Banach 空间中 Von Neumann-Jordan 常数型的新常数

李 谦, 殷周平, 刘 琪, 汤 瑞
(安庆师范大学 数理学院,安徽 安庆 246133)

摘 要:为了推进几何常数在 Banach 空间几何结构研究中的应用,引入了新的几何常数 $L'_{\alpha,\beta}(X)$,并给出了新常数的一些基本性质及该常数与其他经典几何常数之间的关系,并用其刻画内积空间。最后,研究了常数与正规结构的联系。

关键词:Banach 空间;Von Neumann-Jordan 常数;几何常数;一致非方;正规结构
DOI:10.15938/j.jhust.2026.04.015
中图分类号:O177.2 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-2683(2026)04-0155-06

New Constant of Von Neumann-Jordan Constant Type in Banach Space

LI Qian, YIN Zhouping, LIU Qi, TANG Rui
(School of Mathematics and Physics, Anqing Normal University, Anqing 246133, China)

Abstract: In order to advance the application of geometric constants in the study of the geometric structure of Banach spaces, this research introduces a new geometric constant $L'_{\alpha,\beta}(X)$, presents its fundamental properties, and explores the relationships with other classical geometric constants. Furthermore, this constant is utilized to characterize inner product spaces. Lastly, the connection with normal structure is investigated.

Keywords: Banach space; Von Neumann-Jordan constant; geometric constants; uniformly non-square; normal structure

0 引 言

近年来,在学术研究中引入并探讨了特定的几何常数。几何常数可以定量地描述空间的几何性质,运用它们能够更好地处理 Banach 空间中的一些问题,这些几何常数具有数学之美,并且不同的几何常数之间存在着一定的关系。其中,著名的几何常数有 Von Neumann-Jordan 常数 $C_{NJ}(X)$ 和 James 常数 $J(X)$[1-11]。值得注意的是,几何常数在解决包括 Banach-Stone 定理、Bishop-Phelps-Bollobás 定理和 Tinley 问题、Banach 空间绝对和圆周性和光滑性、Banach 空间中的重新赋范问题等一系列课题中发挥着一定的作用,是几何常数中至关重要的研究方向[12-15]。

文[16]主要研究了实赋范空间中近似正交性的概念,并利用这一概念为对偶空间的凸性和光滑性特征提供了新的视角。在内积空间的框架下,向量的正交性呈现为简洁且实用的核心概念。此外,当范数来源于内积时,新的正交性概念会变得更加直观且易于理解。这一发现不仅强化了内积空间中正交性的基础地位,也揭示了其在更广泛数学结构中的潜在价值。文[17]中研究的重点转向了 Birkhoff 正交性和等腰正交性,这是两个普遍的正交性概念。此外,还深入研究了它们与 Roberts 正交的关系,并开始了相关度量的分析,旨在量化不同正交性之间的差异。

在所有的赋范空间中,内积空间以其非凡的简

收稿日期:2024-10-12
基金项目:安徽省高等教育科学研究计划(2023AH050487)
作者简介:李 谦(2001—),男,硕士研究生;
刘 琪(1992—),男,博士,讲师.
通信作者:殷周平(1978—),男,硕士,教授,E-mail:yzp@aqnu.edu.cn.

洁性和清晰的几何描绘而闻名。它独特的魅力让无数数学家孜孜不倦地寻找着赋范空间转化为内积空间的条件,激励着人们不断进行更加深入的研究。

FRECHET[18]首次提出了基于范数的内积空间的特征描述。证明了赋范空间$(X,\|\cdot\|)$满足以下条件时,成为内积空间,$\|a+b\|^2+\|b+c\|^2+\|a+c\|^2=\|a+b+c\|^2+\|a\|^2+\|b\|^2+\|c\|^2,a,b,c\in X$。

下面介绍著名的"平行四边形法则":

设$(X,\|\cdot\|)$是1个实赋范线性空间。那么$\|\cdot\|$可由内积诱导当且仅当平行四边形法则成立时,即

$2\|a\|^2+2\|b\|^2=\|a+b\|^2+\|a-b\|^2,a,b\in X$。

Von Neumann-Jordan常数$C_{NJ}(X)$在文[19]中给出了如下正式定义,

$$C_{NJ}(X)=\sup\left\{\frac{\|a+b\|^2+\|a-b\|^2}{2(\|a\|^2+\|b\|^2)}:a,b\in X,(a,b)\neq(0,0)\right\}$$

此外,文[5-6]描述了有关该常数$C_{NJ}(X)$的以下特性:

1)$1\leqslant C_{NJ}(X)\leqslant 2$;

2)当$C_{NJ}(X)=1$时,X是1个Hilbert空间;

3)当$C_{NJ}(X)<2$时,X是一致非方的。

GAO[8]第1个引入并深入研究了常数$E(X)$:

$$E(X)=\sup\{\|a+b\|^2+\|a-b\|^2:a,b\in S_X\}$$

式中:S_X为Banach空间X的单位球面,即$S_X=\{x\in X:\|x\|=1\}$。

如果存在1个常数$\sigma\in(0,1)$,对于任何$t_1,t_2\in S_X$有$\frac{\|t_1+t_2\|}{2}\leqslant 1-\sigma$或者$\frac{\|t_1-t_2\|}{2}\leqslant 1-\sigma$,则称Banach空间$X$为一致非方的[10]。

TAKAHASHI[7]和ALONSO[20]对修正的常数$C'_{NJ}(X)$进行了深入研究,具体描述如下:

$$C'_{NJ}(X)=\sup\left\{\frac{\|a+b\|^2+\|a-b\|^2}{4}:a,b\in S_X\right\}$$

可以直观地观察到,当且仅当满足$C'_{NJ}(X)<2$时,X是一致非方的。

在文[21]中,用于刻画Banach空间凸性的函数$\sigma_X:[0,2]\to[0,1]$被定义为Clarkson凸性模:

$$\sigma_X(\xi)=\inf\left\{1-\frac{\|a+b\|}{2}:a,b\in S_X,\|a-b\|\geqslant\xi\right\}$$

本文介绍了常数$L'_{\alpha,\beta}(X)$并探讨其与Hilbert空间的关系。此外,重点介绍了Banach空间中常数$L'_{\alpha,\beta}(X)$的性质,并通过重要的不等式强调它与其他经典常数之间的关系。文章通过命题、引理和定理呈现相关知识,充分展现出常数$L'_{\alpha,\beta}(X)$的性质及其应用,从而全面理解和应用该常数。最后研究了常数与正规结构的联系。

1 常数$L'_{\alpha,\beta}(X)$

新的几何常数定义如下:

$$L'_{\alpha,\beta}(X)=\sup\left\{\frac{\|\alpha a+\beta b\|^2+\alpha\beta\|a-b\|^2}{\alpha\|a\|^2+\beta\|b\|^2}:a,b\in X,(a,b)\neq(0,0)\right\}$$

式中:$\alpha,\beta\in[0,1]$且α,β不同时为0。

可以得到有关常数的以下性质:

1)$L'_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(X)=C_{NJ}(X)$;

2)当$a,b\in S_X$时,有$L'_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(X)=\frac{1}{2}E(X)=2C'_{NJ}(X)$;

3)由于a,b是对称的,则可以得到$L'_{\alpha,\beta}(X)=L'_{\beta,\alpha}(X)$。

命题1 对于Banach空间X,有

$$\alpha+\beta\leqslant L'_{\alpha,\beta}(X)\leqslant\alpha+\beta+\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

证明:首先,不失一般性的情况下,假设$a\neq0,b=0$,则有

$$L'_{\alpha,\beta}(X)\geqslant\frac{\|\alpha a\|^2+\alpha\beta\|a\|^2}{\alpha\|a\|^2}=\alpha+\beta$$

另一方面能够得到

$$\frac{\|\alpha a+\beta b\|^2+\alpha\beta\|a-b\|^2}{\alpha\|a\|^2+\beta\|b\|^2}\leqslant\frac{(\alpha\|a\|+\beta\|b\|)^2+\alpha\beta(\|a\|+\|b\|)^2}{\alpha\|a\|^2+\beta\|b\|^2}=\frac{(\alpha^2+\alpha\beta)\|a\|^2+(\beta^2+\alpha\beta)\|b\|^2+4\alpha\beta\|a\|\|b\|}{\alpha\|a\|^2+\beta\|b\|^2}\leqslant$$

$$\alpha+\beta+\frac{4\alpha\beta}{\alpha\frac{1}{\|b\|}+\beta\frac{1}{\|a\|}}\leqslant$$

$$\alpha+\beta+\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}。$$

例1 设$X=\mathbb{R}^2$,其中$\mathbb{R}^\infty$范数如下所示:

$$\|(t_1,t_2)\|_\infty=\max\{|t_1|,|t_2|\},$$

有$L'_{\alpha,\beta}(X)=\alpha+\beta+\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

当$a=(1,1),b=(1,1)$时,有$\|a\|=\|b\|=1$,$\|\alpha a+\beta b\|=\alpha+\beta$和$\|a-b\|=2$,

则有

$$L'_{\alpha,\beta}(X)=\alpha+\beta+\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

例 2　设 $X=\mathbb{R}^2$,其中$\mathbb{R}^1$ 范数如下所示:

$$\|(t_1,t_2)\|_1=|t_1|+|t_2|$$

有 $L'_{\alpha,\beta}(X)=\alpha+\beta+\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

当 $a=(1,0),b=(0,1)$时,有 $\|a\|=\|b\|=1$, $\|\alpha a+\beta b\|=\alpha+\beta$ 和 $\|a-b\|=2$,

则有

$$L'_{\alpha,\beta}(X)=\alpha+\beta+\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

命题 2　对于 Banach 空间 X,有

$L'_{\alpha,0}(X)=L'_{0,\beta}(X)=1$

证明:由题知

$$L'_{\alpha,0}(X)=\sup\left\{\frac{\|\alpha a\|^2}{\alpha\|a\|^2}:a,b\in X,(a,b)\neq(0,0)\right\}=1$$

和

$$L'_{0,\beta}(X)=\sup\left\{\frac{\|\beta b\|^2}{\beta\|b\|^2}:a,b\in X,(a,b)\neq(0,0)\right\}=1$$

则可以得到 $L'_{\alpha,0}(X)=L'_{0,\beta}(X)=1$。

命题 3　若 X 是 Hilbert 空间,则有 $L'_{\alpha,\beta}(X)=1$。

证明:因为 X 是 1 个 Hilbert 空间,根据文[7]可知:

$$\|\alpha a+\beta b\|^2+\alpha\beta\|a-b\|^2=\alpha\|a\|^2+\beta\|b\|^2$$

所以能够推导出 $L'_{\alpha,\beta}(X)=1$。

定理 1　若 X 是 Banach 空间,对于 $\alpha\geqslant\beta,\alpha,\beta\in[0,1]$和 $\varepsilon\in[0,2]$,则有

$$L'_{\alpha,\beta}(X)\geqslant\frac{(\alpha+\beta-2\alpha\delta_X(\varepsilon))^2+\alpha\beta\varepsilon^2}{\alpha+\beta}$$

证明:当 a_n 和 $b_n\in S_X$,可得到

$$\|a_n-b_n\|=\varepsilon \text{ 和 } \lim_{n\to\infty}\|a_n+b_n\|=2(1-\delta_X(\varepsilon))$$

此外,

$$\|\alpha a_n+\beta b_n\|=\|\alpha(a_n+b_n)-(\alpha-\beta)b_n\|\geqslant\alpha\|a_n+b_n\|-|\alpha-\beta|$$

则可得到

$$L'_{\alpha,\beta}(X)\geqslant\frac{(\alpha\|a_n+b_n\|-|\alpha-\beta|)^2+\alpha\beta\varepsilon^2}{\alpha+\beta}$$

当 $n\to\infty$ 时得证。

例 3　当 X 为 $c_0=\{(a_i):\lim_{i\to\infty}|a_i|=0\}$时,其中范数为

$$\|x\|=\sup_{1\leqslant i<\infty}|a_i|+\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|a_i|^2}{4^i}\right)^{\frac{1}{2}}$$

因此,$\delta_X(2)=1$[22],

则有

$$L'_{\alpha,\beta}(X)\geqslant\frac{(\alpha\|a_n+b_n\|-|\alpha-\beta|)^2+\alpha\beta\varepsilon^2}{\alpha+\beta}=\alpha+\beta+\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

当 $n\to\infty$ 时得证。

即当 X 为 $c_0=\{(a_i):\lim_{i\to\infty}|a_i|=0\}$时,可得 $L'_{\alpha,\beta}(X)$ 的值为 $\alpha+\beta+\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}$。

定理 2　当 X 是 1 个 Banach 空间,$\alpha\geqslant\beta,\alpha,\beta\in[0,1]$,则有

$$L'_{\alpha,\beta}(X)\geqslant2\beta C'_{NJ}(X) \text{ 和 } L'_{\alpha,\beta}(X)\geqslant\beta J^2(X)$$

证明:根据基本等式

$$\alpha a+\beta b=\frac{\alpha+\beta}{2}(a+b)+\frac{\alpha-\beta}{2}(a-b)$$

可得

$$L'_{\alpha,\beta}(X)\geqslant\frac{\|\alpha a+\beta b\|^2+\alpha\beta\|a-b\|^2}{\alpha+\beta}\geqslant$$

$$\frac{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\|a+b\|-\frac{|\alpha-\beta|}{2}\|a-b\|\right)^2+\alpha\beta\|a-b\|^2}{\alpha+\beta}=$$

$$\frac{\frac{(\alpha+\beta)^2}{4}\|a+b\|^2+\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}\|a-b\|^2}{\alpha+\beta}+$$

$$\frac{\alpha\beta\|a-b\|^2-\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{2}\|a+b\|\|a-b\|}{\alpha+\beta}\geqslant$$

$$(\alpha+\beta)\frac{\|a+b\|^2+\|a-b\|^2}{4}-$$

$$(\alpha-\beta)\frac{\|a+b\|^2+\|a-b\|^2}{4}=$$

$$2\beta\frac{\|a+b\|^2+\|a-b\|^2}{4}$$

又因为

$$\frac{\|a+b\|^2+\|a-b\|^2}{2}\geqslant(\min\{\|a+b\|,\|a-b\|\})^2,$$

所以,结果得证。

注 1　若条件 $\alpha\geqslant\beta$ 变换为 $\alpha\leqslant\beta$,可得类似结果。

命题 4　在 Banach 空间 X 中,以下陈述是等价的:

1) $C'_{NJ}(X)=2$;

2)对于任意的 $\alpha,\beta\in[0,1]$,有 $L'_{\alpha,\beta}(X)=\alpha+\beta+\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}$;

3)存在 $\alpha_0,\beta_0\in[0,1]$,有 $L'_{\alpha,\beta}(X)=\alpha_0+\beta_0+\dfrac{4\alpha_0\beta_0}{\alpha_0+\beta_0}$。

证明:(1)⇒(2):若 $C'_{NJ}(X)=2$,则存在 a_n,$b_n\in S_X$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\|a_n+b_n\|\to 2 \text{ 和} \lim_{n\to\infty}\|a_n-b_n\|\to 2$$

且对任意 $a_n,b_n\in S_X$ 有

$$\|\alpha a_n+\beta b_n\|=\|(a_n+b_n)+(\alpha-1)a_n+(\beta-1)b_n\|\geqslant 2+\alpha-1+\beta-1=\alpha+\beta,$$

因此,可以推断出对于任意 $a_n,b_n\in S_X$,满足

$$\lim_{n\to\infty}\|\alpha a_n+\beta b_n\|\to\alpha+\beta \text{ 和} \lim_{n\to\infty}\|a_n+b_n\|\to 2$$

则有

$$L'_{\alpha,\beta}(X)=\frac{\|\alpha a+\beta b\|^2+\alpha\beta\|a-b\|^2}{\alpha\|a\|^2+\beta\|b\|^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\alpha+\beta+\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

(2)⇒(3):从 $\alpha,\beta\in[0,1]$ 可以推导出当 $\alpha_0,\beta_0\in[0,1]$ 时结果也成立;

(3)⇒(1):假设 $C'_{NJ}(X)<2$,则存在 $\sigma>0$,对于任意的 $a_n,b_n\in S_X$,有 $\left\|\dfrac{a+b}{2}\right\|\leqslant 1-\sigma$ 或 $\left\|\dfrac{a-b}{2}\right\|\leqslant 1-\sigma$。

在不失一般性的情况,可以假设 $\left\|\dfrac{a-b}{2}\right\|\leqslant 1-\sigma$,

则有

$$\frac{\|\alpha_0 a+\beta_0 b\|^2+\alpha_0\beta_0\|a-b\|^2}{\alpha_0\|a\|^2+\beta_0\|b\|^2}\leqslant\frac{(\alpha_0+\beta_0)^2+\alpha_0\beta_0[2(1-\sigma)]^2}{\alpha_0+\beta_0}=\alpha_0+\beta_0+\frac{4\alpha_0\beta_0(1-\sigma)^2}{\alpha_0+\beta_0}$$

对于任意的 $\alpha_0,\beta_0\in[0,1]$ 成立。

当 $\left\|\dfrac{a+b}{2}\right\|\leqslant 1-\sigma$ 时,可得类似结果。因此得出结论 $L'_{\alpha,\beta}(X)<\alpha+\beta+\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}$,这与初步假设矛盾,从而完成证明。

推论1 Banach 空间 X 是一致非方的,当且仅当 $L'_{\alpha,\beta}(X)<\alpha+\beta+\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ 时成立。

证明:在命题4中,根据等价性,因为 Banach 空间 X 是一致非方的,$C'_{NJ}(X)\leqslant 2$,所以能够推导出结果。

定理3 对于任意的 $\alpha,\beta\in[0,1]$ 且 $\alpha+\beta=1$,$a,b\in X$,当且仅当 $\|\alpha a+\beta b\|^2+\alpha\beta\|a-b\|^2=\alpha\|a\|^2+\beta\|b\|^2$ 时,赋范空间$(X,\|\cdot\|)$为内积空间。

证明:假设 X 是1个内积空间,当 $\alpha,\beta\in[0,1]$ 和 $a,b\in X$ 时能够得到

$$\alpha\|a\|^2+\beta\|b\|^2-\alpha\beta\|a-b\|^2=\alpha\|a\|^2+\beta\|b\|^2-\alpha\beta(\|a\|^2-2<a,b>+\|b\|^2)=\alpha(1-\beta)\|a\|^2+\beta(1-\alpha)\|b\|^2+2\alpha\beta<a,b>=\alpha^2\|a\|^2+\beta^2\|b\|^2+2\alpha\beta<a,b>=\|\alpha a+\beta b\|^2$$

当 $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$,有等式

$$\|\alpha a+\beta b\|^2+\alpha\beta\|a-b\|^2=\alpha\|a\|^2+\beta\|b\|^2$$

则有

$$\frac{1}{4}\|a+b\|^2+\frac{1}{4}\|a-b\|^2=\frac{1}{2}\|a\|^2+\frac{1}{2}\|b\|^2$$

证明了 X 是内积空间。

命题5 若 X 是 Banach 空间,则以下陈述是相互等价的:

1)$L'_{\alpha,\beta}(X)$是1个凸函数;

2)对于任意的 $\alpha\beta=0$ 且 α,β 不同时为0,有 $L'_{\alpha,\beta}(X)=\alpha+\beta=1$;

3)存在 $\alpha_0\beta_0=0$ 且 α_0,β_0 不同时为0,有 $L'_{\alpha,\beta}(X)=\alpha_0+\beta_0=1$;

4)X 是内积空间。

证明:1)⇒2):利用命题中 $L'_{\alpha,\beta}(X)$是1个凸函数,可以得到:

当 $\alpha\beta=0$ 且 α,β 不同时为0时,有

$$1=\alpha+\beta\leqslant L'_{\alpha,\beta}(X)\leqslant\alpha+\beta+\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}=1$$

所以,当 $\alpha\beta=0$ 且 α,β 不同时为0时,有 $L'_{\alpha,\beta}(X)=1$;

2)⇒3):由 $\alpha,\beta\in[0,1]$ 可以推导出当 $\alpha_0,\beta_0\in[0,1]$ 时结果也成立;

3)⇒4):应用定理3可得到结果;

4)⇒1):假设 X 是1个内积空间,引用命题3可以得出结论:$L'_{\alpha,\beta}(X)=1$。

证明完成。

例4 设 $X=\mathbb{R}^2$,其中$\mathbb{R}$范数如下:

$$\|(t_1,t_2)\|=(|t_1|^3+|t_2|^3)^{\frac{1}{3}}$$

在这种情况下,$L'_{\alpha,\beta}(X)$不再是凸函数。考虑取

$$a_0=(1,0),b_0=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right),$$

则有 $\|a_0\|_3=\|b_0\|_3=1$ 和

$$L'_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(X)\geqslant\frac{\left\|\dfrac{a_0+b_0}{2}\right\|^2+\dfrac{1}{4}\|a_0-b_0\|^2}{\dfrac{1}{2}\|a_0\|^2+\dfrac{1}{2}\|b_0\|^2}$$

因此,可以得到

$$\frac{\left\|\frac{a_0+b_0}{2}\right\|^2+\frac{1}{4}\|a_0-b_0\|^2}{\frac{1}{2}\|a_0\|^2+\frac{1}{2}\|b_0\|^2}>1$$

则可以得到

$$L'_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(X)>1=\frac{1}{2}L'_{0,1}(X)+\frac{1}{2}L'_{1,0}(X)$$

2　正规结构

定义 1[23]　设 G 是 Banach 空间 X 的 1 个非单一元素的子集,若每一个 G 都封闭有界并且是凸的,当 $r(G)<\mathrm{diam}(G)$ 时,则称该 Banach 空间 X 具有正规结构,其中 $r(G)$ 和 $\mathrm{diam}(G)$ 分别为直径和切比雪夫半径,并且在数学上定义为

$$\mathrm{diam}(G):=\sup\{\|a-b\|:a,b\in G\}$$

和

$$r(G):=\inf\{\sup\{\|a-b\|:b\in G\}:a\in G\}$$

正规结构是不动点理论中的重要概念[24]。如果 Banach 空间 X 中的每个包含多个点的弱紧凸子集 G 都具有正规结构,则称该 Banach 空间 X 具有弱正规结构。更重要的是,对于自反的 Banach 空间 X,弱正规结构和正规结构是一致的。此外,具有正规结构的每个自反 Banach 空间都具有不动点性质。

引理 1[25]　设 X 是 1 个不具有弱正规结构的 Banach 空间,那么对于任意的 $0<\omega<1$,存在 $t_1,t_2,t_3\in S_X$,满足:

1) $t_2-t_3=st$ 和 $|s-1|<\omega$;

2) $|\|t_1-t_2\|-1|,|\|t_3-(-t_1)\|-1|<\omega$;

3) $\left\|\frac{t_1+t_2}{2}\right\|,\left\|\frac{t_3-(-t_1)}{2}\right\|>1-\omega$。

从几何意义上理解这个引理如下:如果 X 没有弱正规结构,那么在 S_X 中存在 1 个内接六边形,其每一边的长度都无限接近 1,并且至少有四边与 S_X 的距离可以任意小。

定理 4　对于 $\alpha,\beta\in\left[\frac{1}{2},1\right]$,若 Banach 空间 X 满足 $L'_{\alpha,\beta}(X)<\alpha+\beta+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$,那么 X 具有正规结构。

证明:根据推论 1,由不等式 $L'_{\alpha,\beta}(X)<\alpha+\beta+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ 可推出 X 是一致非方的,又因为空间是自反的[10],表明在该情况下,正规结构和弱正规结构是等价的。

假设 X 不具有弱正规结构,对于给定的 $\omega>0$,存在 $t_1,t_2,t_3\in S_X$ 满足引理 1,可得

$$\left\|t_1+\frac{\beta}{\alpha}t_2\right\|=\left\|t_1+t_2-(1-\frac{\beta}{\alpha})t_2\right\|\geqslant$$

$$\|t_1+t_2\|-\left\|(1-\frac{\beta}{\alpha})t_2\right\|\geqslant$$

$$2-2\omega-(1-\frac{\beta}{\alpha})$$

和　$\alpha\beta\|t_1-t_2\|^2\geqslant\alpha\beta(1-\omega)^2$

此外,可以选择 ω 任意小,从而得到

$$L'_{\alpha,\beta}(X)\geqslant\frac{\|\alpha a+\beta b\|^2+\alpha\beta\|a-b\|^2}{\alpha\|a\|^2+\beta\|b\|^2}=$$

$$\frac{\alpha^2\left\|a+\frac{\beta}{\alpha}b\right\|^2+\alpha\beta\|a-b\|^2}{\alpha\|a\|^2+\beta\|b\|^2}=$$

$$\frac{\alpha^2(1-2\omega+\frac{\beta}{\alpha})^2+\alpha\beta(1-\omega)^2}{\alpha+\beta}\geqslant$$

$$\alpha+\beta+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

导出矛盾,即完成了证明。

参 考 文 献:

[1] ALONSO J, MARTINI H, WU S. On Birkhoff Orthogonality and Isosceles Orthogonality in Normed Linear Spaces[J]. Aequationes Mathematicae, 2012, 83(1): 153.

[2] ALONSO J, MARTIN P. A Counterexample to A Conjecture of G. Zbaganu about the Neumann-Jordan Constant[J]. Revue Roumaine De Mathématiques Pures Et Appliquées, 2006, 51(2): 135.

[3] BYNUM W. Normal Structure Coefficients for Banach Spaces[J]. Pacific Journal of Mathematics, 1980, 86(2): 427.

[4] DHOMPONGSA S, KAEWKHAO A, TASENA S. On a Generalized James Constant[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 285(2): 419.

[5] KATO M, TAKAHASHI Y. On the von Neumann-Jordan Constant for Banach Spaces[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1997, 125(4): 1055.

[6] KATO M, MALIGRANDA L, TAKAHASHI Y. On James and Jordan-Von Neumann Constants and the Normal Structure Coefficient of Banach Spaces[J]. Studia Mathematica, 2001, 144(3): 275.

[7] TAKAHASHI Y. Some Geometric Constants of Banach Spaces-A Unified Approach[J]. Banach and Function Spaces II, 2008: 191.

[8] GAO J. A Pythagorean Approach in Banach Spaces[J].

Journal of Inequalities and Applications, 2006, 2006 (1): 94982.

[9] TAKAHASHI Y, KATO M. Uniformly Non-square Banach Spaces [J]. Nihonkai Mathematical Journal, 1998, 9: 155.

[10] JAMES R C. Uniformly Non-square Banach Spaces[J]. Annals of Mathematics, 1964, 80(3): 542.

[11] 赵亮, 赵平安. 广义 von Neumann 常数的几何性质[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2023, 28(4): 138.
ZHAO Liang, ZHAO Pingan. Geometric Properties of Generalized von Neumann Constant [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2023, 28 (4): 138.

[12] HARDTKE J D. Absolute Sums of Banach Spaces and Some Geometric Properties Related to Rotundity and Smoothness [J]. Banach Journal of Mathematical Analysis, 2014, 8(1): 295.

[13] IVANOV M, TROYANSKI S. Uniformly Smooth Renorming of Banach Spaces with Modulus of Convexity of Power Type 2[J]. Journal of Functional Analysis, 2006, 237(2): 373.

[14] CHO D H, CHOI Y S. The Bishop-Phelps-Bollobás Theorem on Bounded Closed Convex Sets[J]. Journal of the London Mathematical Society, 2016, 93(2): 502.

[15] TANAKA R. Tingley's Problem on Symmetric Absolute Normalized Norms on $\mathbb{R}^2$[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2014, 30(38): 1324.

[16] STYPULA T, WÓJCIK P. Characterizations of Rotundity and Smoothness by Approximate Orthogonalities [C]// Annales Mathematicae Silesianae, 2016, 30: 193.

[17] PAPINI P L, WU S. Measurements of Differences between Orthogonality Types[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 397(1): 285.

[18] FRÉCHET M. Sur La Definition Axiomatique D'une Classe D'espaces Vectoriels Distancies Applicables Vectoriellement Sur L'espace De Hilbert[J]. Annals of Mathematics, 1935, 36(3): 705.

[19] CLARKSON J A. The Von Neumann-Jordan Constant for the Lebesgue Spaces[J]. Annals of Mathematics, 1937, 38(1): 114.

[20] ALONSO J, MARTIN P, PAPINI P L. Wheeling around Von Neumann-Jordan Constant in Banach Spaces [J]. Studia Mathematica, 2008, 188: 135.

[21] Clarkson J A. Uniformly Convex Spaces[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1936, 40 (3): 396.

[22] DE C A U. Módulos De Convexidad Y Lisura En Espacios Normados [M]. Cáceres: Universidad De Extremadura, Departamento De Matemáticas, 1991.

[23] BRODSKII M S, MILMAN D P. On the Center of a Convex Set [J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1948, 59 (5): 837.

[24] PRUS S. Geometrical Background of Metric Fixed Point Theory[M]. Dordrecht: Springer Netherlands, 2001.

[25] GAO J, LAU K S. On Two Classes of Banach Spaces with Uniform Normal Structure[J]. Studia Mathematica, 1991, 99(1): 41.

(编辑:温泽宇)