文章编号:1674-2869(2026)01-0095-08

双摇篮五轴机床位置无关几何误差辨识

赵烨炜[1,2,3],孙 豪[3],陈绪兵[1,2],付中涛[1,2],朱泽润[*1,2,4]

1. 武汉工程大学机电工程学院,湖北 武汉 430205;
2. 智能焊接装备与软件工程技术湖北省研究中心(武汉工程大学),湖北 武汉 430205;
3. 武汉数字化设计与制造创新中心有限公司,湖北 武汉 430074;
4. 湖北省数字化纺织装备重点实验室(武汉纺织大学),湖北 武汉 430200

摘 要:装配误差是位置无关几何误差的主要来源,是影响五轴数控机床加工精度的重要因素,而最小完备误差项分析和位置无关几何误差精确辨识仍然面临巨大挑战。针对以上问题,本文提出一种位置无关几何误差辨识模型,该模型基于齐次坐标变换矩阵,结合微分运动学原理,建立了机床各部件的局部装配误差与末端轮廓误差之间的映射模型;进一步根据相邻坐标系位置全局误差与局部误差的映射关系,构建全局坐标系和局部坐标系的误差映射模型。针对冗余误差项影响的误差辨识精度问题,提出全局误差映射雅可比矩阵分析的方法,将42项局部误差参数优化转换为17项最小完备全局误差参数,确保误差辨识的完整性与非冗余性,相关结果与ISO 230-1:2012标准分析获得的位置无关几何误差项保持一致。在仿真验证方面,构建虚拟五轴机床模型,采用球杆仪仿真测试方案,设置测量系统误差为0.1 μm,对机床各部件装配误差进行辨识;验证结果显示,位置误差辨识精确度达0.992 9,姿态误差辨识精确度达0.954 9,证实了模型的有效性,为机床精度提升与误差补偿提供了科学依据。

关键词:位置无关几何误差;轮廓误差;参数辨识;微分运动学;五轴数控机床;雅可比矩阵

中图分类号:TH161 **文献标识码**:A **DOI**:10.19843/j.cnki.CN42-1779/TQ.202412025

Identification of position-independent geometric errors for five-axis machine tools with dual rotary tables

ZHAO Yewei[1,2,3], *SUN Hao*[3], *CHEN Xubing*[1,2], *FU Zhongtao*[1,2], *ZHU Zerun*[*1,2,4]

1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430205, China;
2. Hubei Research Center of Intelligent Welding Equipment and Software Engineering Technology (Wuhan Institute of Technology), Wuhan 430205, China;
3. Wuhan Digital Design and Manufacturing Innovation Center Co., Ltd, Wuhan 430074, China;
4. Hubei Digital Textile Equipment Key Laboratory (Wuhan Textile University), Wuhan 430200, China

Abstract: Assembly errors are the primary source of position-independent geometric errors (PIGEs) and a critical factor affecting the machining accuracy of five-axis CNC machine tools. However, analysis of a minimal and complete set of error terms and accurate identification of PIGEs remain challenging. To address these issues, an identification model for PIGEs was proposed. Based on the homogeneous coordinate transformation matrix and differential kinematics, a mapping was established between the local assembly errors of machine tool components and the resulting contour errors at the tool tip. By considering the

收稿日期:2024-12-27

基金项目:国家自然科学基金(52005201);湖北省数字化纺织装备重点实验室基金(DTL2024009);武汉工程大学研究生教育创新基金(CX2024444);武汉工程大学科学研究基金(K2024003)

作者简介:赵烨炜,硕士研究生。Email:2979547451@qq.com

***通信作者**:朱泽润,博士,副教授。Email:zhu.z.r@foxmail.com

引文格式:赵烨炜,孙豪,陈绪兵,等. 双摇篮五轴机床位置无关几何误差辨识[J]. 武汉工程大学学报,2026,48(1):95-102.

relationship between global and local errors in adjacent coordinate frames, an error mapping model integrating global and local coordinate systems was developed. To mitigate the impact of redundant error terms on identification accuracy, a Jacobian matrix-based analysis scheme for global error mapping was introduced, which optimized and reduced 42 local error parameters to a minimal and complete set of 17 global error parameters, ensuring both completeness and non-redundancy in error identification. These findings aligned with the PIGEs specified in the ISO 230−1: 2012 standard. For simulation validation, a virtual five-axis machine tool model was constructed, and ball-bar simulation test was implemented with a measurement system error set to 0.1 μm to identify assembly errors of individual axes. Results demonstrated a position error identification accuracy of 0.992 9 and an orientation error identification accuracy of 0.954 9, confirming the model's effectiveness and providing a scientific basis for improving machine tool accuracy and error compensation.

Keywords: position-independent geometric error; contour error; parameter identification; differential kinematics; five-axis CNC machine tool; Jacobian matrix

多轴数控机床因其灵活性、高精度和复杂形状加工能力,广泛应用于能源、化工、动力等行业复杂结构和曲面零件的精密制造[1]。以往研究表明,影响加工精度的主要因素包括动态误差[2]、热误差[3-4]、几何误差[5-6]和控制误差[7],其中几何误差对加工精度的影响尤为显著。机床关键零部件制造误差和装配误差不可避免,在五轴机床误差传递的复杂性和偏差放大效应下,刀具末端偏离规划位置,极大降低五轴机床轨迹精度[8]。此外,在机床长时间运行后,部件磨损会进一步导致几何误差问题更加突出[9]。

几何误差的辨识研究已引起广泛关注,然而针对位置无关几何误差(position-independent geometric errors, PIGEs)特性的研究和应用较少。Cheng等[10]发现几何误差是非线性的,因此分析关键因素及其几何误差之间的耦合效应对于提高机床精度具有重要意义。灵敏度分析用于确定每个参数对模型输出的影响,可分为全局灵敏度分析(global sensitivity analysis, GSA)[11]和局部灵敏度分析(local sensitivity analysis, LSA)[12]。LSA方法通过改变一个参数并保持其他参数不变来分析模型响应的变化,而GSA方法则通过同时改变所有参数来研究模型响应的变化。Yao等[13]通过简化加工系统并将其视为刚性多体系统来解释几何误差,基于偏导数法从误差分量的敏感性分析得出影响加工精度的主要误差因素。Zhang等[14]采用降维法构建基于方差的GSA,获得了三轴机床在其工作空间内4个位置点的灵敏度系数。黄浩等[15]运用矩阵微分法得到几何误差的敏感性系数,分析三轴机床结构与误差敏感源的映射规律。方浩等[16]基于动态灵敏度使用响应面法对机床立柱进行优化设计,使动态性能得到加强。

现有的研究主要集中在三轴机床的灵敏度分析上,其分析计算过程相对简单且计算资源的需求较低,能够快速评估单个参数对系统输出的敏感性。然而它仅关注参数在某一特定点附近的变化,难以全面评估多参数联合影响及识别参数耦合。而GSA可全面评估参数联合变化,识别耦合关系,但计算复杂度高、资源需求大。针对上述问题本文基于微分运动学原理,构建局部坐标系下的辨识雅可比矩阵,分析五轴数控机床轮廓误差源,建立局部与全局误差的线性关系,构建位置无关误差辨识模型,并结合理论与数据对误差映射雅可比矩阵进行奇异值分解与条件数分析,实现从42项局部误差到17项最小完备全局误差的高效转换。该方法兼具LSA的高效性和GSA的全面性,适用于复杂机床误差分析。通过仿真验证了位置无关误差辨识模型的正确性,为机床精度提升和误差补偿提供了科学依据。

1 五轴数控机床的轮廓误差模型

1.1 双摇篮式五轴机床运动学建模

以某五轴机床的装配过程为例进行分析,机床实体模型和运动链如图1所示。图1(b)中建立了工件坐标系$\{P_W\}$(O_W-$X_WY_WZ_W$)、刀具坐标系$\{P_T\}$(O_T-$X_TY_TZ_T$)和床身坐标系$\{P_0\}$(O_0-$X_0Y_0Z_0$)。X轴、Y轴、Z轴的位移量分别为x、y、z;B轴、C轴的旋转量分别为b、c;(x_T,y_T,z_T)为刀具坐标系原点在工件坐标系中的位置坐标;(i_T,j_T,k_T)为刀具轴线在工件坐标系X_W、Y_W、Z_W方向上的投影分量,表

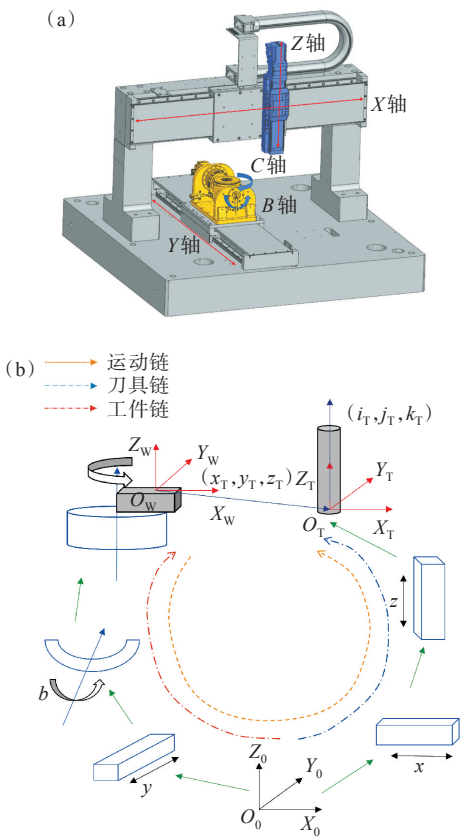

图1　五轴机床模型：(a)实体模型，(b)运动链

Fig. 1　Model of a five-axis machine tool: (a) solid model, (b) kinematic chain

示刀具的姿态。

沿着工件链，床身坐标系$\{P_0\}$到Y轴坐标系$\{P_Y\}$的齐次变换矩阵表示为：

$$\boldsymbol{H}_{0Y}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&y\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{1}$$

同理可得：

$$\boldsymbol{H}_{YB}=\begin{bmatrix}\cos b&0&\sin b&0\\0&1&0&0\\-\sin b&0&\cos b&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{H}_{BC}=\begin{bmatrix}\cos c&-\sin c&0&0\\\sin c&\cos c&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{H}_{CW}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&L\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{4}$$

其中，L为刀具的长度。

沿着刀具链，床身坐标系$\{P_0\}$到X轴坐标系$\{P_X\}$的齐次变换矩阵表示为：

$$\boldsymbol{H}_{0X}=\begin{bmatrix}1&0&0&x\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{5}$$

同理可得：

$$\boldsymbol{H}_{XZ}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&z\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{H}_{ZT}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&L\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{7}$$

由于整体链与工件链相反，所以对工件链的齐次坐标矩阵进行逆变换，则刀具坐标系$\{P_T\}$相对于工件坐标系$\{P_W\}$理想的正运动学变换矩阵为：

$$\boldsymbol{H}_{WT}=\left[\boldsymbol{H}_{CW}\right]^{-1}\left[\boldsymbol{H}_{BC}\right]^{-1}\left[\boldsymbol{H}_{YB}\right]^{-1}\left[\boldsymbol{H}_{0Y}\right]^{-1}\boldsymbol{H}_{0X}\cdot\boldsymbol{H}_{XZ}\cdot\boldsymbol{H}_{ZT} \tag{8}$$

对式(8)中各齐次坐标变换矩阵左乘相应误差变换矩阵，获得考虑误差的正运动学变换矩阵为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_{WT}=&\left(\Delta\boldsymbol{H}_{CW}\left[\boldsymbol{H}_{CW}\right]^{-1}\right)\left(\Delta\boldsymbol{H}_{BC}\left[\boldsymbol{H}_{BC}\right]^{-1}\right)\left(\Delta\boldsymbol{H}_{YB}\left[\boldsymbol{H}_{YB}\right]^{-1}\right)\\&\left(\Delta\boldsymbol{H}_{0Y}\left[\boldsymbol{H}_{0Y}\right]^{-1}\right)\left(\Delta\boldsymbol{H}_{0X}\boldsymbol{H}_{0X}\right)\cdot\left(\Delta\boldsymbol{H}_{XZ}\boldsymbol{H}_{XZ}\right)\cdot\\&\left(\Delta\boldsymbol{H}_{ZT}\boldsymbol{H}_{ZT}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

其中，$\Delta\boldsymbol{H}_{ij}$为$\{P_j\}$坐标系相对$\{P_i\}$坐标系的误差变换矩阵，表示为：

$$\Delta\boldsymbol{H}_{ij}=\begin{bmatrix}1&-\delta_{j\gamma}&\delta_{j\beta}&\delta_{jx}\\\delta_{j\gamma}&1&-\delta_{j\alpha}&\delta_{jy}\\-\delta_{j\beta}&\delta_{j\alpha}&1&\delta_{jz}\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{10}$$

其中，$\delta_{j\alpha}$、$\delta_{j\beta}$、$\delta_{j\gamma}$分别表示机床部件j运动一定距离(或角度)后绕X、Y、Z轴产生的角度误差，δ_{jx}、δ_{jy}、δ_{jz}分别表示机床部件j运动一定距离(或角度)后沿X、Y、Z轴产生的位移误差。

通过齐次坐标变换可求解得到工件坐标系下刀具末端的位置(x_T, y_T, z_T)与姿态(i_T, j_T, k_T)，对应变换关系为：

$$\begin{bmatrix}x_T&i_T\\y_T&j_T\\z_T&k_T\\1&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{H}_{WT}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix} \tag{11}$$

1.2　五轴机床的装配误差映射

根据五轴机床的运动学模型，各局部坐标系$\{P_i\}$到末端刀具坐标系$\{P_T\}$的齐次坐标变换矩阵$\boldsymbol{H}_{iT}$可表示为：

$$\boldsymbol{H}_{IT}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{3\times3} & \boldsymbol{p}_{3\times1}\\ \boldsymbol{0}_{1\times3} & 1\end{bmatrix} \tag{12}$$

其中，$\boldsymbol{0}_{1\times3}$为零矩阵，$\boldsymbol{R}_{3\times3}$为旋转变换矩阵，$\boldsymbol{p}_{3\times1}$为平移变换矩阵。

微分运动矩阵可以将局部装配误差从一个坐标系映射到另一个坐标系[15]，坐标系$\{P_I\}$到坐标系$\{P_{\mathrm{T}}\}$之间装配误差的微分运动矩阵表示为：

$$\boldsymbol{D}_{IT}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{3\times3}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{R}_{3\times3}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{p}}_{3\times3}\\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{R}_{3\times3}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \tag{13}$$

其中：$I\in\{X,Y,Z,B,C,\mathrm{W},\mathrm{T}\}$；$\hat{\boldsymbol{p}}$表示$\boldsymbol{p}_{3\times1}=\left[p_X,p_Y,p_Z\right]^{\mathrm{T}}$的反对称矩阵，表达式为：

$$\hat{\boldsymbol{p}}=\begin{bmatrix}0 & -p_Z & p_Y\\ p_Z & 0 & -p_X\\ -p_Y & p_X & 0\end{bmatrix} \tag{14}$$

其中，p_X、p_Y、p_Z分别表示坐标系$\{P_i\}$的原点到刀具坐标系$\{P_{\mathrm{T}}\}$原点的X、Y、Z轴平移分量。

将局部装配误差从局部坐标系变换到刀具坐标系，获得其在刀具坐标系中的表达式为：

$$\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{T},I}=\boldsymbol{D}_{IT}\Delta\boldsymbol{E}_{I,I} \tag{15}$$

其中：$\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{T},I}$表示刀具坐标系下刀具末端的装配误差，$\Delta\boldsymbol{E}_{I,I}$表示局部坐标系下机床部件$I$的装配误差。

遍历机床所有部件对应的局部坐标系，通过累加各部件装配误差在刀具坐标系下的贡献，最终得到刀尖点的位姿误差：

$$\Delta\boldsymbol{E}=\sum_{I\in\{X,Y,Z,B,C,\mathrm{W},\mathrm{T}\}}\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{T},I} \tag{16}$$

进一步表示为：

$$\Delta\boldsymbol{E}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{L}}\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}=\left[\boldsymbol{D}_{X\mathrm{T}},\boldsymbol{D}_{Y\mathrm{T}},\boldsymbol{D}_{Z\mathrm{T}},\boldsymbol{D}_{B\mathrm{T}},\boldsymbol{D}_{C\mathrm{T}},\boldsymbol{D}_{\mathrm{WT}},\boldsymbol{D}_{\mathrm{TT}}\right]\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{L},X}\\ \Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{L},Y}\\ \Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{L},Z}\\ \Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{L},B}\\ \Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{L},C}\\ \Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{L},\mathrm{W}}\\ \Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{L},\mathrm{T}}\end{bmatrix} \tag{17}$$

其中：$\boldsymbol{J}_{\mathrm{L}}$为映射机床各部件装配误差到刀具末端轮廓误差的雅可比矩阵，$\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}$为机床各部件局部坐标系的装配误差。

1.3 装配误差映射的局部坐标与全局坐标

全局坐标系中定义机床部件I的装配误差为$\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{G},I}$，与机床部件$I$相邻机床部件$K$的装配误差为$\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{G},K}$，机床部件$I$在全局坐标系下与局部坐标系下的装配误差变换关系为：

$$\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{L},I}=\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{G},I}-\boldsymbol{D}_{IK}\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{G},K} \tag{18}$$

其中：$\boldsymbol{D}_{IK}$表示坐标系$\{P_I\}$到坐标系$\{P_K\}$之间装配误差的微分运动矩阵。

全局坐标系和局部坐标系的装配误差变换关系为：

$$\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{G}}\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{G}} \tag{19}$$

其中，$\boldsymbol{J}_{\mathrm{G}}$为全局雅可比误差映射矩阵，$\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{G}}$为全局坐标系下各机床部件的装配误差。

通过雅可比矩阵$\boldsymbol{J}_{\mathrm{G}}$可以获得全局坐标系下的各部件装配误差$\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{G},I}$与局部坐标系下的各部件装配误差$\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{L},I}$的关系，式(19)展开形式为：

$$\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{L},X}\\ \Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{L},Y}\\ \Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{L},Z}\\ \Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{L},B}\\ \Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{L},C}\\ \Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{L},\mathrm{W}}\\ \Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{L},\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_6 & -\boldsymbol{D}_{XY} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6\\ \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{I}_6 & \boldsymbol{0}_6 & -\boldsymbol{D}_{YB} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6\\ -\boldsymbol{D}_{ZX} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{I}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6\\ \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{I}_6 & -\boldsymbol{D}_{BC} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6\\ \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{I}_6 & -\boldsymbol{D}_{\mathrm{CW}} & \boldsymbol{0}_6\\ \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6\\ \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & -\boldsymbol{D}_{\mathrm{TZ}} & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{0}_6 & \boldsymbol{I}_6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{G},X}\\ \Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{G},Y}\\ \Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{G},Z}\\ \Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{G},B}\\ \Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{G},C}\\ \Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{G},\mathrm{W}}\\ \Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{G},\mathrm{T}}\end{bmatrix} \tag{20}$$

其中，$\boldsymbol{I}_6$为6×6单位矩阵，$\boldsymbol{0}_6$为6×6零矩阵。

结合式(17)和式(19)，得到：

$$\Delta\boldsymbol{E}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{L}}\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{L}}\boldsymbol{J}_{\mathrm{G}}\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{G}} \tag{21}$$

式(21)表示全局坐标系下各机床部件装配误差$\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{G}}$与刀具坐标系下的末端综合轮廓误差$\Delta\boldsymbol{E}$的映射关系，该映射关系雅可比矩阵为：

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{L}}\boldsymbol{J}_{\mathrm{G}} \tag{22}$$

2 最小完备空间几何误差项分析

2.1 误差映射雅可比矩阵的观察特征

冗余的装配误差参数导致误差映射雅可比矩阵奇异。奇异值分解有利于确定互相依赖的列和选择冗余参数。$m\times n$的雅可比矩阵奇异值分解具有如下形式：

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \tag{23}$$

其中：$\boldsymbol{U}$为$m\times m$的正交矩阵，$\boldsymbol{V}$为$n\times n$的正交矩阵，$\boldsymbol{U}$和$\boldsymbol{V}$的列向量分别为左奇异向量和右奇异向量，m为采样位置数量的6倍，n为误差参数总数量；$\boldsymbol{\Sigma}$为$m\times n$的对角阵，表示为$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\Sigma}_1=\mathrm{diag}\left(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r\right)$，$\sigma_r$为雅克比矩阵$\boldsymbol{J}$的奇异值，$r$为非零奇异值的数量。

矩阵$\boldsymbol{J}$的条件数为最大奇异值$\sigma_{\max}$与最小奇

异值$\sigma_{\min}$的比值，表达式如下：

$$\mathrm{Cond}(\boldsymbol{J})=\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \tag{24}$$

如果矩阵$\boldsymbol{J}$非满秩，$\sigma_{\min}=0$，则条件数$\mathrm{Cond}(\boldsymbol{J})$无穷大。使用秩、条件数、奇异值分解及其维度，可以分析矩阵$\boldsymbol{J}$是否奇异，确定独立列的个数，并识别非独立列的位置及其依赖程度。

2.2　误差映射雅可比矩阵分析

为提高五轴机床定位精度，需综合考虑其固有的30项PIGEs以及工件与刀具安装引入的12项装配误差，其中PIGEs主要由轴间装配偏差导致，其表征形式与装配误差具有对应性，所以共有42项误差参数，如表1所示。然而若采用总计42项误差参数对五轴加工系统进行全局建模，将导致误差辨识模型呈现严重的病态性，极大增加参数辨识的难度。因此为了提升刀具末端位置精度，分析仅提取式(22)雅可比矩阵$\boldsymbol{J}$中与刀具末端位置偏差直接相关的前三行，构成子矩阵$\boldsymbol{J}_n$。

表1　误差参数与位置编号对照表

Table 1　Error parameters vs. position numbers

编号	X轴装配误差	编号	Y轴装配误差	编号	Z轴装配误差	编号	B轴装配误差	编号	C轴装配误差	编号	刀具装配误差	编号	工件装配误差
1	δ_{Xx}	7	δ_{Yx}	13	δ_{Zx}	19	δ_{Bx}	25	δ_{Cx}	31	δ_{Tx}	37	δ_{Wx}
2	δ_{Xy}	8	δ_{Xy}	14	δ_{Zy}	20	δ_{By}	26	δ_{Cy}	32	δ_{Ty}	38	δ_{Wy}
3	δ_{Xz}	9	δ_{Yz}	15	δ_{Zz}	21	δ_{Bz}	27	δ_{Cz}	33	δ_{Tz}	39	δ_{Wz}
4	$\delta_{X\alpha}$	10	$\delta_{Y\alpha}$	16	$\delta_{Z\alpha}$	22	$\delta_{B\alpha}$	28	$\delta_{C\alpha}$	34	$\delta_{T\alpha}$	40	$\delta_{W\alpha}$
5	$\delta_{X\beta}$	11	$\delta_{Y\beta}$	17	$\delta_{Z\beta}$	23	$\delta_{B\beta}$	29	$\delta_{C\beta}$	35	$\delta_{T\beta}$	41	$\delta_{W\beta}$
6	$\delta_{X\gamma}$	12	$\delta_{Y\gamma}$	18	$\delta_{Z\gamma}$	24	$\delta_{B\gamma}$	30	$\delta_{C\gamma}$	36	$\delta_{T\gamma}$	42	$\delta_{W\gamma}$

在机床工作空间内选取30个具有显著差异性的测量位姿构建误差映射矩阵。此时矩阵$\boldsymbol{J}_n$的维度为90 × 42($3m$×42，m=30)，条件数为3.11×10^{18}，秩为17，这表明在初始42项误差参数中，存在显著的冗余性，仅有17个独立参数对刀具末端位置偏差产生实质影响。分析矩阵发现存在19列全零列，这证明与之对应的19项误差参数对刀具末端位置偏差无任何贡献，故予以忽略。

针对剩余的23个非全零列(对应参数编号：5，6，10，12，16，17，19，21，22，24~26，28，29，31~39)，通过秩亏分析发现在参数5，6，16，19，21，26，34，35，36所对应的9列中，任意移除其中一列，矩阵的秩均保持不变。依据优先保留与工件或刀具端直接相关参数的原则，其余6组参数(5，6，16，19，21，26)作为备选的冗余参数。

为验证冗余性，将上述6个参数对应的列从$\boldsymbol{J}_n$中移除。此时矩阵维度变为90×17。重新计算得到新矩阵的条件数显著降低至7.87×10^3，同时秩仍为17，忽略工件和刀具装配姿态的相关误差项，这些参数与ISO 230−1:2012标准一致，其中直线轴有3个最小完备位置无关误差项，旋转轴有8个最小完备位置无关误差项。进一步分析发现，位于轴端的参数5、6、16和位于工件端的参数34、35、36具有依赖关系。即参数5和参数35，参数6和参数36，参数16和参数34对于误差映射是等效的。

3　仿真分析

3.1　误差参数设置与球杆仪仿真测试设计

由于球杆传感器只能测量沿其轴向的距离变化，因此为了与球杆长度变化方向保持一致，应将式(21)计算的位置变化投影到球杆的轴向上，表达式如下：

$$\Delta L=\left[\left(\boldsymbol{H}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\cdot\boldsymbol{O}\right]^{\mathrm{T}}\cdot\Delta\boldsymbol{E}=\left(\left[\left(\boldsymbol{H}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\cdot\boldsymbol{O}\right]^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{J}_n\right)\cdot\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{G}}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{p}}\cdot\Delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{G}} \tag{25}$$

其中：ΔL是球杆仪的长度变化，$\boldsymbol{J}_{\mathrm{p}}$为球杆仪误差辨识雅可比矩阵，$\boldsymbol{O}=[O_1,O_2,O_3]^{\mathrm{T}}$是球杆轴向在工件坐标系中的单位方向向量。

分析球杆仪误差辨识雅可比矩阵$\boldsymbol{J}_{\mathrm{p}}$，发现球杆仪只有14项误差参数具有有效值。根据ISO 230-1:2012标准对Mikron UCP800高速铣削加工中心的实际误差量级进行设置，具体误差参数设置如表2所示，与表1相对应。

通过旋转刀具中心点(rotational tool center point，RTCP)编程实现五轴机床的刀尖点跟随功能，使得不同位置处刀具端球心到工件端球心具有相同的距离L，距离L设置为100 mm，刀具端球心的位置设置为[50，30，10] mm。在工件坐标系上，选择3个平面，分别为$X_{\mathrm{W}}O_{\mathrm{W}}Z_{\mathrm{W}}$、$Y_{\mathrm{W}}O_{\mathrm{W}}Z_{\mathrm{W}}$和$X_{\mathrm{W}}O_{\mathrm{W}}Y_{\mathrm{W}}$，如图2所示。

表2 五轴机床装配误差参数

Table 2 Assembly error parameters of each axis of the five-axis machine tool

机床部件	δ_{jx} / μm	δ_{jy} / μm	δ_{jz} / μm	$\delta_{j\alpha}$ / 10^{-5}rad	$\delta_{j\beta}$ / 10^{-5}rad	$\delta_{j\gamma}$ / 10^{-5}rad
X轴	0	0	0	0	0	0
Y轴	0	0	0	−2.1	0	3.9
Z轴	0	0	0	0	6.3	0
B轴	0	0	0	4.5	0	4.3
C轴	6.2	0	0	7.2	−6.7	0
工件	−4.4	5.2	−6.7	0	0	0
刀具	4.6	4.1	5.4	0	0	0

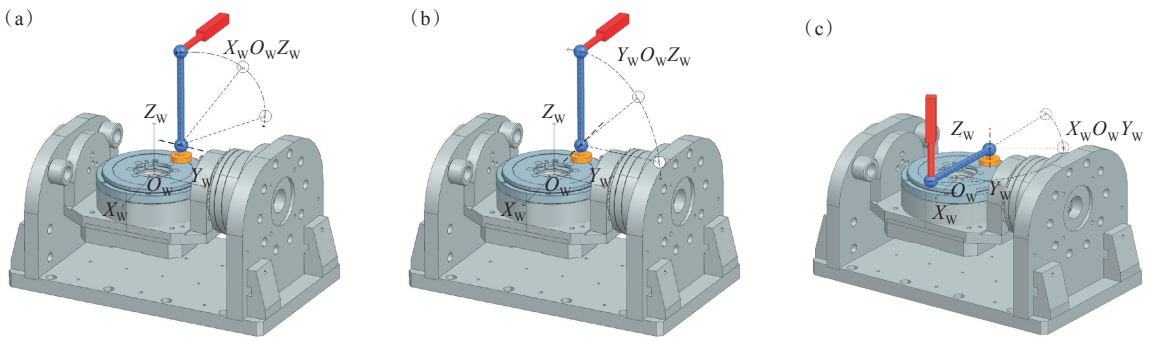

图2 工件坐标系下的球杆仪测试平面

Fig. 2 The ball-bar test plane in the work-piece coordinate system

分别对3个平面进行测量，在$X_WO_WZ_W$和$Y_WO_WZ_W$平面上进行3次测量，每次测量角度增加π/9 rad。在$X_WO_WY_W$平面上进行3次测量，每次测量角度增加π/6 rad，3个平面共有3×3=9个采样点。针对每个工件坐标系测试点，结合RTCP功能，通过改变旋转轴位置进行测量，其中B轴进行3次测量，选择范围为$[-\pi/4, \pi/4]$ rad，C轴进行6次测量，选择范围为$[0, 5\pi/3]$ rad，一共进行3×6=18个机床位置的测量，综上共有9×18=162个采样点。

3.2 装配误差参数辨识结果

基于上文设计的采样点，进行仿真测试，采集数据如图3所示。由于采样过程中实际数据与采样数据之间存在测量误差，因此在仿真中设定测量误差为0.1 μm来模拟实际数据，采用该数据进行轮廓误差辨识。

把采样数据代入式(25)得到误差辨识雅可比矩阵$\boldsymbol{J}_p$，并结合ΔL利用最小二乘法辨识获得旋量全局坐标系下的14项误差参数，表达式如下：

$$\Delta \boldsymbol{E}_G = (\boldsymbol{J}_p^T \boldsymbol{J}_p)^{-1} = \boldsymbol{J}_p^T \Delta L \tag{26}$$

将辨识得到的14项误差参数与表2对比，其中位置辨识结果与设定结果的偏差精确度最小为0.992 9，姿态辨识结果与设定结果的偏差精确度最小为0.954 9，误差辨识结果如表3所示。

基于最小完备空间几何误差项分析结果，利用实际正向运动学矩阵和球杆仪误差辨识雅可比矩阵分别计算由PIGEs引起的刀具末端的轮廓误

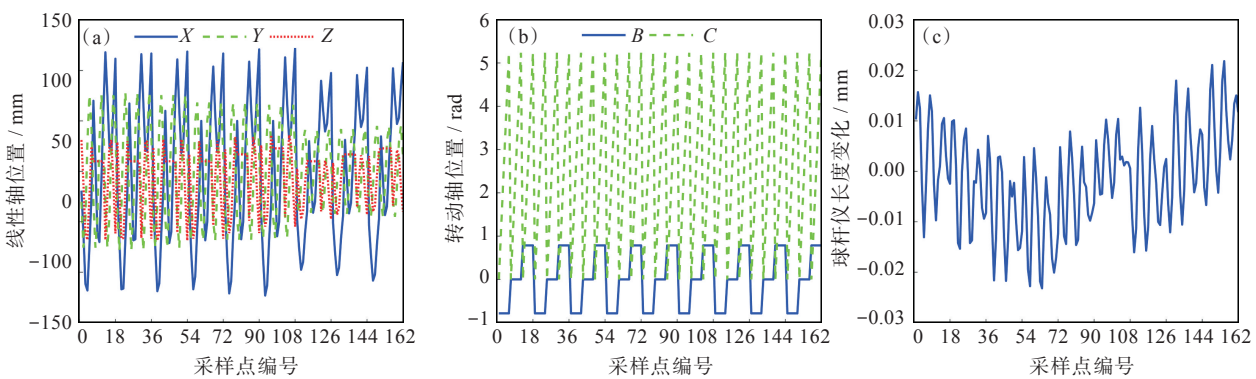

图3 不同采样点处各机床运动轴的测试数据曲线：(a)线性轴位置，(b)转动轴位置，(c)球杆仪长度变化

Fig. 3 Test data curves of each machine tool axes at sampling points: (a) linear axis position, (b) rotational axis angle, (c) ball bar length variation

表3　五轴机床装配误差参数辨识结果

Table 3　Identification results of assembly error parameters of five-axis machine tool

编号	辨识误差值 / μm	精确度	编号	辨识误差值 / 10^{-5} rad	精确度
25	6.195 3	0.999 2	10	−2.057 4	0.971 3
31	−4.397 3	0.999 4	12	3.886 6	0.996 6
32	5.179 2	0.996 0	17	6.270 1	0.995 3
33	−6.747 5	0.992 9	22	4.493 9	0.954 9
37	4.600 5	0.999 9	24	4.317 1	0.996 0
38	4.082 3	0.995 7	28	7.208 1	0.998 9
39	5.396 6	0.999 4	29	6.692 1	0.998 8

差，如图4所示。根据式(11)的实际正向运动学矩阵，采用表2所示的装配误差参数，得到理论轮廓偏差最大约为36.78 μm，基于旋量理论[18]，采用表3辨识得到的装配误差参数，通过球杆仪误差辨识雅可比矩阵得到的预测轮廓偏差最大约为36.81 μm。

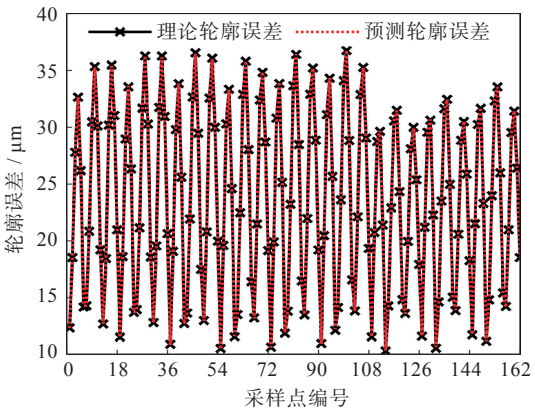

图4　刀具末端的轮廓误差预测效果对比

Fig. 4　Comparison of contour error identification effects at the tool tips

通过实际正向运动学矩阵和本文提出的球杆仪误差辨识雅可比矩阵计算得到的刀具末端的轮廓误差几乎一致，两者偏差小于0.065 3 μm，如图5所示，证明位姿无关轮廓误差辨识方法有效。

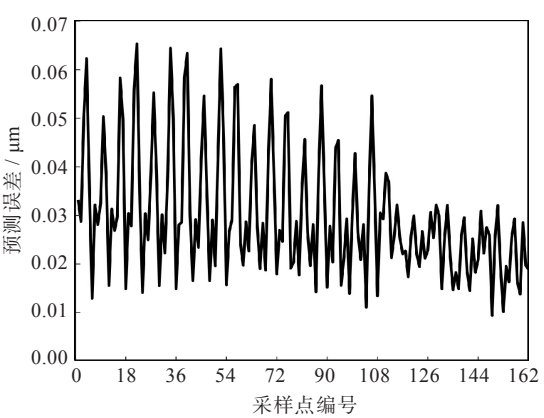

图5　轮廓误差预测偏差

Fig. 5　Contour error prediction deviation

4　结　论

本文针对冗余误差项导致误差辨识模型参数冗余、辨识精度不稳定等问题，通过构建误差映射关系和线性变换关系，实现了对几何误差的精准建模与分析，并利用球杆仪仿真测试，将其与设定的机床误差进行对比分析，具体结论如下：

(1)依据ISO 230-1:2012标准，通过矩阵理论和仿真数据相结合的方法，对全局雅可比矩阵进行了深入分析，实现了从42项局部误差参数到17项最小完备全局误差参数的优化转换，确保了误差辨识的完整性与非冗余性。

(2)通过虚拟五轴机床的球杆仪进行仿真测试，测试结果表明，该模型能够实现机床各运动轴装配误差(位置偏差和姿态偏差)的精确辨识，姿态辨识结果和位置辨识结果与设定结果的偏差最小精确度为0.954 9和0.992 9。基于最小完备空间几何误差项分析结果，采用设定的装配误差参数对球杆仪进行预测后的最大轮廓偏差不超过0.065 3 μm，说明该模型能够显著提升机床的定位精度。

参考文献

[1] ZHANG Z L, CAI L G, CHENG Q, et al. A geometric error budget method to improve machining accuracy reliability of multi-axis machine tools[J]. Journal of Intelligent Manufacturing, 2019, 30(2): 495−519.

[2] ANDOLFATTO L, LAVERNHE S, MAYER J R R. Evaluation of servo, geometric and dynamic error sources on five-axis high-speed machine tool[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2011, 51(10/11): 787−796.

[3] ABDULSHAHED A M, LONGSTAFF A P, FLETCHER S, et al. Thermal error modelling of a gantry-type 5-axis machine tool using a grey neural

network model [J]. Journal of Manufacturing Systems, 2016, 41: 130-142.

[4] 杜柳青,吕发良,余永维. 数字孪生下基于DACS-MFAC的数控机床热误差自适应预测方法[J]. 仪器仪表学报,2024,45(4):248-257.

[5] DING S, SONG Z Q, WU W W, et al. Geometric error modeling and compensation of horizontal CNC turning center for TI worm turning[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2020, 167: 105266.

[6] 杨建军,司林林,林守金,等. 齿轮加工机床几何误差补偿研究综述[J]. 机床与液压,2024,52(19):174-187.

[7] 李梦,叶姣,孙诚,等. 绳驱并联机器人的滑轮运动学研究[J]. 武汉工程大学学报,2024,46(2):203-208.

[8] CHENG Q, ZHANG Z L, ZHANG G J. Geometric accuracy allocation for multi-axis CNC machine tools based on sensitivity analysis and reliability theory[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2015, 229(6): 1134-1149.

[9] ZHANG Z L, LIU Z F, CAI L G, et al. An accuracy design approach for a multi-axis NC machine tool based on reliability theory[J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2017, 91(5/6/7/8): 1547-1566.

[10] CHENG Q, SUN B W, LIU Z F, et al. Key geometric error extraction of machine tool based on extended Fourier amplitude sensitivity test method [J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2017, 90(9/10/11/12): 3369-3385.

[11] 范晋伟,袁帅,唐宇航,等. 五坐标机床误差因素全局灵敏度分析方法研究[J]. 制造技术与机床,2017(8):70-75.

[12] 李晓晓,孙付春,吴昊荣. 数控机床关键几何误差元素溯源研究[J]. 组合机床与自动化加工技术,2023(1):147-151,156.

[13] YAO H H, LI Z Q, ZHAO X S, et al. Modeling of kinematics errors and alignment method of a swing arm ultra-precision diamond turning machine [J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2016, 87(1/2/3/4): 165-176.

[14] ZHANG X F, ZHANG Y M, PANDEY M D. Global sensitivity analysis of a CNC machine tool: application of MDRM [J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2015, 81(1/2/3/4): 159-169.

[15] 黄浩,黄筱调,于春建,等. 可重构三轴机床几何误差敏感性变化规律预测[J]. 南京工业大学学报(自然科学版),2019,41(3):343-353.

[16] 方浩,王彦伟. 基于动态灵敏度的数控机床立柱优化设计[J]. 武汉工程大学学报,2018,40(5):569-574.

[17] YANG J X, DING H. A new position independent geometric errors identification model of five-axis serial machine tools based on differential motion matrices[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2016, 104: 68-77.

[18] YANG J X, MAYER J R R, ALTINTAS Y. A position independent geometric errors identification and correction method for five-axis serial machines based on screw theory [J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2015, 95: 52-66.

本文编辑:霍淑利