doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024042

一类悬臂梁方程的可解性

沈 瑾 睿
（西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070）

摘要：用锥上不动点定理，研究一类悬臂梁方程

$$\begin{cases} w''''(t)=\lambda f(t,w(t)), & t\in(0,1),\\ w(0)=w'(0)=w''(1)=w'''(1)=0, \end{cases}$$

其中 λ 为正参数，$f\in C([0,1]\times[0,\infty),[0,\infty))$. 在非线性项 f 满足超线性或者次线性增长条件的情形下给出其正解的存在性和多解性结果.

关键词：悬臂梁方程；存在性；多解性；正解；锥
中图分类号：O175.8 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2024)06-1317-08

Solvability of a Class of Cantilever Beam Equations

SHEN Jinrui
(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: By using the fixed point theorem on the cone, the author study a class of cantilever beam equations

$$\begin{cases} w''''(t)=\lambda f(t,w(t)), & t\in(0,1),\\ w(0)=w'(0)=w''(1)=w'''(1)=0, \end{cases}$$

where λ is a positive parameter, $f\in C([0,1]\times[0,\infty),[0,\infty))$. The existence and multiplicity results of its positive solutions are given when the nonlinear term f satisfies superlinear or sublinear growth condition.

Keywords: cantilever beam equation; existence; multiplicity; positive solution; cone

0 引 言

四阶常微分方程边值问题在非线性振动流体力学和非线性弹性问题等领域应用广泛. 梁是工程建筑的基本构件，梁的形变通过四阶常微分方程刻画. 近年来，对四阶弹性梁方程的研究已取得了许多成果[1-16]，其中有两端简单支撑的弹性梁方程[6-7,10,13]，有两端固定支撑的弹性梁方程[11,14]及一端固定支撑、一端滑动支撑的弹性梁方程[1-4,12,15-16]. 例如，Cabada 等[1]考虑一端固定支撑、一端滑动支撑的弹性梁方程：

$$\begin{cases} u''''(t)-f(t,u(t))=0, & t\in(0,1),\\ u(0)=u'(0)=u''(1)=u'''(1)=0, \end{cases} \tag{1}$$

先用锥上不动点定理证明了其正解的存在性，再通过临界点理论得到了其多解性的结果，其中

收稿日期：2024-01-25. **网络首发日期**：2024-06-12.
作者简介：沈瑾睿(2001—)，男，汉族，硕士研究生，从事常微分方程边值问题的研究，E-mail：sjr17843996257@163.com.
基金项目：国家自然科学基金(批准号：12061064).
网络首发地址：https://link.cnki.net/urlid/22.1340.o.20240611.1051.001.

$f\in C([0,1]\times[0,\infty),[0,\infty))$单调递增. Yang[15]考虑一类悬臂梁方程:

$$\begin{cases} u''''(t)=g(t)f(u(t)), & t\in(0,1),\\ u(0)=u'(0)=u''(1)=u'''(1)=0, \end{cases} \tag{2}$$

用 Krasnoselskii 不动点定理得到了其正解的存在性,其中 $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$, $g\in C([0,1],[0,\infty))$且 $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t>0$.

目前,对两端简单支撑及两端固定支撑的弹性梁方程已有大量研究结果,而对悬臂梁方程的研究报道较少. 而 Yang[15]仅得到了方程(2)正解的存在性结果,本文用类似的方法对正参数 λ 进行限制,证得所讨论问题至少存在两个正解. Cabada 等[1]用锥上不动点定理只得到了方程(2)正解的存在性结果,对多解性结果用临界点理论得到. 因此,本文考虑能否对问题(1)中非线性项 f 的单调性不进行限制,并且只用锥上不动点定理即能得到正解的存在性和多解性. 基于此,本文讨论

$$\begin{cases} w''''(t)=\lambda f(t,w(t)), & t\in(0,1),\\ w(0)=w'(0)=w''(1)=w'''(1)=0 \end{cases} \tag{3}$$

正解的存在性及多解性.

假设:(H_1) λ 为正参数;(H_2) $f\in C([0,1]\times[0,\infty),[0,\infty))$.

1 预备知识

令

$$A=\frac{1}{\int_0^1 G(j(s),s)\mathrm{d}s}=\begin{cases} 8, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ 12, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1, \end{cases} \tag{4}$$

$$B=\frac{1}{\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}q(t)\int_\alpha^\beta G(j(s),s)\mathrm{d}s}=\begin{cases} \dfrac{12}{\beta^4-\alpha^4}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ \dfrac{24}{4(\beta^3-\alpha^3)+\alpha^4-\beta^4}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1, \end{cases} \tag{5}$$

$$\tau=\lim_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}q(t)=\frac{1}{2}\alpha^2(3-\alpha), \tag{6}$$

$$\mu^*=A\sup\frac{r}{\max\{f(t,x):(t,x)\in[0,1]\times[0,r]\}}, \tag{7}$$

$$\nu^*=B\inf\frac{r}{\min\{f(t,x):(t,x)\in[\alpha,\beta]\times[\tau r,r]\}}, \tag{8}$$

其中 $G(t,s)$是问题(3)对应齐次问题的格林函数.

记

$$f_0=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(t,x)}{x},\qquad f_\infty=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{x},$$

$$\max\overline{f_0}=\overline{\lim_{x\to 0^+}}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\frac{f(t,x)}{x},\qquad \max\overline{f_\infty}=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\frac{f(t,x)}{x},$$

$$\min\underline{f_0}=\underline{\lim_{x\to 0^+}}\min_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}\frac{f(t,x)}{x},\qquad \min\underline{f_\infty}=\underline{\lim_{x\to+\infty}}\min_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}\frac{f(t,x)}{x}.$$

令空间 $X:=C[0,1]$,其在范数 $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$ 下构成 Banach 空间. 设 K 为 $C[0,1]$的一个锥,且

$$K=\{w\in C[0,1]:\min_{0\leqslant t\leqslant 1}w(t)\geqslant 0,\ \min_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}w(t)\geqslant\tau\|w\|\}. \tag{9}$$

定义一个算子 $L_\lambda:C[0,1]\to C[0,1]$,且

$$(L_\lambda w)(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)f(s,w(s))\mathrm{d}s,\qquad \forall\, w\in C[0,1]. \tag{10}$$

易见,若 $w\in K$ 为 L_λ 的非平凡不动点,则 $w=L_\lambda(w)$为问题(3)的正解. 反之,若 w 为问题(3)的正解,则 $w\in K$ 为 T_λ 的非平凡不动点.

引理 1[15]　设 X 是一个 Banach 空间，$K\subset X$ 是一个锥. 设 Ω_1,Ω_2 为 X 中的有界开子集，且令 $T: K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$ 为全连续算子，若下列条件之一成立：

1) $\|Tu\|\leqslant\|u\|$，$\forall u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Tu\|\geqslant\|u\|$，$\forall u\in K\cap\partial\Omega_2$；

2) $\|Tu\|\geqslant\|u\|$，$\forall u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Tu\|\leqslant\|u\|$，$\forall u\in K\cap\partial\Omega_2$.

则算子 T 有一个不动点 $u\in K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$.

引理 2　若 $h(t)\in C[0,1]$，则线性边值问题

$$\begin{cases} w''''(t)=\lambda h(t), & t\in(0,1),\\ w(0)=w'(0)=w''(1)=w'''(1)=0 \end{cases} \tag{11}$$

有唯一的解 $w(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)h(s)\mathrm{d}s$，其中

$$G(t,s)=\frac{1}{6}\begin{cases} s^2(3t-s), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ t^2(3s-t), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1. \end{cases} \tag{12}$$

易验证，$\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}G(t,s)=G(j(s),s)$，$\forall(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$，$G(t,s)\geqslant q(t)G(j(s),s)$，其中，

$$j(s)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ s, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1, \end{cases}\qquad G(j(s),s)=\begin{cases} \dfrac{1}{6}s^2(3-s), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{3}s^3, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1, \end{cases}$$

$$q(t)=\min\left\{\frac{2t}{3-t},\frac{1}{2}t^2(3-t)\right\}.$$

证明：当 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1$ 时，$G(t,s)=\frac{1}{6}t^2(3s-t)=\frac{1}{2}st^2-\frac{1}{6}t^3$，而 $\frac{\partial(st^2/2-t^3/6)}{\partial t}=-\frac{1}{2}t(t-s)\geqslant 0$，故 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}G(t,s)=G(s,s)=\frac{1}{3}s^3$. 当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ 时，$G(t,s)=\frac{1}{6}s^2(3t-s)=\frac{1}{2}s^2t-\frac{1}{6}s^3$，$G(t,s)$ 关于 t 单调递增，故 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}G(t,s)=G(1,s)=\frac{1}{6}s^2(3-s)$.

令 $j(s)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ s, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1, \end{cases}$ 则有

$$G(j(s),s)=\begin{cases} \dfrac{1}{6}s^2(3-s), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{3}s^3, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1. \end{cases}$$

故 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}G(t,s)=G(j(s),s)$，$\forall(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$.

注意到当 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1$ 时，$\frac{G(t,s)}{G(j(s),s)}=\frac{t^2(3s-t)}{2s^3}$，又 $\frac{\partial((3s-t)/s^3)}{\partial s}=\frac{t-2s}{3s^4}<0$，则 $G(t,s)\geqslant\frac{1}{2}t^2(3-t)G(j(s),s)$. 当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ 时，$\frac{G(t,s)}{G(j(s),s)}=\frac{3t-s}{3-s}$，又 $\frac{\partial((3t-s)/(3-s))}{\partial s}=\frac{3t-3}{(3-s)^2}\leqslant 0$，则 $G(t,s)\geqslant\frac{2t}{3-t}G(j(s),s)$.

此时，取 $q(t)=\min\left\{\frac{2t}{3-t},\frac{1}{2}t^2(3-t)\right\}$，则得 $G(t,s)\geqslant q(t)G(j(s),s)$.

引理 3　$L_\lambda(K)\subset K$ 且 $L_\lambda: K\to K$ 为全连续算子.

证明：先验证 L_λ 的保锥性，$\forall w\in K$，有

$$\min_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}(L_\lambda w)(t)=\lambda\min_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}\int_0^1 G(t,s)f(s,w(s))\mathrm{d}s\geqslant\lambda\min_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}q(t)\int_0^1 G(j(s),s)f(s,w(s))\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\tau\lambda\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)f(s,w(s))\mathrm{d}s=\tau\|L_\lambda w\|.$$

则 $L_\lambda(w)\in K$，即 $L_\lambda(K)\subset K$.

再验证 L_λ 是一个紧算子，$\forall w\in K$，有

$$\| L_\lambda w\| \leqslant \lambda\int_0^1 G(j(s),s)f(s,w(s))\mathrm{d}s,$$

由于 $G(j(s),s)$ 有界，f 是连续函数并且 $w(t)$ 在 $[0,1]$ 上有界，因此 L_λ 一致有界. 另一方面，由 $G(t,s)$ 连续性可知，L_λ 等度连续. 故由 Arzèla-Ascoli 定理易知，$L_\lambda: K\to K$ 为紧算子，从而为全连续算子.

引理 4[14] 假设 $0<\min\{\min \underline{f_0},\min \underline{f_\infty}\}\leqslant+\infty$，$0\leqslant\max\{\max \overline{f_0},\max \overline{f_\infty}\}<+\infty$.

1) 若 $\lambda<A/\max \overline{f_0}$，则存在一个正数列 $a_n\to 0$，使得 $f(t,x)\leqslant a_nA/\lambda$，$(t,x)\in[0,1]\times[0,a_n]$；

2) 若 $\lambda<A/\max \overline{f_\infty}$，则存在一个正数列 $a_n\to+\infty$，使得 $f(t,x)\leqslant a_nA/\lambda$，$(t,x)\in[0,1]\times[0,a_n]$；

3) 若 $\lambda>B/(\tau\min \underline{f_0})$，则存在一个正数列 $b_n\to 0$，使得 $f(t,x)\geqslant b_nB/\lambda$，$(t,x)\in[\alpha,\beta]\times[\tau b_n,b_n]$；

4) 若 $\lambda>B/(\tau\min \underline{f_\infty})$，则存在一个正数列 $b_n\to+\infty$，使得 $f(t,x)\geqslant b_nB/\lambda$，$(t,x)\in[\alpha,\beta]\times[\tau b_n,b_n]$.

2 主要结果

定理 1 1) 若 f 满足超线性条件，即 $\max f_0=0$ 且 $\min f_\infty=+\infty$，则问题(3)至少存在一个正解；

2) 若 f 满足次线性条件，即 $\min f_0=+\infty$ 且 $\max f_\infty=0$，则问题(3)至少存在一个正解.

证明：1) 超线性情形. 因为 $\max f_0=0$，所以可知存在 $a>0$，使得当 $0<w\leqslant a$ 时，有 $f(t,w)\leqslant\eta w$，其中 $\eta>0$，且满足 $\lambda\eta\int_0^1 G(j(s),s)\mathrm{d}s\leqslant 1$.

当 $w\in\partial K_a$ 时，即 $\| w\| =a$，

$$L_\lambda w(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)f(s,w(s))\mathrm{d}s\leqslant\lambda\int_0^1 G(j(s),s)f(s,w(s))\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\lambda\int_0^1 G(j(s),s)\eta w(s)\mathrm{d}s\leqslant \| w\| \lambda\eta\int_0^1 G(j(s),s)\mathrm{d}s\leqslant a=\| w\| .$$

则 $\| L_\lambda w\| \leqslant\| w\|$，$w\in\partial K_a$.

因为 $\min f_\infty=+\infty$，所以可知存在 $b>0$，使得当 $w\geqslant b$ 时，有 $f(t,w)\geqslant\mu w$，其中 $\mu>0$，且满足 $\lambda\mu\tau\int_\alpha^\beta G(j(s),s)\mathrm{d}s\geqslant 1$.

当 $w\in\partial K_b$ 时，即 $\| w\| =b$，

$$L_\lambda w(t)=\lambda\int_o^1 G(t,s)f(s,w(s))\mathrm{d}s\geqslant\lambda\int_\alpha^\beta G(t,s)f(s,w(s))\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\lambda\int_\alpha^\beta G(j(s),s)q(t)f(s,w(s))\mathrm{d}s\geqslant\lambda\tau\int_\alpha^\beta G(j(s),s)f(s,w(s))\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\lambda\tau\mu\| w\|\int_\alpha^\beta G(j(s),s)\mathrm{d}s\geqslant b=\| w\| .$$

则 $\| L_\lambda w\| \geqslant\| w\|$，$w\in\partial K_b$.

于是由引理 1 可知，至少存在一个不动点 $w\in K\cap(\overline{K}_b\backslash K_a)$，即问题(3)至少存在一个正解.

2) 次线性情形. 因为 $\min f_0=+\infty$，故同 1)的证明过程可知存在 $a>0$，使得当 $0<w\leqslant a$ 时，有 $f(t,w)\geqslant\mu w$，其中 $\mu>0$，且满足 $\lambda\mu\tau\int_\alpha^\beta G(j(s),s)\mathrm{d}s\geqslant 1$.

当 $w\in\partial K_a$ 时，即 $\| w\| =a$，

$$L_\lambda w(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)f(s,w(s))\mathrm{d}s\geqslant\lambda\int_\alpha^\beta G(t,s)f(s,w(s))\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\lambda\int_\alpha^\beta q(t)G(j(s),s)f(s,w(s))\mathrm{d}s\geqslant\lambda\mu q(t)\| w\|\int_\alpha^\beta G(j(s),s)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\lambda\mu\tau \| w \| \int_{\alpha}^{\beta} G(j(s),s)\mathrm{d}s \geqslant a = \| w \| .$$

则 $\| L_{\lambda} w \| \geqslant \| w \|$，$w \in \partial K_a$.

因为 $\max f_{\infty} = 0$，所以可知存在 $b>0$，使得当 $w \geqslant b$ 时，有 $f(t,w) \leqslant \eta w$，其中 $\eta>0$，且满足 $\lambda\eta\int_0^1 G(j(s),s)\mathrm{d}s \leqslant 1$. 当 $w \in \partial K_b$ 时，即 $\| w \| = b$，

$$L_{\lambda} w(t) = \lambda\int_0^1 G(t,s) f(s,w(s))\mathrm{d}s \leqslant \lambda\int_0^1 G(j(s),s) f(s,w(s))\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\lambda\eta \| w \| \int_0^1 G(j(s),s)\mathrm{d}s \leqslant b = \| w \| .$$

则 $\| L_{\lambda} w \| \leqslant \| w \|$，$w \in \partial K_b$.

于是由引理 1 可知，至少存在一个不动点 $w \in K \cap (\overline{K}_b \backslash K_a)$，即问题(3)至少存在一个正解.

定理 2　假设 $\max\left\{\dfrac{B}{\tau\min \underline{f_0}}, \dfrac{B}{\tau\min \underline{f_{\infty}}}\right\} < \mu^*$.

1) 若 $\max\left\{\dfrac{B}{\tau\min \underline{f_0}}, \dfrac{B}{\tau\min \underline{f_{\infty}}}\right\} < \lambda < \mu^*$，则问题(3)至少存在两个正解；

2) 若 $\min\left\{\dfrac{B}{\tau\min \underline{f_0}}, \dfrac{B}{\tau\min \underline{f_{\infty}}}\right\} < \lambda \leqslant \max\left\{\dfrac{B}{\tau\min \underline{f_0}}, \dfrac{B}{\tau\min \underline{f_{\infty}}}\right\}$，则问题(3)至少存在一个正解.

证明：1) 令 $J(r) = \dfrac{rA}{\max\{f(t,x):(t,x)\in[0,1]\times[0,r]\}}$，则显然有 $J(r)$连续且 $\mu^* = \sup J(r)$. 由 $J(r)$的连续性可知，存在 $0<a_1<a_2$，使得 $\lambda < J(a_1)$，$J(a_2) < \mu^*$. 由 $\lambda < J(a_1)$，$\lambda < J(a_2)$分别可得：

$$\lambda < \frac{a_1 A}{\max\{f(t,x):(t,x)\in[0,1]\times[0,a_1]\}}, \tag{13}$$

$$\lambda < \frac{a_2 A}{\max\{f(t,x):(t,x)\in[0,1]\times[0,a_2]\}}. \tag{14}$$

另一方面，由于 $\lambda > \max\left\{\dfrac{B}{\min\tau \underline{f_0}}, \dfrac{B}{\min\tau \underline{f_{\infty}}}\right\}$，即 $\lambda > \dfrac{B}{\min\tau \underline{f_0}}$，$\lambda > \dfrac{B}{\min\tau \underline{f_{\infty}}}$，故由引理 4 中 3)，4)可知，存在 $b_n \to 0$，有 $f(t,x) \geqslant \dfrac{b_n B}{\lambda}$，从而存在 $0<b_1<a_1$，有 $\min\{f(t,x),(t,x)\in[\alpha,\beta]\times[\tau b_1, b_1]\}$，即

$$\lambda \geqslant \frac{b_1 B}{\min\{f(t,x):(t,x)\in[\alpha,\beta]\times[\tau b_1, b_1]\}}. \tag{15}$$

同理知存在 $b_n \to +\infty$，有 $f(t,x) \geqslant \dfrac{b_n B}{\lambda}$，从而存在 $b_2 > a_2$，有

$$\lambda \geqslant \frac{b_2 B}{\min\{f(t,x):(t,x)\in[\alpha,\beta]\times[\tau b_2, b_2]\}}. \tag{16}$$

易得 $0<b_1<a_1<a_2<b_2$，联立式(13)，(15)，有

$$\frac{b_1 B}{\min\{f(t,x):(t,x)\in[\alpha,\beta]\times[\tau b_1, b_1]\}} < \lambda < \frac{a_1 A}{\max\{f(t,x):(t,x)\in[0,1]\times[0,a_1]\}}.$$

当 $w \in \partial K_{a_1}$ 时，即 $\| w \| = a_1$，

$$L_{\lambda} w(t) = \lambda\int_0^1 G(t,s) f(s,w(s))\mathrm{d}s \leqslant \lambda\frac{a_1 A}{\lambda}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s \leqslant a_1 A\int_0^1 G(j(s),s)\mathrm{d}s = a_1 = \| w \| ,$$

则当 $w \in K_{a_1}$ 时，$\| L_{\lambda} w \| \leqslant \| w \|$. 当 $w \in \partial K_{b_1}$ 时，即 $\| w \| = b_1$，

$$L_{\lambda} w(t) = \lambda\int_0^1 G(t,s) f(s,w(s))\mathrm{d}s \geqslant \lambda\frac{b_1 B}{\lambda}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s \geqslant b_1 B\int_{\alpha}^{\beta} G(t,s)\mathrm{d}s \geqslant$$

$$b_1 B\int_{\alpha}^{\beta} q(t) G(j(s),s)\mathrm{d}s \geqslant b_1 B\tau\int_{\alpha}^{\beta} G(j(s),s)\mathrm{d}s = b_1 = \| w \| ,$$

则当 $w \in K_{b_1}$ 时，$\| L_{\lambda} w \| \geqslant \| w \|$.

于是由引理1可知，至少存在一个不动点 $w\in K\cap(\overline{K}_{a_1}\setminus K_{b_1})$，即问题(3)至少存在一个正解 $w\in[b_1,a_1]$. 联立式(14),(16)，同理知至少存在一个不动点 $w\in K\cap(\overline{K}_{b_2}\setminus K_{a_2})$，即问题(3)至少存在一个正解 $w\in[a_2,b_2]$.

综上可知问题(3)至少存在两个正解 $w_1\in[b_1,a_1]$，$w_2\in[a_2,b_2]$.

2) 由于 $\min\left\{\frac{B}{\min\tau\underline{f}_0},\frac{B}{\min\tau\underline{f}_\infty}\right\}<\lambda\leqslant\max\left\{\frac{B}{\min\tau\underline{f}_0},\frac{B}{\min\tau\underline{f}_\infty}\right\}\leqslant\mu^*$，与1)的证明过程同理，依然有式(13),(14)成立.

另一方面，$\min\left\{\frac{B}{\min\tau\underline{f}_0},\frac{B}{\min\tau\underline{f}_\infty}\right\}<\lambda\leqslant\max\left\{\frac{B}{\min\tau\underline{f}_0},\frac{B}{\min\tau\underline{f}_\infty}\right\}$，下面分两种情形讨论.

情形① $\frac{B}{\min\tau\underline{f}_0}<\lambda<\frac{B}{\min\tau\underline{f}_\infty}$. 此时由于 $\lambda>\frac{B}{\min\tau\underline{f}_0}$，故与1)同理知式(15)成立，从而联立式(13),(15)可知，至少存在一个不动点 $w\in K\cap(\overline{K}_{a_1}\setminus K_{b_1})$，即问题(3)至少存在一个正解 $w\in[b_1,a_1]$.

情形② $\frac{B}{\min\tau\underline{f}_\infty}<\lambda<\frac{B}{\min\tau\underline{f}_0}$. 此时由于 $\lambda>\frac{B}{\tau\underline{f}_\infty}$，故与1)同理知式(16)成立，从而联立式(14),(16)可知，至少存在一个不动点 $w\in K\cap(\overline{K}_{a_1}\setminus K_{b_1})$，即问题(3)至少存在一个正解 $w\in[a_2,b_2]$.

综上可知，问题(3)至少存在一个正解 $w_1\in[b_1,a_1]$或 $w_2\in[a_2,b_2]$.

定理3 假设 $\nu^*<\min\left\{\frac{A}{\max\overline{f}_0},\frac{A}{\max\overline{f}_\infty}\right\}$.

1) 若 $\nu^*<\lambda<\min\left\{\frac{A}{\max\overline{f}_0},\frac{A}{\max\overline{f}_\infty}\right\}$，则问题(3)至少存在两个正解；

2) 若 $\min\left\{\frac{A}{\max\overline{f}_0},\frac{A}{\max\overline{f}_\infty}\right\}\leqslant\lambda<\max\left\{\frac{A}{\max\overline{f}_0},\frac{A}{\max\overline{f}_\infty}\right\}$，则问题(3)至少存在一个正解.

证明：1) 令 $I(r)=\frac{rB}{\min\{f(t,x):(t,x)\in[\alpha,\beta]\times[\tau r,r]\}}$. 易知 $I(r)$连续，且 $\nu^*=\inf I(r)$. 故由 $I(r)$的连续性可知，存在 $0<b_1<b_2$，使得 $\nu^*<I(b_1),I(b_2)<\lambda$. 由 $I(b_1)<\lambda$，$I(b_2)<\lambda$ 分别可得：

$$\frac{b_1B}{\min\{f(t,x):(t,x)\in[\alpha,\beta]\times[\tau b_1,b_1]\}}<\lambda,\tag{17}$$

$$\frac{b_2B}{\min\{f(t,x):(t,x)\in[\alpha,\beta]\times[\tau b_2,b_2]\}}<\lambda.\tag{18}$$

另一方面，$\lambda<\min\left\{\frac{A}{\max\overline{f}_0},\frac{A}{\max\overline{f}_\infty}\right\}$，即 $\lambda<\frac{A}{\max\overline{f}_0}$，$\lambda<\frac{A}{\max\overline{f}_\infty}$. 由引理4中1),2)可知，存在 $a_n\to0$，有 $f(t,x)\leqslant\frac{a_nA}{\lambda}$，从而存在 $0<a_1<b_1$，有 $\max\{f(t,x):(t,x)\in[0,1]\times[0,a_1]\}\leqslant\frac{a_1A}{\lambda}$，即

$$\lambda\geqslant\frac{a_1A}{\max\{f(t,x):(t,x)\in[0,1]\times[0,a_1]\}}.\tag{19}$$

同理可知存在 $a_n\to+\infty$，有 $f(t,x)\leqslant\frac{a_nA}{\lambda}$，从而存在 $a_2>b_2$，有

$$\lambda\geqslant\frac{a_2A}{\max\{f(t,x):(t,x)\in[0,1]\times[0,a_2]\}}.\tag{20}$$

易得 $0<a_1<b_1<b_2<a_2$，联立式(17),(19)，有

$$\frac{b_1B}{\min\{f(t,x):(t,x)\in[\alpha,\beta]\times[\tau b_1,b_1]\}}<\lambda<\frac{a_1A}{\max\{f(t,x):(t,x)\in[0,1]\times[0,a_1]\}}.$$

当 $w\in\partial K_{a_1}$ 时，即 $\|w\|=a_1$，

$$L_\lambda w(t)=\lambda\int_0^1G(t,s)f(s,w(s))\mathrm{d}s\leqslant\lambda\frac{a_1A}{\lambda}\int_0^1G(t,s)\mathrm{d}s\leqslant a_1A\int_0^1G(j(s),s)\mathrm{d}s=a_1=\|w\|,$$

则当 $w\in K_{a_1}$ 时，$\|L_\lambda w\|\leqslant\|w\|$. 当 $w\in\partial K_{b_1}$ 时，即 $\|w\|=b_1$，

$$L_\lambda w(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)f(s,w(s))\mathrm{d}s\geqslant\lambda\frac{b_1B}{\lambda}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\geqslant b_1B\int_\alpha^\beta G(t,s)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$b_1B\int_\alpha^\beta q(t)G(j(s),s)\mathrm{d}s\geqslant b_1B\tau\int_\alpha^\beta G(j(s),s)\mathrm{d}s=b_1=\|w\|,$$

则当 $w\in K_{b_1}$ 时，$\|L_\lambda w\|\geqslant|w\|$.

于是由引理 1 可知，至少存在一个不动点 $w\in K\cap(\overline{K}_{b_1}\setminus K_{a_1})$，即问题(3)至少存在一个正解 $w\in[a_1,b_1]$. 同理联立式(18),(20)可知，至少存在一个不动点 $w\in K\cap(\overline{K}_{a_2}\setminus K_{b_2})$，即问题(3)至少存在一个正解 $w\in[b_2,a_2]$.

综上可知问题(3)至少存在两个正解 $w_1\in[a_1,b_1]$，$w_2\in[b_2,a_2]$.

2)的证明过程与定理 2 中 2)类似，故略.

例 1　考虑边值问题：

$$\begin{cases}w''''(t)=\lambda w(3w-2t),\quad t\in(0,1),\\ w(0)=w'(0)=w''(1)=w'''(1)=0,\end{cases}\tag{21}$$

其中取 $\alpha=\frac{1}{4}$，$\beta=\frac{3}{4}$. 则 $f(t,w)$满足超线性增长条件，即满足定理 1 中 1)，问题(21)至少存在一个正解.

例 2　考虑边值问题：

$$\begin{cases}w''''(t)=\lambda(w^{1/2}+t),\quad t\in(0,1),\\ w(0)=w'(0)=w''(1)=w'''(1)=0,\end{cases}\tag{22}$$

其中取 $\alpha=\frac{1}{4}$，$\beta=\frac{3}{4}$. 则 $f(t,w)$满足次线性增长条件，满足定理 1 中 2)，问题(22)至少存在一个正解.

例 3　考虑边值问题：

$$\begin{cases}w''''(t)=\lambda\dfrac{w(3w+2t)}{w+t},\quad t\in(0,1),\\ w(0)=w'(0)=w''(1)=w'''(1)=0,\end{cases}\tag{23}$$

其中取 $\alpha=\frac{1}{4}$，$\beta=\frac{3}{4}$. 此时有 $\min f_0=\min\overline{f_0}=\min\underline{f_0}=2$，$\max f_\infty=\max\overline{f_\infty}=\max\underline{f_\infty}=3$，则 $f(t,w)$满足渐近线性增长条件.

通过简单计算，可得如下常数：$B=\begin{cases}\frac{192}{5},&0\leqslant s\leqslant t\leqslant1,\\ \frac{128}{7},&0\leqslant t\leqslant s\leqslant1,\end{cases}$ $\tau=\frac{11}{128}$.

情形 1) 当 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant1$ 时，

$$\frac{8\ 192}{77}<\lambda<\mu^*=\sup\frac{12r}{\max\{f(t,x):(t,x)\in[0,1]\times[0,r]\}},$$

满足定理 2 中 1)，则问题(23)至少存在两个正解. 当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant1$ 时，

$$\frac{12\ 288}{55}<\lambda<\mu^*=\sup\frac{8r}{\max\{f(t,x):(t,x)\in[0,1]\times[0,r]\}},$$

满足定理 2 中 1)，则问题(23)至少存在两个正解.

情形 2) 当 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant1$ 时，$\frac{12\ 288}{231}<\lambda\leqslant\frac{8\ 192}{77}$，满足定理 2 中 2)，则问题(23)至少存在一个正解.

当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant1$ 时，$\frac{8\ 192}{55}<\lambda\leqslant\frac{12\ 288}{55}$，满足定理 2 中 2)，则问题(23)至少存在一个正解.

下面的计算过程与 1)类似，可得到类似结果，故略.

参 考 文 献

[1] CABADA A, PRECUP R, SAAVEDRA L, et al. Multiple Positive Solutions to a Fourth-Order Boundary-Value Problem [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2016, 2016: 254-1-254-18.

[2] WEI M, LI Y X, LI G. Lower and Upper Solutions Method to the Fully Elastic Cantilever Beam Equation with Support [J/OL]. Advances in Difference Equations, (2021-06-21)[2024-01-21]. https://doi.org/10.1186/s13662-021-03402-z.

[3] PADHI S. A Note on the Eigenvalue Criteria for Positive Solutions of a Cantilever Beam Equation with Free End [J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 2021, 47(5): 1437-1451.

[4] SPRAKER J S. Positive Solutions for a Fourth Order Differential Inclusion Based on the Euler-Bernoulli Equation for a Cantilever Beam [J]. Differential Equations & Applications, 2019, 11(4): 531-541.

[5] WANG Q Y, YANG L. Positive Solutions for a Nonlinear System of Fourth-Order Ordinary Differential Equations [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2020, 2020: 45-1-45-15.

[6] BONANNO G, DI BELLA B. A Boundary Value Problem for Fourth-Order Elastic Beam Equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 343(2): 1166-1176.

[7] HAN G D, XU Z B. Multiple Solutions of Some Nonlinear Fourth-Order Beam Equations [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2008, 68(12): 3646-3656.

[8] HAN L, ZHANG G W, LI H Y. Positive Solutions of Fourth-Order Problem Subject to Nonlocal Boundary Conditions [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2020, 43(5): 3675-3691.

[9] BOUTERAA N, BENAÏKHA S. Positive Periodic Solutions for a Class of Fourth-Order Nonlinear Differential Equations [J]. Numerical Analysis and Applications, 2019, 12(1): 1-14.

[10] MA R Y, WANG J X, YAN D L. The Method of Lower and Upper Solutions for Fourth Order Equations with the Navier Condition [J/OL]. Boundary Value Problems, (2017-10-19)[2024-01-21]. https://doi.org/10.1186/s13661-017-0887-5.

[11] CABADA A, ENGUIÇA R R. Positive Solutions of Fourth Order Problems with Clamped Beam Boundary Conditions [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2011, 74(10): 3112-3122.

[12] WEI Y F, SONG Q L, BAI Z B. Existence and Iterative Method for Some Fourth Order Nonlinear Boundary Value Problems [J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 87: 101-107.

[13] BAI Z B, WANG H Y. On Positive Solutions of Some Nonlinear Fourth-Order Beam Equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 270(2): 357-368.

[14] YAO Q L. Positive Solutions for Eigenvalue Problems of Fourth-Order Elastic Beam Equations [J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17(2): 237-243.

[15] YANG B. Positive Solutions for a Fourth Order Boundary Value Problem [J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2005, 2005(3): 1-17.

[16] YAO Q L. Positive Solutions of a Nonlinear Elastic Beam Equation Rigidly Fastened on the Left and Simply Supported on the Right [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2008, 69(5/6): 1570-1580.

(责任编辑:赵立芹)