

群 U_{6n} 上 Cayley 图的完美边态转移

赵旭洋, 王维忠

(兰州交通大学 数理学院, 兰州 730070)

摘要: 设 $U_{6n} = \langle a, b \mid a^{2n} = b^3 = 1, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$ 是一个有限群, $1 \notin S \subset U_{6n}$ 且 $S = S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$. 利用图的谱理论和群的表示理论, 研究群 U_{6n} 上 Cayley 图 $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 的完美边态转移问题, 并刻画了 $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 上允许发生完美边态转移的充要条件.

关键词: Cayley 图; 完美边态转移; 图的谱; 群的表示

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2026)03-0528-07

Perfect Edge State Transfer of Cayley Graphs over U_{6n} Groups

ZHAO Xuyang, WANG Weizhong

(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Let $U_{6n} = \langle a, b \mid a^{2n} = b^3 = 1, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$ be a finite group, $1 \notin S \subset U_{6n}$ and $S = S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$. By using spectral theory and representation theory of groups, we study the perfect edge state transfer problem of Cayley graphs over U_{6n} groups, and characterize the necessary and sufficient conditions for allowing perfect edge state transfer to occur on $\text{Cay}(U_{6n}, S)$.

Keywords: Cayley graph; perfect edge state transfer; spectrum of graph; representation of group

在量子计算与量子通信领域, 完美态转移(简称 PST)^[1]作为一种无损耗的量子态传输机制, 是实现高效量子网络信息传输的关键. 在代数图论中, 若将网络视为图, 则实现高效信息传输的核心问题之一是刻画具有完美态转移的图^[2-8].

设 $\Gamma = (V, E)$ 是一个简单无向图, 其邻接矩阵为 A , 图 Γ 的转移矩阵定义为

$$H(t) = H_A(t) = \exp\{-itA\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k t^k A^k}{k!}, \quad 0 < t \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}.$$

若 $H(t)$ 的 (u, v) -元的模 $|H_{u,v}(t)| = 1$, 则称图 Γ 在时刻 t 存在从顶点 u 到 v 的完美态转移. 若 $|H_{u,u}(t)| = 1$, 则称图 Γ 在顶点 u 处是周期的, 且周期为 t ; 若 Γ 的每个顶点在时刻 t 均具有周期性, 则 Γ 称为周期图.

文献[9]将图上顶点间完美态转移的概念推广到完美边态转移(简称 PEST), 并引入了如下完美边态转移的定义: 设 $v \in V(\Gamma)$, e_v 表示在 v 位置元素为 1, 而其余位置元素为 0 的单位向量. 若对图 Γ 中的任意两条边 (a, b) 和 (c, d) , 存在一个复数 γ 且 $|\gamma| = 1$, 使得在某一时刻 t , 有 $H(t)(e_a - e_b) = \gamma(e_c - e_d)$ 或 $\left| \frac{1}{2}(e_c - e_d)^T H(t)(e_a - e_b) \right|^2 = 1$, 则称图 Γ 在边 (a, b) 和 (c, d) 之间存在完美边态转移. 若边 (a, b) 在时刻 t 有到自身的完美边态转移, 则称 (a, b) 是周期的, 且周期为 t . 图上允许发生完美态转

收稿日期: 2025-09-10. 网络首发日期: 2026-04-03.

第一作者简介: 赵旭洋(2000—), 男, 汉族, 硕士研究生, 从事代数图论的研究, E-mail: zxyhdsm@163.com. **通信作者简介:** 王维忠(1976—), 男, 汉族, 博士, 教授, 从事代数图论的研究, E-mail: wangwzh@mail.lzjtu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11961040)和甘肃省自然科学基金(批准号: 20JR5RA418).

网络首发地址: <https://link.cnki.net/urlid/22.1340.o.20260401.2002.002>.

移较罕见^[9], 文献[10]研究表明, 当顶点数固定时, 具有完美边态转移的图比具有完美态转移的图多. 因此, 研究图上的完美边态转移问题对构建高效量子网络有较大意义.

Cayley 图因其有良好的对称性而成为实现完美(边)态转移的理想载体^[11-14], 本文主要研究 Cayley 图 $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 上的完美边态转移问题.

1 预备知识

定义 1 设 G 是一个有限群, S 是 G 的一个不包含单位元的逆闭子集, G 关于 S 的 Cayley 图 $\text{Cay}(G, S)$ 是指以 $V=G$ 为顶点集、 $E=\{(g, sg) \mid g \in G, s \in S\}$ 为边集的简单无向图.

1.1 U_{6n} 的不可约表示和特征标

设 $n \geq 1$ 为整数, 则群 U_{6n} 定义为 $U_{6n} = \langle a, b \mid a^{2n} = b^3 = 1, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$. U_{6n} 有 $3n$ 个共轭类: $\{a^{2k}\}$, $\{a^{2k}b, a^{2k}b^2\}$, $\{a^{2k+1}, a^{2k+1}b, a^{2k+1}b^2\} (0 \leq k \leq n-1)$.

为叙述方便, 将 U_{6n} 中的元做如下标记: 对非负整数 u , 若 $0 \leq u \leq n-1$, 则 u 对应于元素 a^{2k} ; 若 $n \leq u \leq 2n-1$, 则 u 对应于元素 $a^{2k}b$; 若 $2n \leq u \leq 3n-1$, 则 u 对应于元素 $a^{2k}b^2$; 若 $3n \leq u \leq 4n-1$, 则 u 对应于元素 a^{2k+1} ; 若 $4n \leq u \leq 5n-1$, 则 u 对应于元素 $a^{2k+1}b$; 若 $5n \leq u \leq 6n-1$, 则 u 对应于元素 $a^{2k+1}b^2$.

引理 1^[15] 设 $n \geq 1$ 为整数, $\epsilon = e^{2\pi i/2n} = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ 为一个 $2n$ 次单位根, 且 $\epsilon \neq -1$, 则群 U_{6n} 的不可约表示和不可约特征标分别如表 1 和表 2 所示.

表 1 群 U_{6n} 的不可约表示 ($\omega = e^{2\pi i/3}$)
Table 1 Irreducible representations of U_{6n} group ($\omega = e^{2\pi i/3}$)

ρ	$a^{2k} (0 \leq k \leq n-1)$	$a^{2k+1} (0 \leq k \leq n-1)$	$a^{2k}b (0 \leq k \leq n-1)$
$\rho_j (0 \leq j \leq 2n-1)$	ϵ^{2kj}	$\epsilon^{(2k+1)j}$	ϵ^{2kj}
$\rho_l (0 \leq l \leq n-1)$	$\begin{pmatrix} \epsilon^{2kl} & 0 \\ 0 & \epsilon^{2kl} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \epsilon^{(2k+1)l} \\ \epsilon^{(2k+1)l} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \omega \epsilon^{2kl} & 0 \\ 0 & \omega^2 \epsilon^{2kl} \end{pmatrix}$

表 2 群 U_{6n} 的特征标
Table 2 Character of U_{6n} group

ρ	$a^{2k} (0 \leq k \leq n-1)$	$a^{2k+1} (0 \leq k \leq n-1)$	$a^{2k}b (0 \leq k \leq n-1)$
$\rho_j (0 \leq j \leq 2n-1)$	ϵ^{2kj}	$\epsilon^{(2k+1)j}$	ϵ^{2kj}
$\rho_l (0 \leq l \leq n-1)$	$2\epsilon^{2kl}$	0	$-\epsilon^{2kl}$

1.2 $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 的谱

当 S 是群 G 的共轭逆闭(即 $\forall s \in S, g \in G$ 有 $gs g^{-1} \in S$ 且 $S = S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$)子集时, Cayley 图 $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ 的谱与群 G 的不可约表示和特征标之间有如下关系.

引理 2^[16] 设群 $G = \{g_1, \dots, g_n\}$, $\phi^{(i)} (1 \leq i \leq t)$ 是 G 的次数为 d_i 的所有两两非等价的不可约酉表示, χ_i 是 $\phi^{(i)}$ 的特征标. 若 S 是 G 的一个不包含单位元的非空共轭逆闭子集, 则 Cayley 图 $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_t$, 其中 $\lambda_k = \frac{1}{d_k} \sum_{s \in S} \chi_k(s) (1 \leq k \leq t)$, 且 λ_k 的重数为 d_k^2 . 此外, 向量

$$v_{ij}^{(k)} = \sqrt{\frac{d_k}{|G|}} (\phi_{ij}^{(k)}(g_1), \dots, \phi_{ij}^{(k)}(g_n))^T, \quad 1 \leq i, j \leq d_k$$

构成特征值 λ_k 的特征空间 V_{λ_k} 的标准正交基, 其中 $\phi_{ij}^{(k)}(g_r)$ 为矩阵 $\phi^{(k)}(g_r)$ 的 (i, j) -元.

下面考虑群 $U_{6n} (n \in \mathbb{Z}^+)$ 上 Cayley 图 $\Gamma = \text{Cay}(U_{6n}, S)$ 的谱, 这里 S 是 U_{6n} 的一个不含单位元的非空共轭逆闭子集.

引理 3 设 $\Gamma = \text{Cay}(U_{6n}, S)$ 是群 U_{6n} 上的 Cayley 图, S 是 U_{6n} 的一个不含单位元的非空共轭逆闭子集, $\rho_j (0 \leq j \leq 2n-1)$ 和 $\rho_l (0 \leq l \leq n-1)$ 分别为群 U_{6n} 的一次和二次不可约表示, 则图 Γ 的特征值和特征向量如下:

1) Γ 的重数为 1 的特征值及其对应的特征向量分别为

$$\lambda_j = \sum_{a^{2k} \in S} \epsilon^{2kj} + \sum_{a^{2k}b^r \in S (r=1,2)} \epsilon^{2kj} + \sum_{a^{2k+1}b^s \in S (s=0,1,2)} \epsilon^{j(2k+1)} \tag{1}$$

和

$$\mathbf{v}_j=\sqrt{\frac{1}{6n}}\left(\left\{\epsilon^{2kj}\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{\epsilon^{2kj}\omega\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{\epsilon^{2kj}\omega^2\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{\epsilon^{(2k+1)j}\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{\epsilon^{(2k+1)j}\omega\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{\epsilon^{(2k+1)j}\omega^2\right\}_{k=0}^{n-1}\right)^{\mathrm{T}}.$$

(2)

2) Γ 的重数为 4 的特征值及其对应的特征向量分别为

$$\delta_l=\frac{1}{2}\left(\sum_{a^{2k}\in S}2\epsilon^{2kl}-\sum_{a^{2k}b^q\in S(q=1,2)}\epsilon^{2kl}\right)$$

(3)

和

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i^{(1)}&=\sqrt{\frac{1}{3n}}\left(\left\{\epsilon^{2lk}\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{\epsilon^{2lk}\omega\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{\epsilon^{2lk}\omega^2\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{0\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{0\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{0\right\}_{k=0}^{n-1}\right)^{\mathrm{T}},\\\mathbf{v}_i^{(2)}&=\sqrt{\frac{1}{3n}}\left(\left\{0\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{0\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{0\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{\epsilon^{l(2k+1)}\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{\epsilon^{l(2k+1)}\omega\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{\epsilon^{l(2k+1)}\omega^2\right\}_{k=0}^{n-1}\right)^{\mathrm{T}},\\\mathbf{v}_i^{(3)}&=\sqrt{\frac{1}{3n}}\left(\left\{0\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{0\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{0\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{\epsilon^{l(2k+1)}\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{\epsilon^{l(2k+1)}\omega\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{\epsilon^{l(2k+1)}\omega^2\right\}_{k=0}^{n-1}\right)^{\mathrm{T}},\\\mathbf{v}_i^{(4)}&=\sqrt{\frac{1}{3n}}\left(\left\{\epsilon^{2lk}\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{\epsilon^{2lk}\omega\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{\epsilon^{2lk}\omega^2\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{0\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{0\right\}_{k=0}^{n-1},\left\{0\right\}_{k=0}^{n-1}\right)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

(4)

证明: 由引理 1 和引理 2 可直接推得.

2 主要结果

引理 4^[10] 设 Γ 是一个正则图, $(a,b),(c,d)$ 是 Γ 的两条边, $\mathbf{Q}_{ab}=\frac{1}{2}(\mathbf{e}_a-\mathbf{e}_b)(\mathbf{e}_a-\mathbf{e}_b)^{\mathrm{T}}, \mathbf{Q}_{cd}=\frac{1}{2}(\mathbf{e}_c-\mathbf{e}_d)(\mathbf{e}_c-\mathbf{e}_d)^{\mathrm{T}}, \mathbf{q}_i$ 是 Γ 的特征值 λ_i 对应的特征向量, $\mathbf{E}_i=\mathbf{q}_i\mathbf{q}_i^*$ 是对应于 λ_i 的投影矩阵. 令 Θ^+ 和 Θ^- 分别为使得 $\mathbf{E}_i(\mathbf{e}_a-\mathbf{e}_b)=\mathbf{E}_i(\mathbf{e}_c-\mathbf{e}_d)$ 和 $\mathbf{E}_i(\mathbf{e}_a-\mathbf{e}_b)=-\mathbf{E}_i(\mathbf{e}_c-\mathbf{e}_d)$ 成立的所有特征值 λ_i 的集合. 若 $\lambda\in\Theta^+$, 则 Γ 在时刻 t 存在从 $\mathbf{Q}_{ab}$ 到 $\mathbf{Q}_{cd}$ 的完美边态转移当且仅当下列条件成立:

- 1) $\mathbf{e}_a-\mathbf{e}_b$ 和 $\mathbf{e}_c-\mathbf{e}_d$ 是强同谱的;
- 2) 存在整数 k , 使得对每个 $\lambda_i\in\Theta^+$ 有 $t(\lambda-\lambda_i)=2k\pi$;
- 3) 存在整数 k , 使得对每个 $\lambda_i\in\Theta^-$ 有 $t(\lambda-\lambda_i)=(2k+1)\pi$.

尽管引理 4 给出了正则图上存在 PEST 的充要条件, 但在实际应用中通常需要大量计算. 由于 Cayley 图与有限群的表示理论关系密切, 因此本文将利用图的谱理论及有限群的表示理论, 讨论 $\text{Cay}(U_{6n},S)$ 上是否能发生完美边态转移的条件.

设 $\text{Cay}(G,S)$ 是 n 阶群 G 上的 Cayley 图, 其邻接矩阵为 $\mathbf{A}$, 转移矩阵 $\mathbf{H}(t)=\exp\{-it\mathbf{A}\}$. 令 λ_h 为 $\text{Cay}(G,S)$ 的特征值, $\mathbf{q}_h$ 为属于 $\lambda_h(1\leq h\leq n)$ 的特征向量, 则矩阵 $\mathbf{A}$ 的谱分解为 $\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{E}_1+\cdots+\lambda_n\mathbf{E}_n$, 其中投影矩阵 $\mathbf{E}_h=\mathbf{q}_h\mathbf{q}_h^*$ ($\mathbf{q}_h^*$ 为 $\mathbf{q}_h$ 的共轭转置, $1\leq h\leq n$) 满足 $\mathbf{E}_h\mathbf{E}_k=\begin{cases}\mathbf{E}_h, & h=k, \\ 0, & h\neq k.\end{cases}$ 因此, 转移矩阵可分解为

$$\mathbf{H}(t)=\exp\{-i\lambda_1t\}\mathbf{E}_1+\cdots+\exp\{-i\lambda_nt\}\mathbf{E}_n.$$

(5)

引理 5 设 $\Gamma=\text{Cay}(U_{6n},S)$ 是群 U_{6n} 上的 Cayley 图, S 是 U_{6n} 的一个不含单位元的非空共轭逆闭子集, 则图 Γ 的转移矩阵 $\mathbf{H}(t)$ 的 (u,v) -元如下:

- 1) 当 $0\leq u,v\leq 3n-1$ 或 $3n\leq u,v\leq 6n-1$ 时,

$$(\mathbf{H}(t))_{u,v}=\begin{cases}\frac{1}{6n}\left(\sum_{j=0}^{2n-1}\epsilon^{2(u-v)j}\exp\{-i\lambda_jt\}\right)+\frac{2}{3n}\left(\sum_{l=0}^{n-1}\epsilon^{2(u-v)l}\exp\{-i\delta_l t\}\right), & pn\leq u,v\leq (p+1)n-1, \\ \frac{1}{6n}\left(\sum_{j=0}^{2n-1}\epsilon^{2(u-v)j}\exp\{-i\lambda_jt\}\right)-\frac{1}{3n}\left(\sum_{l=0}^{n-1}\epsilon^{2(u-v)l}\exp\{-i\delta_l t\}\right), & \text{其他,}\end{cases}$$

(6)

其中 $0\leq p\leq 5$ 为整数;

- 2) 当 $0\leq u\leq 3n-1, 3n\leq v\leq 6n-1$ 时,

$$(\mathbf{H}(t))_{u,v} = \frac{1}{6n} \left(\sum_{j=0}^{2n-1} \epsilon^{[2(u-v)-1]j} \exp\{-i\lambda_j t\} \right); \tag{7}$$

3) 当 $3n \leq u \leq 6n-1, 0 \leq v \leq 3n-1$ 时,

$$(\mathbf{H}(t))_{u,v} = \frac{1}{6n} \left(\sum_{j=0}^{2n-1} \epsilon^{[2(u-v)+1]j} \exp\{-i\lambda_j t\} \right). \tag{8}$$

证明: 由式(2)可得对应 Γ 的一重特征值的投影矩阵 $\mathbf{E}_j$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_j &= \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^* = \sqrt{\frac{1}{6n}} \left(\{ \epsilon^{2kj} \}_{k=0}^{n-1}, \{ \epsilon^{2kj} \}_{k=0}^{n-1}, \{ \epsilon^{2kj} \}_{k=0}^{n-1}, \{ \epsilon^{(2k+1)j} \}_{k=0}^{n-1}, \{ \epsilon^{(2k+1)j} \}_{k=0}^{n-1}, \{ \epsilon^{(2k+1)j} \}_{k=0}^{n-1} \right)^T \cdot \\ &\sqrt{\frac{1}{6n}} \left(\{ \epsilon^{-2kj} \}_{k=0}^{n-1}, \{ \epsilon^{-2kj} \}_{k=0}^{n-1}, \{ \epsilon^{-2kj} \}_{k=0}^{n-1}, \{ \epsilon^{-(2k+1)j} \}_{k=0}^{n-1}, \{ \epsilon^{-(2k+1)j} \}_{k=0}^{n-1}, \{ \epsilon^{-(2k+1)j} \}_{k=0}^{n-1} \right) = \\ &\frac{1}{6n} \begin{pmatrix} \mathbf{\Omega} & \mathbf{\Omega} & \mathbf{\Omega} & \epsilon^{-j}\mathbf{\Omega} & \epsilon^{-j}\mathbf{\Omega} & \epsilon^{-j}\mathbf{\Omega} \\ \mathbf{\Omega} & \mathbf{\Omega} & \mathbf{\Omega} & \epsilon^{-j}\mathbf{\Omega} & \epsilon^{-j}\mathbf{\Omega} & \epsilon^{-j}\mathbf{\Omega} \\ \mathbf{\Omega} & \mathbf{\Omega} & \mathbf{\Omega} & \epsilon^{-j}\mathbf{\Omega} & \epsilon^{-j}\mathbf{\Omega} & \epsilon^{-j}\mathbf{\Omega} \\ \epsilon^j\mathbf{\Omega} & \epsilon^j\mathbf{\Omega} & \epsilon^j\mathbf{\Omega} & \mathbf{\Omega} & \mathbf{\Omega} & \mathbf{\Omega} \\ \epsilon^j\mathbf{\Omega} & \epsilon^j\mathbf{\Omega} & \epsilon^j\mathbf{\Omega} & \mathbf{\Omega} & \mathbf{\Omega} & \mathbf{\Omega} \\ \epsilon^j\mathbf{\Omega} & \epsilon^j\mathbf{\Omega} & \epsilon^j\mathbf{\Omega} & \mathbf{\Omega} & \mathbf{\Omega} & \mathbf{\Omega} \end{pmatrix} = \frac{1}{6n} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_3 \otimes \mathbf{\Omega} & \epsilon^{-j}\mathbf{J}_3 \otimes \mathbf{\Omega} \\ \epsilon^j\mathbf{J}_3 \otimes \mathbf{\Omega} & \mathbf{J}_3 \otimes \mathbf{\Omega} \end{pmatrix}, \tag{9} \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{J}_3$ 是 3 阶全 1 矩阵, $\mathbf{\Omega}$ 是首行为 $(1, \epsilon^{-2j}, \epsilon^{-4j}, \dots, \epsilon^{-2j(n-1)}) (0 \leq j \leq 2n-1)$ 的循环矩阵.

同理, 由式(4)可得 Γ 的四重特征值对应的投影矩阵为

$$\mathbf{E}_l^{(1)} = \frac{1}{3n} \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_l^{(2)} = \frac{1}{3n} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Lambda}^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_l^{(3)} = \frac{1}{3n} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Lambda} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_l^{(4)} = \frac{1}{3n} \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

其中 $\mathbf{\Lambda}$ 是以 $(\mathbf{\Omega}', \omega^2 \mathbf{\Omega}', \omega \mathbf{\Omega}')$ 为首行的循环矩阵, 且 $\mathbf{\Omega}'$ 是首行为 $(1, \epsilon^{-2l}, \epsilon^{-4l}, \dots, \epsilon^{-2l(n-1)}) (0 \leq l \leq n-1)$ 的循环矩阵, 结合式(5), (9), (10)可知结论成立, 证毕.

映射

$$v_2: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, \quad v_2(0) = \infty, \quad v_2\left(2^i \frac{a}{b}\right) = l$$

称为 2-adic 赋值函数, 其中 $a, b, c \in \mathbb{Z}$ 且 $2 \nmid ab$. 假设对任意的 $z \in \mathbb{Z}, z + \infty = \infty + \infty = \infty$, 且 $z < \infty$, 则对 $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, 2-adic 赋值函数满足如下性质:

- 1) $v_2(\alpha\beta) = v_2(\alpha) + v_2(\beta)$;
- 2) $v_2(\alpha + \beta) \geq \min\{v_2(\alpha), v_2(\beta)\}$, 等式成立当且仅当 $v_2(\alpha) \neq v_2(\beta)$.

定理 1 设 S 是群 U_{6n} 的一个不包含单位元的非空共轭逆闭子集, (a, b) 和 (c, d) 是 Cayley 图 $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 的两条不同边, 其中 $0 \leq a, c \leq 3n-1, 3n \leq b, d \leq 6n-1$, 且 $a \in [p_1 n, (p_1 + 1)n - 1], c \notin [p_1 n, (p_1 + 1)n - 1], p_1 \in \{0, 1, 2\}, b \in [p_2 n, (p_2 + 1)n - 1], d \notin [p_2 n, (p_2 + 1)n - 1], p_2 \in \{3, 4, 5\}$.

令 $\mathbf{Q}_{ab} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b)(\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b)^T, \mathbf{Q}_{cd} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_c - \mathbf{e}_d)(\mathbf{e}_c - \mathbf{e}_d)^T$, 则 $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 在时间 $t (t > 0)$ 有从 $\mathbf{Q}_{ab}$ 到 $\mathbf{Q}_{cd}$ 的完美边态转移当且仅当下列条件成立:

- 1) $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 是整图且 n 为奇数;
- 2) $a - c \equiv b - d \equiv 0 \pmod{n}, 2(a - d) = k_1 n + 1, 2(b - c) = k_2 n + n - 1$, 其中 k_1 为奇数, k_2 为偶数;
- 3) 对 $0 \leq j \leq 2n-1, 0 \leq l \leq n-1$, 存在常数 η , 使得 $v_2(\lambda_j - \delta_l) = \eta$ 且 $v_2(\lambda_0 - \lambda_j) > \eta, v_2(\delta_0 - \delta_l) > \eta$.

此外, $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 从 $\mathbf{Q}_{ab}$ 到 $\mathbf{Q}_{cd}$ 之间发生完美边态转移的最小时间是 $\frac{\pi}{\gcd(M, M_0)}$, 其中 $M_0 = \gcd(\lambda_0 - \lambda_j; j \neq 0), M = \gcd(M_1, M_2), M_1 = \gcd(\lambda_j - \delta_l), M_2 = \gcd(\delta_0 - \delta_l; l \neq 0)$.

证明: 由 a, b, c, d 的选取方式及式(6)~(8), 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}(\mathbf{e}_c - \mathbf{e}_d)^T \mathbf{H}(t)(\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b) \right| &= \frac{1}{2} |(\mathbf{H}(t))_{a,c} - (\mathbf{H}(t))_{a,d} - (\mathbf{H}(t))_{b,c} + (\mathbf{H}(t))_{b,d}| = \\ &= \left| \frac{1}{12n} \left(\sum_{j=0}^{2n-1} \epsilon^{2(a-c)j} \exp\{-i\lambda_j t\} \right) - \frac{1}{6n} \left(\sum_{l=0}^{n-1} \epsilon^{2(a-c)l} \exp\{-i\delta_l t\} \right) - \right. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{12n}\Big(\sum_{j=0}^{2n-1}\epsilon^{\lceil 2(a-d)-1\rceil j}\exp\{-i\lambda_jt\}\Big)-\frac{1}{12n}\Big(\sum_{j=0}^{2n-1}\epsilon^{\lceil 2(b-c)+1\rceil j}\exp\{-i\lambda_jt\}\Big)+$$
$$\frac{1}{12n}\Big(\sum_{j=0}^{2n-1}\epsilon^{2(b-d)j}\exp\{-i\lambda_jt\}\Big)-\frac{1}{6n}\Big(\sum_{l=0}^{n-1}\epsilon^{2(b-d)l}\exp\{-i\delta_lt\}\Big)\Big|\leqslant 1,$$

则 $\left|\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_c-\boldsymbol{e}_d)^{\text{T}}\boldsymbol{H}(t)(\boldsymbol{e}_a-\boldsymbol{e}_b)\right|=1$ 当且仅当

$$\begin{cases} \exp\{-i\lambda_0t\}=\epsilon^{2(a-c)j}\exp\{-i\lambda_jt\}=\epsilon^{2(b-d)j}\exp\{-i\lambda_jt\}, \\ \exp\{-i\lambda_0t\}=-\epsilon^{2(a-c)l}\exp\{-i\delta_lt\}=-\epsilon^{2(b-d)l}\exp\{-i\delta_lt\}, \\ \exp\{-i\lambda_0t\}=-\epsilon^{\lceil 2(a-d)-1\rceil j}\exp\{-i\lambda_jt\}=-\epsilon^{\lceil 2(b-c)+1\rceil j}\exp\{-i\lambda_jt\}, \end{cases}\tag{11}$$

其中 $0\leqslant j\leqslant 2n-1, 0\leqslant l\leqslant n-1$. 由式(11)的第一个等式可得: $a-c=b-d\equiv 0(\text{mod } n)$; 由式(11)的第三个等式可知 $-\epsilon^{-j}\epsilon^{2(a-d)j}=-\epsilon^j\epsilon^{2(b-c)j}=-1$, 即 $2(a-d)=k_1n+1, 2(b-c)=k_2n+n-1$, 其中 k_1 为奇数, k_2 为偶数, 进一步可得 n 为奇数. 再令 $t=2\pi T$, 则由式(11)有

$$\begin{cases} (\lambda_0-\lambda_j)T\in\mathbb{Z}, & 0\leqslant j\leqslant 2n-1, \\ 2(\lambda_j-\delta_l)T\in 2\mathbb{Z}+1, & 0\leqslant j\leqslant 2n-1, 0\leqslant l\leqslant n-1, \\ (\delta_0-\delta_l)T\in\mathbb{Z}, & 0\leqslant l\leqslant n-1. \end{cases}\tag{12}$$

特别地, 令 $j=l=0$, 则由式(12)有 $2(\lambda_0-\delta_0)T\in 2\mathbb{Z}+1$, 结合引理 3 可知 λ_0 和 δ_0 均为整数, 因此 $T\in\mathbb{Q}$. 由于 $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 的所有特征值均为代数整数, 又由式(12)可知所有特征值均为有理数, 所以都是整数, 即 $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 为整图.

由式(12)知 $v_2(\lambda_j-\delta_l)=-1-v_2(T)$, 因此对所有的 λ_j 和 $\delta_l, v_2(\lambda_j-\delta_l)$ 均为相同常数 η . 由于 $v_2(\mathbb{Z})\geqslant 0$, 因此易得 $v_2(\lambda_0-\lambda_j)>\eta$ 且 $v_2(\delta_0-\delta_l)>\eta$.

令 $M_0=\text{gcd}(\lambda_0-\lambda_j: j\neq 0), M_1=\text{gcd}(\lambda_j-\delta_l), M_2=\text{gcd}(\delta_0-\delta_l: l\neq 0)$, 再次应用式(12)可得

$$T\in\frac{\mathbb{Z}}{M_0}\cap\frac{2\mathbb{Z}+1}{2M_1}\cap\frac{\mathbb{Z}}{M_2}=\frac{\mathbb{Z}}{M_0}\cap\frac{1}{2M_1M_2}(M_2(2\mathbb{Z}+1)\cap 2M_1\mathbb{Z}).\tag{13}$$

考虑集合 $M_2(2\mathbb{Z}+1)\cap 2M_1\mathbb{Z}$, 有

$$\begin{aligned} z\in M_2(2\mathbb{Z}+1)\cap 2M_1\mathbb{Z}&\Leftrightarrow z=M_2(2x+1)=2M_1y(x, y\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow \\ 2yM_1-2xM_2&=M_2\Leftrightarrow \text{gcd}(2M_1, M_2)\mid M_2\Leftrightarrow v_2(M_2)\geqslant\eta+1. \end{aligned}$$

由 $v_2(M_1)=\eta, v_2(M_2)\geqslant\eta+1$, 有

$$M_2(2\mathbb{Z}+1)\cap 2M_1\mathbb{Z}=\text{lcm}(2M_1, M_2)(2\mathbb{Z}+1)=\frac{2M_1M_2}{\text{gcd}(2M_1, M_2)}(2\mathbb{Z}+1).$$

注意到 M_1 是整数, 因此 $v_2(M_1)=\eta\geqslant 0, v_2(M_2)\geqslant\eta+1\geqslant 1$, 表明 M_2 为偶数, 从而

$$\frac{2M_1M_2}{\text{gcd}(2M_1, M_2)}(2\mathbb{Z}+1)=\frac{M_1M_2}{\text{gcd}(M_1, M_2)}(2\mathbb{Z}+1)=\frac{M_1M_2}{M}(2\mathbb{Z}+1),\tag{14}$$

其中 $\text{gcd}(M_1, M_2)=M$. 结合式(13), (14)有

$$T\in\frac{\mathbb{Z}}{M_0}\cap\frac{2\mathbb{Z}+1}{2M}=\frac{1}{2MM_0}(2M\mathbb{Z}\cap M_0(2\mathbb{Z}+1)).\tag{15}$$

类似地, 有 $2M\mathbb{Z}\cap M_0(2\mathbb{Z}+1)\Leftrightarrow v_2(M_0)>v_2(M)\geqslant 0$, 则有 $v_2(M_0)\geqslant v_2(M)+1$, 从而有

$$\begin{aligned} 2M\mathbb{Z}\cap M_0(2\mathbb{Z}+1)&=\text{lcm}(2M, M_0)(2\mathbb{Z}+1)= \\ &=\frac{2MM_0}{\text{gcd}(2M, M_0)}(2\mathbb{Z}+1)=\frac{MM_0}{\text{gcd}(M, M_0)}(2\mathbb{Z}+1). \end{aligned}\tag{16}$$

将式(16)代入式(15)可得

$$T\in\frac{1}{2MM_0}\frac{MM_0}{\text{gcd}(M, M_0)}(2\mathbb{Z}+1)=\frac{(2\mathbb{Z}+1)}{2\text{gcd}(M, M_0)},$$

进一步有 $t\in\frac{\pi(2\mathbb{Z}+1)}{\text{gcd}(M, M_0)}$, 因此 $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 从 $\boldsymbol{Q}_{ab}$ 到 $\boldsymbol{Q}_{cd}$ 之间发生完美边态转移的最小时间是

$$\frac{\pi}{\text{gcd}(M, M_0)}.$$

定理 2 设 S 是群 U_{6n} 的一个不包含单位元的非空共轭逆闭子集, (a, b) 和 (c, d) 是 Cayley 图 $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 的两条边, 令 $\mathbf{Q}_{ab} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b)(\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b)^\top$, $\mathbf{Q}_{cd} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_c - \mathbf{e}_d)(\mathbf{e}_c - \mathbf{e}_d)^\top$, 若满足以下条件:

1) $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 是整图;

2) $0 \leq a, b, c, d \leq 3n-1$ 且 $a, c \in [p_1 n, (p_1+1)n-1]$, $b, d \in [p_2 n, (p_2+1)n-1]$, $p_1 \neq p_2 \in \{0, 1, 2\}$ 或 $3n \leq a, b, c, d \leq 6n-1$ 且 $a, c \in [p_1 n, (p_1+1)n-1]$, $b, d \in [p_2 n, (p_2+1)n-1]$, $p_1 \neq p_2 \in \{3, 4, 5\}$;

3) $a=c$, $b=d$ 且 $a-d=b-c \equiv 0 \pmod{n}$.

则 $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 在时间 $t(t>0)$ 有从 $\mathbf{Q}_{ab}$ 到 $\mathbf{Q}_{cd}$ 的完美边态转移, 且 $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 发生完美边态转移的最小时间 $t = \frac{2\pi}{\gcd(r_0, r_1)}$, 其中 $r_0 = \gcd(\lambda_j - \lambda_0 : j \neq 0)$, $r_1 = \gcd(\delta_l - \delta_0 : l \neq 0)$.

证明: 由条件 2) 及式 (6), 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}(\mathbf{e}_c - \mathbf{e}_d)^\top \mathbf{H}(t)(\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b) \right| &= \frac{1}{2} |(\mathbf{H}(t))_{a,c} - (\mathbf{H}(t))_{a,d} - (\mathbf{H}(t))_{b,c} + (\mathbf{H}(t))_{b,d}| = \\ &= \left| \frac{1}{12n} \sum_{j=0}^{2n-1} (\epsilon^{2(a-c)j} \exp\{-i\lambda_j t\}) + \frac{1}{3n} \sum_{l=0}^{n-1} (\epsilon^{2(a-c)l} \exp\{-i\delta_l t\}) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{12n} \sum_{j=0}^{2n-1} (\epsilon^{2(b-d)j} \exp\{-i\lambda_j t\}) + \frac{1}{3n} \sum_{l=0}^{n-1} (\epsilon^{2(b-d)l} \exp\{-i\delta_l t\}) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{12n} \sum_{j=0}^{2n-1} (\epsilon^{2(a-d)j} \exp\{-i\lambda_j t\}) + \frac{1}{6n} \sum_{l=0}^{n-1} (\epsilon^{2(a-d)l} \exp\{-i\delta_l t\}) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{12n} \sum_{j=0}^{2n-1} (\epsilon^{2(b-c)j} \exp\{-i\lambda_j t\}) + \frac{1}{6n} \sum_{l=0}^{n-1} (\epsilon^{2(b-c)l} \exp\{-i\delta_l t\}) \right|, \end{aligned}$$

则当

$$\begin{cases} \exp\{-i\lambda_0 t\} = \epsilon^{2(a-c)j} \exp\{-i\lambda_j t\} = \epsilon^{2(b-d)j} \exp\{-i\lambda_j t\}, \\ \exp\{-i\lambda_0 t\} = \epsilon^{2(a-d)j} \exp\{-i\lambda_j t\} = \epsilon^{2(b-c)j} \exp\{-i\lambda_j t\}, \\ \exp\{-i\delta_0 t\} = \epsilon^{2(a-c)l} \exp\{-i\delta_l t\} = \epsilon^{2(b-d)l} \exp\{-i\delta_l t\}, \\ \exp\{-i\delta_0 t\} = \epsilon^{2(a-d)l} \exp\{-i\delta_l t\} = \epsilon^{2(b-c)l} \exp\{-i\delta_l t\} \end{cases} \quad (17)$$

时, 有 $\left| \frac{1}{2}(\mathbf{e}_c - \mathbf{e}_d)^\top \mathbf{H}(t)(\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b) \right| = 1$, 其中 $0 \leq j \leq 2n-1$, $0 \leq l \leq n-1$. 由于 $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 是简单图, 且 ϵ 为 $2n$ 次单位根, 因此根据式 (17) 可得: $a=c$, $b=d$ 且 $a-d=b-c \equiv 0 \pmod{n}$. 令 $t=2\pi T$, 则由式 (17) 可得

$$\begin{cases} (\lambda_0 - \lambda_j)T \in \mathbb{Z}, & 0 \leq j \leq 2n-1, \\ (\delta_0 - \delta_l)T \in \mathbb{Z}, & 0 \leq l \leq n-1. \end{cases} \quad (18)$$

注意到 $0 = \text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{2n-1} \lambda_k + 4 \sum_{l=0}^{n-1} \delta_l$, 且由式 (18) 可得 $(2n\lambda_0 - \sum_{k=0}^{2n-1} \lambda_k + 4n\delta_0 - 4 \sum_{l=0}^{n-1} \delta_l)T \in \mathbb{Z}$, 故 $(2n\lambda_0 + 4n\delta_0)T \in \mathbb{Z}$. 又由式 (1), (3) 知 λ_0 和 δ_0 均为整数, 因此 $T \in \mathbb{Q}$. 由于 $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 的特征值均为代数整数, 并由式 (18) 可知它们均为有理数, 因此所有特征值均为整数, 即 $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 为整图. 又由式 (18) 有

$$T \in \frac{\mathbb{Z}}{r_0} \cap \frac{\mathbb{Z}}{r_1} = \frac{1}{r_0 r_1} (r_1 \mathbb{Z} \cap r_0 \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}}{\gcd(r_0, r_1)},$$

其中 $r_0 = \gcd(\lambda_j - \lambda_0 : j \neq 0)$, $r_1 = \gcd(\delta_l - \delta_0 : l \neq 0)$. 因此, $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 从 $\mathbf{Q}_{ab}$ 到 $\mathbf{Q}_{cd}$ 发生美边态转移的最小时间是 $t = \frac{2\pi}{\gcd(r_0, r_1)}$. 证毕.

定理 3 设 S 是群 U_{6n} 的一个不包含单位元的非空共轭逆闭子集, (a, b) 和 (c, d) 是 Cayley 图 $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 的两条不同边, 令 $\mathbf{Q}_{ab} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b)(\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b)^\top$, $\mathbf{Q}_{cd} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_c - \mathbf{e}_d)(\mathbf{e}_c - \mathbf{e}_d)^\top$, 则当 $0 \leq a, b \leq 3n-1$ 且 $3n \leq c, d \leq 6n-1$ 或 $0 \leq c, d \leq 3n-1$ 且 $3n \leq a, b \leq 6n-1$ 时, $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 不存在从 $\mathbf{Q}_{ab}$ 到 $\mathbf{Q}_{cd}$ 的

完美边态转移.

证明: 若 $0 \leq a, b \leq 3n-1$ 且 $3n \leq c, d \leq 6n-1$, 则结合定理 1 的证明过程与式(7),(8)可知,

$$\left| \frac{1}{2} (\mathbf{e}_c - \mathbf{e}_d)^T \mathbf{H}(t) (\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b) \right| = \frac{1}{2} |(\mathbf{H}(t))_{a,c} - (\mathbf{H}(t))_{a,d} - (\mathbf{H}(t))_{b,c} + (\mathbf{H}(t))_{b,d}| =$$

$$\left| \frac{1}{12n} \sum_{j=0}^{2n-1} (\epsilon^{\lceil 2(a-c)-1 \rceil j} \exp\{-i\lambda_j t\}) + \frac{1}{12n} \sum_{j=0}^{2n-1} (\epsilon^{\lceil 2(b-d)-1 \rceil j} \exp\{-i\lambda_j t\}) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{12n} \sum_{j=0}^{2n-1} (\epsilon^{\lceil 2(a-d)-1 \rceil j} \exp\{-i\lambda_j t\}) - \frac{1}{12n} \sum_{j=0}^{2n-1} (\epsilon^{\lceil 2(b-c)-1 \rceil j} \exp\{-i\lambda_j t\}) \right| < 1,$$

因此 $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 不存在从 $\mathbf{Q}_{ab}$ 到 $\mathbf{Q}_{cd}$ 的完美边态转移. 同理可得: 当 $0 \leq c, d \leq 3n-1$ 且 $3n \leq a, b \leq 6n-1$ 时, $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 也不存在从 $\mathbf{Q}_{ab}$ 到 $\mathbf{Q}_{cd}$ 的完美边态转移.

综上所述, 本文利用有限群的表示和特征标理论给出了当生成集 S 共轭逆闭时, 群 U_{6n} 上 Cayley 图的谱, 并借助谱分解方法刻画了 $\text{Cay}(U_{6n}, S)$ 在一些类型的边态之间存在完美边态转移的充要条件, 同时给出了在一些类型的边态之间是否存在完美边态转移的充分条件. 所得结论进一步丰富了非交换群的 Cayley 图上状态转移问题的结果.

参 考 文 献

- [1] BOSE S. Quantum Communication through an Unmodulated Spin Chain [J]. Phys Rev Lett, 2003, 91(20): 207901-1-207901-4.
- [2] AHMADI B, SHIRDAREH HAGHIGHI M H, MOKHTAR A. Perfect Quantum State Transfer on the Johnson Scheme [J]. Linear Algebra Appl, 2020, 584: 326-342.
- [3] CHEUNG W C, GODSIL C. Perfect State Transfer in Cubeike Graphs [J]. Linear Algebra Appl, 2011, 435(10): 2468-2474.
- [4] COUTINHO G, GODSIL C. Perfect State Transfer in Products and Covers of Graphs [J]. Linear Multilinear Algebra, 2016, 64(2): 235-246.
- [5] COUTINHO G, GODSIL C, GUO K, et al. Perfect State Transfer on Distance-Regular Graphs and Association Schemes [J]. Linear Algebra Appl, 2015, 478: 108-130.
- [6] LI Y P, LIU X G, ZHANG S G, et al. Perfect State Transfer in NEPS of Complete Graphs [J]. Discrete Appl Math, 2021, 289: 98-114.
- [7] ZHENG S S, LIU X G, ZHANG S G. Perfect State Transfer in NEPS of Some Graphs [J]. Linear Multilinear Algebra, 2020, 68(8): 1518-1533.
- [8] JIANG M, LIU X G, WANG J. Laplacian Pair State Transfer in Q-Graph [J]. Discrete Appl Math, 2025, 375: 239-258.
- [9] CHEN Q T. Edge State Transfer [D]. Waterloo, Canada: University of Waterloo, 2018.
- [10] CHEN Q T, GODSIL C. Pair State Transfer [J]. Quantum Inf Process, 2020, 19(9): 321-1-321-30.
- [11] CAO X W, FENG K Q. Perfect State Transfer on Cayley Graphs over Dihedral Groups [J]. Linear Multilinear Algebra, 2021, 69(2): 343-360.
- [12] TAN Y Y, FENG K Q, CAO X W. Perfect State Transfer on Abelian Cayley Graphs [J]. Linear Algebra Appl, 2019, 563: 331-352.
- [13] LUO G J, CAO X W, WANG D D, et al. Perfect Quantum State Transfer on Cayley Graphs over Semi-dihedral Groups [J]. Linear Multilinear Algebra, 2022, 70(21): 6358-6374.
- [14] LUO G J, CAO X W, XU G K, et al. Cayley Graphs of Dihedral Groups Having Perfect Edge State Transfer [J]. Linear Multilinear Algebra, 2022, 70(20): 5957-5972.
- [15] JAMES G, LIEBECK M. Representations and Characters of Groups [M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2001: 1-393.
- [16] STEINBERG B. Representation Theory of Finite Groups: An Introductory Approach [M]. New York: Springer, 2012: 69-70.

(责任编辑: 赵立芹)