trees on k pendant vertices[J]. Linear Algebra and its Applications, 2005, 395: 343−349.
[10] Chvátal V, Hanson D. Degrees and matchings[J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1976, 20(2): 128−138.
[11] Erdős P, Simonovits M. A limit theorem in graph theory[J]. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 1966, 1: 51−57.

作者贡献声明

王祥东提出研究问题、设计研究方案、确定理论框架，撰写初稿、修订内容、润色语言等。倪振羽提供学术指导、把握方向，对论文内容提出关键修改意见、逻辑调整，并提供经费支持。

利益冲突声明

作者声明，其不存在已知的可能影响本论文所报告工作的竞争性经济利益或个人关系。

AI 使用声明

本文未使用人工智能(AI)协助撰写。

伦理声明

不适用: 本文不涉及人类或动物的生物学研究。

电子补充材料

补充材料可在本文的在线版本中获取 https://doi.org/10.65658/j.hndk.2026010802。

数据可用性

不适用。

致谢/Acknowledgements

本文得到海南省自然科学基金项目(122QN218)支持。

This work was supported by the Hainan Provincial Natural Science Foundation Project (122QN218).

作者简介

王祥东(1999—)，男，湖北咸宁人，海南大学 2023 级数学专业硕士研究生。E-mail: 641380278@qq.com。

倪振羽(1991—)，男，湖南益阳人，博士，海南大学数学与统计学院任副教授，研究方向：图论及其应用。E-mail: 995264@hainanu.edu.cn。

(责任编辑：高　喆，英文校对：马　力)

This is an open access article under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0, https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).
© The Author(s) 2026. Published by Journal Editorial Department of Hainan University.