

Markov 切换拓扑下离散多智能体系统 滑模一致性控制

曹洒, 解静[†], 赵阳

(青岛理工大学 信息与控制工程学院, 山东 青岛 266520)

摘 要: 针对具有 Markov 切换拓扑的离散多智能体系统, 研究了其在滑模控制下的均方领导-跟随一致性问题。通过引入 Markov 切换拓扑, 描述了智能体之间的随机信息交互。采用一致性误差定义了与随机切换拓扑相关的滑模面。根据理想准滑动模态条件得到了等效控制律, 并将离散多智能体系统的一致性问题转化为领导-跟随误差系统的稳定性问题; 利用 Lyapunov 函数的构造和矩阵理论最终给出了离散滑动模态均方领导-跟随一致性的充分条件, 并给出了控制增益的设计方法。然后利用趋近律原理给出了一种离散时间滑模控制器, 实现了跟随误差能够在有限时间内到达所定义的滑模面区域内。如何处理部分转移概率未知的 Markov 切换拓扑和设计随机切换拓扑相关的滑模面是本文的两个难点。最后通过一个数值算例验证了所提方法的有效性。

关键词: 离散多智能体系统; 随机切换拓扑; Markov 链; 滑模控制; 均方一致性

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Sliding Mode Consensus Control for Discrete-time Multi-agent Systems Under Markov Switching Topologies

CAO Sa, XIE Jing[†], ZHAO Yang

(School of Information and Control Engineering, Qingdao University of Technology, Qingdao, Shandong 266520, China)

Abstract: The mean-square leader-following consensus problem for discrete-time multi-agent systems with the Markovian switching topologies was studied by the sliding mode control. The Markovian switching topologies were introduced to describe the random information interaction between agents. The sliding mode surface with respect to the stochastic switching topologies was constructed utilizing the consensus error. An equivalent controller was obtained according to the ideal quasi-sliding mode condition, and then the consensus problem of discrete-time multi-agent systems was transformed into the stability problem of leader-following error systems. A sufficient condition of the mean-square leader-following consensus was obtained for discrete-time sliding mode dynamics by the construction of Lyapunov function and the matrix theory, and the controller gains were designed. Then a discrete-time sliding mode controller was derived by using the reaching law principle to ensure that the following errors reached the area of the giving sliding mode surface in a finite time. How to deal with the Markov switching topologies with unknown partial transition probabilities and the design of sliding surface associated with stochastic switching topologies are two difficulties. Finally, a numerical example was given to illustrate the feasibility of the proposed method.

Key words: discrete-time multi-agent system; stochastic switching topology; Markov chain; sliding mode control; mean-square consensus

多智能体系统与单一智能体相比,具有执行能力强、效率高等诸多优点,被广泛应用于许多领域,如配电网及无人机和 underwater 机器人等的协同控制。多智能体系统协同控制的主要思想是通过获取局部相邻信息来设计每个智能体上的分布式控制器,以实现全局目标。在所有的协同控制算法中,一致性控制得到了广泛的研究。对多智能体系统来说,通信的质量对其一致性有非常大的影响。考虑到实际通信环境的复杂性,智能体之间的通信拓扑结构往往不能保持固定,目前已有的成果主要集中在用几个拓扑的固定切换来表示实际通信环境的复杂性。如 Guo 等对具有交换拓扑和无向信息流的网络、具有定向信息流和通信时延的网络两种情况提出了控制协议,实现了多智能体系统的领导跟随一致性^[1]。陈世明等在固定拓扑和切换拓扑下研究了非线性随机多智能体系统的固定时间一致性问题^[2]。但实际通信环境下拓扑之间的切换应该是随机的,所以研究学者开始引入 Markov 过程来更精确地建立拓扑之间的随机切换模型。Liu 等研究了 Markov 随机切换网络上离散时间线性多智能体系统的协同输出调节问题^[3]。Pei 等对具有 Markov 切换拓扑的离散线性多智能体系统给出了达成一致性的两个充分条件^[4]。值得注意的是,文献[3]和文献[4]所研究的 Markov 切换拓扑结构的转移概率信息都是完全已知的。然而在实际应用中,很难准确地计算出所有转移概率的信息,或者会出现部分转移概率信息无法被检测的问题。目前,有关转移概率信息部分未知的 Markov 切换拓扑结构的研究成果相对较少,对部分转移概率未知的多智能体系统一致性问题仍需继续研究。通过上述分析,本文在离散时间下考虑具有部分转移概率未知的 Markov 切换拓扑结构,研究多智能体系统一致性控制问题,这是本文的第一个优点。

连续时间多智能体系统的控制已经出现了许多成果^[5]。近年来,学者们对离散时间多智能体系统的控制问题也展开了一定的研究^[6-8]。Yan 等为了减少系统的通信负荷,对适用于多无人机系统的时滞离散多智能体系统提出了一种事件触发控制器^[6]。Chen 等对离散多智能体系统提出了领导-跟随编队控制的优化设计^[7]。滑模控制作为一种有效且常见的非线性控制方法,已大量应用于离散时间多智能体系统的研究中。又由于其对参数变化和外部干扰不敏感等特点,滑模控制也被广泛应用于 Markov 跳变系统中。但把离散滑模控制方法应用到 Markov 切换拓扑下离散多智能体系统

的研究中的成果还很少,这种情况下离散多智能体系统的一致性问题还未进行研究。在本文中,离散滑模面的设计是一个难点,由于多智能体系统随拓扑切换而改变,控制器增益也应随之改变。因此本文对不随拓扑切换的统一滑模面做出改进,使其与随机拓扑切换有关,从而利用滑模控制方法实现离散多智能体系统的均方领导-跟随一致性控制,这是本文的第二个优点。

在上述讨论基础上,本文将对具有 Markov 切换拓扑的离散时间多智能体系统的滑模控制问题进行研究。

1 初步准备和问题描述

1.1 图论

假设节点集合是不变的,并且边可能随着拓扑的跳变而消失或重建。假设随机跳变图 $G(r(k)) = (V, E(r(k)), A(r(k)))$ 由离散时间齐次 Markov 链 $\{r(k), k \in \mathbb{Z}^+\}$ 控制,其中 $V = \{v_1, \dots, v_N\}$ 是图中 N 个节点的集合, $E(r(k)) \in V \times V$ 是边集合, $A(r(k)) = (a_{ij}(k))_{N \times N}$ 是图 $G(r(k))$ 的邻接矩阵。 $a_{ij}(k) \in \{0, 1\}$ 为边权重值: $a_{ij} = 0$ 表示从第 i 个到第 j 个智能体无信息传递;反之, $a_{ij} = 1$ 。 $N_i = \{j \in V: a_{ji} \in E(r(k))\}$ 表示智能体 i 的邻居集合。 $D(r(k)) = \text{diag}\{d_1(k), \dots, d_N(k)\} \in \mathbb{R}$ 是图 $G(r(k))$ 的入度矩阵, $d_i(k) = \sum_{j=1}^N a_{ij}(k)$ 。 Markov 链 $\{r(k), k \in \mathbb{Z}^+\}$ 在有限的状态空间 $\Upsilon = \{0, 1, \dots, m\}$ 中取值,其状态转移矩阵 $P = (\pi_{ij})$ 定义为:

$$\pi_{ij} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & ? & \cdots & \pi_{1m} \\ ? & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{m1} & ? & \cdots & \pi_{mm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

其中 $\pi_{ij} = P_r\{r(k+1) = j \mid r(k) = i\} \geq 0$, $i, j \in \Upsilon$ 表示从 i 到 j 的转移概率,“?”表示转移概率未知,并且 $\sum_{j=1}^n \pi_{ij} = 1$ 。现将未知转移概率标记

为 $\tilde{\pi}_{ij}$, 定义 $\Upsilon^{(i)} = \{j: \pi_{ij} \text{ 已知}\}$, $\tilde{\Upsilon}^{(i)} = \{j: \pi_{ij} \text{ 未知}\}$ 。如果 $\Upsilon^{(i)} \neq \emptyset$, 则 $\Upsilon^{(i)} = \{\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_\zeta^i\}$, 其中 ζ 表示 $\Upsilon^{(i)}$ 中元素的数量。对于所有的 $i \in \Upsilon$, $G(r(k))$ 的拉普拉斯矩阵由 $L_{r(k)}$ 表示, 定义为 $L_{r(k)} = D(r(k)) - A(r(k))$ 。跟随者 i 与领导者之间的连接关系由对角矩阵 $B_{r(k)} = \text{diag}\{b_1(r(k)), \dots, b_N(r(k))\}$ 表示, 当跟随者 i 与领导者连接时 $b_i = 1$, 反之 $b_i = 0$ 。

1.2 问题描述

考虑离散时间多智能体系统为:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= Ax_i(k) + Bu_i(k), \\ i &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $x_i(k) \in \mathbb{R}^n$ 和 $u_i(k) \in \mathbb{R}^m$ 分别表示第 i 个智能体在时刻 k 的状态和控制输入, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 分别是系统矩阵和输入矩阵。

定义领导者动态方程为:

$$x_0(k+1) = Ax_0(k) \quad (2)$$

其中 $x_0(k) \in \mathbb{R}^n$ 表示领导者在时刻 k 时的状态。 N 个智能体之间的通信情况用矩阵 $A(r(k))$ 来描述:

$$\begin{aligned} A(r(k)) &= \begin{bmatrix} a_{11}(r(k)) & \cdots & a_{1N}(r(k)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}(r(k)) & \cdots & a_{NN}(r(k)) \end{bmatrix} \\ &\in \mathbb{R}^{N \times N}. \end{aligned}$$

为了提出实现多智能体一致性滑模控制的方法, 先给出如下假设和定义。

假设 1 矩阵对 (A, B) 是可控的, 且 $\text{rank} B = m$ 。

定义 1^[9] 如果对于任何初始条件, 智能体 i 的状态满足:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \{ \|x_i(k) - x_0(k)\|^2 \} &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (3)$$

则控制协议 $u_i(k)$ 在均方意义上实现了领导-跟随一致性。

借助 Kronecker 积, 式(1)的全局离散多智能体形式可表示为:

$$X(k+1) = \tilde{A}X(k) + \tilde{B}u(k) \quad (4)$$

其中 $X(k) = [x_1^T(k), \dots, x_N^T(k)]^T$, $\tilde{A} = I_N \otimes A$, $\tilde{B} = I_N \otimes B$, $u(k) = [u_1^T(k), \dots, u_N^T(k)]^T$ 。

2 控制器设计

为了研究领导者与跟随者的一致性问题的, 对每个 $r(k) \in \Upsilon$, 定义局部邻域跟踪误差为:

$$\begin{aligned} \delta_i(k) &= \sum_{j \in N_i} a_{ij}(r(k)) [x_i(k) - x_j(k)] + \\ &b_i(r(k)) [x_i(k) - x_0(k)] \end{aligned} \quad (5)$$

则对 $r(k) \in \Upsilon$, 由式(5)可得:

$$\begin{aligned} \delta_i(k+1) &= A\delta_i(k) + \\ &B \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij}(r(k)) [u_i(k) - u_j(k)] + \right. \\ &\left. b_i(r(k)) [u_i(k)] \right) \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)可以改写成如下的全局领导-跟随误差系统:

$$\delta(k+1) = \tilde{A}\delta(k) + \tilde{B}C_{r_k}u(k) \quad (7)$$

其中:

$$C_{r_k} = I_m \otimes [L_{r(k)} + B_{r(k)}], \text{ 且 } L_{r(k)} =$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N a_{1j}(k) & -a_{12}(k) & \cdots & -a_{1N}(k) \\ -a_{21}(k) & \sum_{j=1}^N a_{2j}(k) & \cdots & -a_{2N}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{N1}(k) & -a_{N2}(k) & \cdots & \sum_{j=1}^N a_{Nj}(k) \end{bmatrix}.$$

与传统滑模面^[10]不同, 针对系统(1)的第 i 个智能体, 设计了如下与误差(5)有关的新颖离散时间滑模面:

$$s_i(k) = G\delta_i(k) - GBK_{r_k}\delta_i(k-1) \quad (8)$$

其中矩阵 G 使得矩阵 GB 是非奇异的。 K_{r_k} 是需要设计的控制器增益。 进而, 对于全局系统(4), 滑模面可以表示为:

$$s(k) = \tilde{G}\delta(k) - \tilde{G}\tilde{B}\tilde{K}_{r_k}\delta(k-1) \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} s(k) &= [s_1^T(k), \dots, s_N^T(k)]^T, \tilde{G} = I_N \otimes G, \\ \tilde{K}_{r_k} &= I_N \otimes K_{r_k}. \end{aligned}$$

由式(9)可以得到:

$$s(k+1) = \tilde{G}(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}_{r_k})\delta(k) + \tilde{G}\tilde{B}C_{r_k}u(k) \quad (10)$$

根据理想的准滑动模态满足以下条件:

$$s(k+1) = s(k) = 0 \quad (11)$$

可以得到当系统的状态轨迹进入理想准滑模时, 等效控制律为:

$$u_{eq} = -[\tilde{G}\tilde{B}C_{r_k}]^{-1}\tilde{G}(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}_{r_k})\delta(k) \quad (12)$$

然后将控制律(12)代入误差系统(7), 可得到闭环误差系统为:

$$\delta(k+1) = (M_{r_k}\tilde{A} + H_{r_k}\tilde{K}_{r_k})\delta(k) \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} M_{r_k} &= I - \tilde{B}C_{r_k}[\tilde{G}\tilde{B}C_{r_k}]^{-1}\tilde{G}, \\ H_{r_k} &= \tilde{B}C_{r_k}[\tilde{G}\tilde{B}C_{r_k}]^{-1}\tilde{G}\tilde{B}. \end{aligned}$$

3 主要结论

定理 1 考虑离散时间多智能体系统(1)(2)及其全局领导-跟随误差系统(7), 如果 $\forall i \in \Upsilon$, $\forall j \in \tilde{\Upsilon}$, 存在一组对称正定矩阵 $X_1, X_2, \dots, X_N$ 和合适维数的矩阵 Y_i 满足:

$$\begin{bmatrix} -X_i & -\Psi_1(i) & -\Psi_1(i) & -\Psi_2(i) & -\Psi_2(i) \\ * & -\Psi_3(i) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\Psi_4(i) & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Psi_3(i) & 0 \\ * & * & * & * & -\Psi_4(i) \end{bmatrix} >$$

其中

$$\Psi_1(i) = [\sqrt{2}X_i(M_i\tilde{A})^T, \dots, \sqrt{2}X_i(M_i\tilde{A})^T],$$

$$\Psi_2(i) = [\sqrt{2}Y_iH_i^T, \dots, \sqrt{2}Y_iH_i^T],$$

$$\Psi_3(i) = \text{diag}\left\{\frac{1}{\alpha_1^i}X_1, \dots, \frac{1}{\alpha_\zeta^i}X_\zeta\right\},$$

$$\Psi_4(i) = \text{diag}\left\{\frac{1}{1-\alpha_1^i}X_1, \dots, \frac{1}{1-\alpha_\zeta^i}X_\zeta\right\}.$$

那么该多智能体系统在等效控制律(12)下可以实现均方意义上的领导-跟随一致性,其中控制器增益设计为 $\tilde{K}_i = Y_i^T X_i^{-1}$ 。

证明:构造系统(13)的 Lyapunov 函数的随机形式为

$$V(\delta(k), k, r_k) = \delta^T(k) P_{r_k} \delta(k) \quad (15)$$

其中 P_{r_k} 为合适维数矩阵。

当 $\forall r(k) = i \in \Upsilon$ 时,可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{V(\delta(k+1), k+1, r_{k+1}) \mid \delta(k), r_k = i\} - V(\delta(k), k, i) &= \delta^T(k) [(M_i\tilde{A} + H_i\tilde{K}_i)^T \sum_{j=1}^m \pi_{ij} P_j (M_i\tilde{A} + H_i\tilde{K}_i) - P_i] \delta(k) \\ &\quad (16) \end{aligned}$$

将转移概率分解为两种类型,可以表示如下:

$$\sum_{j=1}^m \pi_{ij} P_j = \sum_{j \in \Upsilon^{(i)}} \pi_{ij} P_j + \sum_{j \in \tilde{\Upsilon}^{(i)}} \tilde{\pi}_{ij} P_j \quad (17)$$

根据式(16)及转移概率(17),进一步可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{V(\delta(k+1), k+1, r_{k+1}) \mid \delta(k), r_k = i\} - V(\delta(k), k, i) &= \delta^T(k) [(M_i\tilde{A} + H_i\tilde{K}_i)^T (\sum_{j \in \Upsilon^{(i)}} \pi_{ij} P_j + \\ &\quad (1 - \sum_{j \in \Upsilon^{(i)}} \pi_{ij}) \sum_{j \in \tilde{\Upsilon}^{(i)}} \frac{\tilde{\pi}_{ij} P_j}{1 - \sum_{j \in \tilde{\Upsilon}^{(i)}} \pi_{ij}}) (M_i\tilde{A} + H_i\tilde{K}_i) - P_i] \delta(k) \\ &\quad (18) \end{aligned}$$

$$\text{由于 } 0 \leq \frac{\tilde{\pi}_{ij}}{1 - \sum_{j \in \tilde{\Upsilon}^{(i)}} \pi_{ij}} \leq 1, \sum_{j \in \tilde{\Upsilon}^{(i)}} \frac{\tilde{\pi}_{ij}}{1 - \sum_{j \in \tilde{\Upsilon}^{(i)}} \pi_{ij}} =$$

1, 继而得:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{V(\delta(k+1), k+1, r_{k+1}) \mid \delta(k), r_k = i\} - V(\delta(k), k, i) &\leq \delta^T(k) [(M_i\tilde{A} + H_i\tilde{K}_i)^T (\sum_{j \in \Upsilon^{(i)}} \pi_{ij} P_j + \\ &\quad (1 - \sum_{j \in \Upsilon^{(i)}} \pi_{ij}) P_j) (M_i\tilde{A} + H_i\tilde{K}_i) - P_i] \delta(k) \\ &\quad (19) \end{aligned}$$

为了离散多智能体系统获得均方领导-跟随一致性,需要满足:

$$\mathbb{E}[V(\delta(k+1), k+1, r_{k+1}) \mid \delta(k), r_k = i] - V(\delta(k), k, i) < 0 \quad (20)$$

满足不等式(20)即满足

$$\begin{aligned} (M_i\tilde{A} + H_i\tilde{K}_i)^T (\sum_{j \in \Upsilon^{(i)}} \pi_{ij} P_j + \\ (1 - \sum_{j \in \Upsilon^{(i)}} \pi_{ij}) P_j) (M_i\tilde{A} + H_i\tilde{K}_i) - P_i < 0 \\ (21) \end{aligned}$$

由式(21)可推得:

$$\begin{aligned} (M_i\tilde{A} + H_i\tilde{K}_i)^T [\sum_{j \in \Upsilon^{(i)}} \pi_{ij} P_j + \\ (1 - \sum_{j \in \Upsilon^{(i)}} \pi_{ij}) P_j] (M_i\tilde{A} + H_i\tilde{K}_i) - P_i &\leq 2(M_i\tilde{A})^T \sum_{j \in \Upsilon^{(i)}} \pi_{ij} P_j M_i\tilde{A} + \\ &\quad 2(M_i\tilde{A})^T (1 - \sum_{j \in \Upsilon^{(i)}} \pi_{ij}) P_j M_i\tilde{A} + \\ &\quad 2(H_i\tilde{K}_i)^T \sum_{j \in \Upsilon^{(i)}} \pi_{ij} P_j H_i\tilde{K}_i + \\ &\quad 2(H_i\tilde{K}_i)^T (1 - \sum_{j \in \Upsilon^{(i)}} \pi_{ij}) P_j H_i\tilde{K}_i - P_i \leq 0 \\ &\quad (22) \end{aligned}$$

根据 Schur 补引理可知,不等式(22)等价于下列不等式(23)。

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccc} -P_i & \sqrt{2}(M_i\tilde{A})^T & \dots & \sqrt{2}(M_i\tilde{A})^T & \sqrt{2}(M_i\tilde{A})^T & \dots & \sqrt{2}(M_i\tilde{A})^T & \sqrt{2}(H_i\tilde{K}_i)^T & \dots & \sqrt{2}(H_i\tilde{K}_i)^T & \sqrt{2}(H_i\tilde{K}_i)^T & \dots & \sqrt{2}(H_i\tilde{K}_i)^T \\ * & -(\pi_{i1}P_1)^{-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & -(\pi_{i\zeta}^*P_\zeta)^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * & -((1-\pi_{i1})P_1)^{-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * & * & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * & * & \dots & -((1-\pi_{i\zeta}^*)P_\zeta)^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * & * & \dots & * & -(\pi_{i1}P_1)^{-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * & * & \dots & * & * & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & -(\pi_{i\zeta}^*P_\zeta)^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & -((1-\pi_{i1})P_1)^{-1} & \dots & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & * & \ddots & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & * & \dots & -((1-\pi_{i\zeta}^*)P_\zeta)^{-1} \end{array} \right] > 0 \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix}
-P_i^{-1} & -\sqrt{2}PP_i^{-1}(M_i\tilde{A})^T & \cdots & -\sqrt{2}P_i^{-1}(M_i\tilde{A})^T & -\sqrt{2}P_i^{-1}(M_i\tilde{A})^T & \cdots & -\sqrt{2}P_i^{-1}(M_i\tilde{A})^T & -\sqrt{2}P_i^{-1}(H_i\tilde{R}_i)^T & \cdots & -\sqrt{2}P_i^{-1}(H_i\tilde{R}_i)^T & -\sqrt{2}P_i^{-1}(H_i\tilde{R}_i)^T & \cdots & -\sqrt{2}P_i^{-1}(H_i\tilde{R}_i)^T \\
* & -(\pi l P_1)^{-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
* & * & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
* & * & \cdots & -(\pi l^2 P_\zeta)^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
* & * & \cdots & * & -((1-\pi l)P_1)^{-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
* & * & \cdots & * & * & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
* & * & \cdots & * & * & \cdots & -((1-\pi l^2)P_\zeta)^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
* & * & \cdots & * & * & \cdots & * & -(\pi l P_1)^{-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
* & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
* & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & -(\pi m P_m)^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\
* & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & -((1-\pi l)P_1)^{-1} & \cdots & 0 \\
* & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \ddots & 0 \\
* & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & -((1-\pi l^2)P_\zeta)^{-1}
\end{bmatrix} > 0 \quad (24)$$

为了设计控制器增益,现将不等式(23)左右两端同乘矩阵 $M = \text{diag}\{-P_i^{-1}, I, \cdots, I\}$, 可得上述不等式(24)。

对于不等式(24),定义 $X_i = P_i^{-1}$ 。控制器增益设计为 $\tilde{K}_i = (P_i Y_i)^T$ 。结果与式(14)相同,显然,不等式(20)已满足。此时,一定存在一个足够小的 ϵ ,使下式成立

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\{V(\delta(k+1), k+1, r_{k+1}) \mid \delta(k), r_k = i\} - \\
& V(\delta(k), k, i) < -\epsilon \|x_i(k) - x_0(k)\|^2
\end{aligned} \quad (25)$$

对 $\forall r_k = i, i \in \Upsilon$, 则有

$$\begin{aligned}
& \epsilon \sum_{k=0}^{\alpha} \mathbb{E}[\|x_i(k) - x_0(k)\|^2] \leq \\
& \sum_{k=0}^{\alpha} [\mathbb{E}(V(\delta(k), r_k)) - \\
& \mathbb{E}(V(\delta(k+1), r_{k+1}))] = \\
& [V(\delta(0), r_0) - \mathbb{E}(V(\delta(N+1), r_{N+1}))] \leq \\
& V(\delta(0), r_0)
\end{aligned} \quad (26)$$

继而得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\|x_i(k) - x_0(k)\|^2] = 0 \quad (27)$$

根据定义 1 可得离散多智能体系统(1)(2)达到了均方领导-跟随一致性,证明完成。

接下来,为了确保离散准滑动模态是可达的,我们将设计一个合适的趋近律在有限时间内达到离散时间滑模面的区域中。

定理 2 考虑滑模面函数为式(8),如果满足下列条件

$$\|1 - qT - \beta_0\| < 1 \quad (28)$$

其中 $\beta_0 > 0, q > 0, 1 - qT > 0$, 且滑模控制律设计为:

$$u(k) = -[\tilde{G}\tilde{B}C_{r_k}]^{-1}[\tilde{G}(\tilde{A} - \tilde{B}K_{r_k})\delta(k) - (1 - qT)s(k) + \beta_0 |s(k)| \text{sgn}(s(k))] \quad (29)$$

那么全局领导-跟随误差系统(7)能够在滑模

控制律(29)下有限时间内引导误差轨迹到达预定义的滑模面区域并保持在其中。

证明:定义如下的指数趋近律

$$s(k+1) - s(k) = -qTs(k) - \beta \text{sgn}(s(k)) \quad (30)$$

其中 $\beta > 0, q > 0, 1 - qT > 0$

由符号函数产生的到达律表达式(30)中不连续项可以看出:控制律的意外快速变化会产生抖振现象。当系统的轨迹位于远离滑动面时,增益 β 起重要作用确保快速收敛。然后 β 减小,直到到达滑动面。这样抖振现象将会减少。因此考虑一个可变增益

$$\beta(k) = \beta_0 \|s(k)\| \quad (31)$$

此时,到达律可以表示为

$$\begin{aligned}
s(k+1) - s(k) = & -qTs(k) \\
& -\beta_0 \|s(k)\| \text{sgn}(s(k))
\end{aligned} \quad (32)$$

根据式(32)可得

$$s(k+1) = (1 - qT - \beta_0)s(k) \quad (33)$$

进一步地,式(33)可改写为

$$\frac{\|s(k+1)\|}{\|s(k)\|} = \|1 - qT - \beta_0\| \quad (34)$$

由式(28)和 Sarpturk 等^[11]给出的到达条件,可知通过设计的控制律(29),离散多智能体系统(1)(2)的轨迹可以在有限的时间内被驱动到平衡点附近的区域,并随后保持在其中,从而完成了对该定理的证明。

4 仿真算例

本节给出一个数值例子来验证定理 1 的有效性。首先,给出一个离散时间多智能体系统,其系统矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} 0.02 & 1.04 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.92 \end{bmatrix}。$$

考虑一个由四个跟随者和一个领导者组成的多智能体系统,领导者符号为 0,跟随者符号分别为 1、2、3、4。它们的通信拓扑结构在如图 1 所示的三种拓扑结构下按照三阶 Markov 链切换,容易看出,每个可能的拓扑图中都包含一个有向生成树。

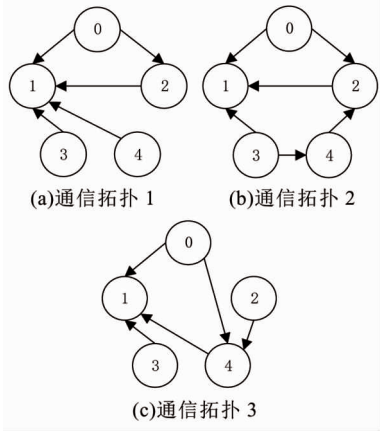


图 1 具有 3 个跳变模式的通信拓扑图

通过图 1 可以得到对应的拉普拉斯矩阵和领导者-跟随者之间的邻接矩阵分别为

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

$$B_1 = \text{diag}\{1, 1, 0, 0\}, B_2 = \text{diag}\{1, 0, 1, 0\}, B_3 = \text{diag}\{1, 0, 0, 1\}。$$

该三阶 Markov 链的转移概率矩阵定义为 $\pi = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ ? & 0.1 & ? \\ ? & 0.4 & ? \end{bmatrix}$,其中“?”表示该转移概率是未知的。

根据离散时间滑模面(8)的设计要求,令 $G = [2, 1, 1]$ 。那么根据定理 1 的方法和结论,利用 Matlab 工具箱中的 LMI 可以求解出对应的滑模控制增益为

$$K_1 = [0.0052 \quad 0.2831],$$

$$K_2 = [0.0016 \quad 0.0809],$$

$$K_3 = [0.0017 \quad 0.0898]。$$

设该智能体算例的初始状态为 $x_0 = [0, 0]^T$, $x_1 = [1, 4]^T$, $x_2 = [2, -1]^T$, $x_3 = [-3, 0]^T$, $x_4 = [3, 9]^T$ 。那么借助 Matlab 可以进行随机数值计算和仿真,具体的仿真结果如图 2~图 6 所示。图 2 是具有三种模式的 Markov 切换信号。图 3 显示了领导者和 4 个跟随者的状态轨迹路径。结果表明,在 2s 时间内所有的跟随者都可以与领导者同步。图 4 表示领导者和跟随者之间的跟踪误差,在 2s 后跟踪误差最终趋于零。这意味着随机离散多智能体系统达成均方一致。图 5 是 4 个跟随者的滑模面轨迹。图 6 显示了对 4 个跟随者设计的控制器轨迹。由此可知,滑模面和控制器在 3S 后都保持稳定。由此看出,定理 1 的方法和结论对实现离散多智能体系统的一致性控制是有效的。

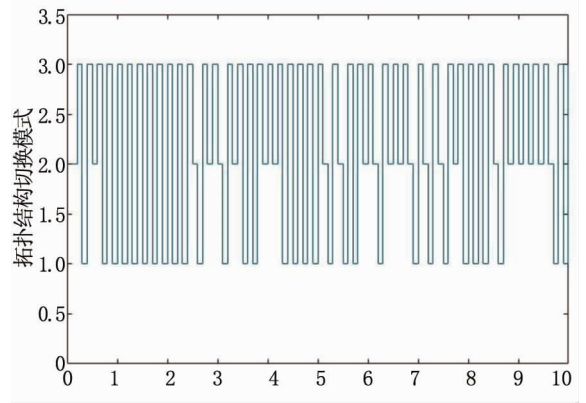


图 2 切换模式

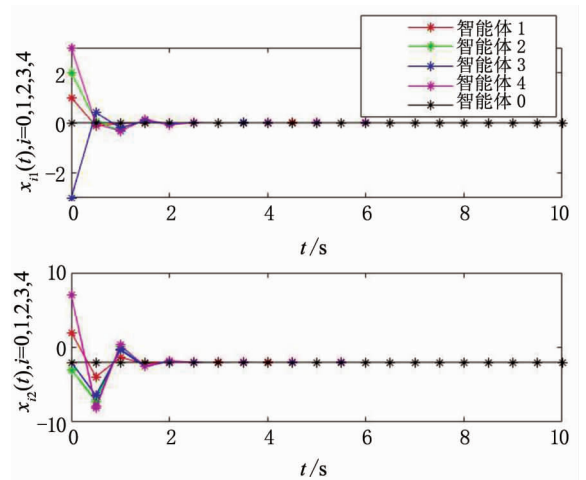


图 3 领导者和 4 个跟随者的两个状态分量

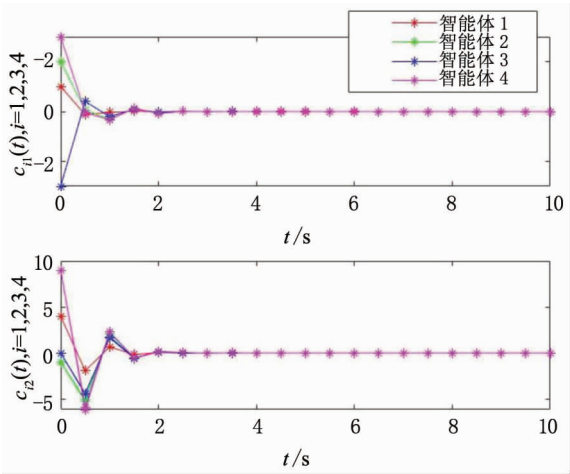


图 4 跟踪误差的两个状态分量

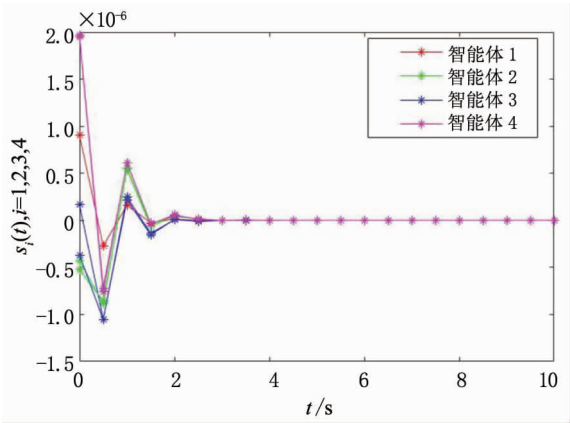


图 5 4 个跟随者的滑模面

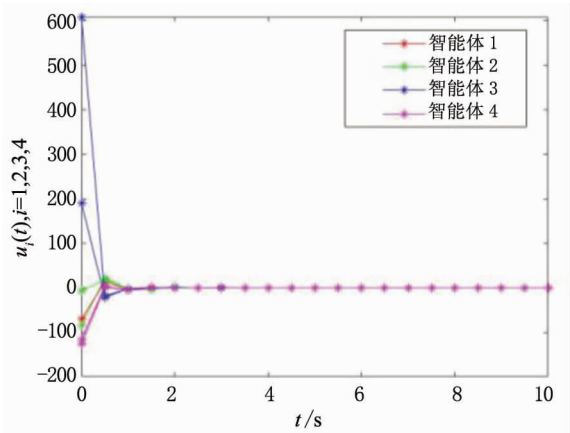


图 6 4 个跟随者的控制器

5 结 论

利用离散时间滑模控制方法,研究了具有 Markov 切换拓扑的离散多智能体系统的均方意义上领导-跟随一致性问题。考虑了转移概率部分已知但部分未知的情况。在改进的离散时间滑模

面基础上,所提出的滑模控制方法能够在有限的时间内使跟随者与领导者实现均方一致性。借助 Lyapunov 函数,结合矩阵理论的知识,得到了在均方意义上达到滑动模态一致性的充分条件。目前关于离散多智能体系统其他控制方法的研究,由于系统描述或拓扑切换方式不一致,无法将本文提出的滑模一致性控制方法与现有研究中其他控制方法的控制效果直接进行对比。后续将进一步拓展我们的方法到这些新研究成果中。

参考文献

[1] GUO Ling, NIAN Xiaohong, PAN Huan. Leader-following consensus of multi-agent systems with switching topologies and time-delays[J]. Control Theory and Applications, 2013, 11(2): 306–310.

[2] 陈世明, 黎力超. 非线性随机多智能体系统的固定时间一致性[J]. 控制理论与应用, 2021, 38(4): 540–546.

[3] LIU Zili, YAN Weisheng, LI Huiping, et al. Cooperative output regulation problem of discrete-time linear multi-agent systems with Markov switching topologies[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(8): 4795–4816.

[4] PEI Yongquan, SUN Jitao. Consensus of discrete-time linear multi-agent systems with Markov switching topologies and time-delay[J]. Neurocomputing, 2015, 151(2): 776–781.

[5] 刘雨欣, 陈霞. 基于事件触发的离散多智能体二分一致性[J]. 计算技术与自动化, 2021, 40(2): 91–98.

[6] YAN Ziwei, HAN Liang, LI Xiaoduo, et al. Event-Triggered formation control for time-delayed discrete-Time multi-Agent system applied to multi-UAV formation flying[J]. Journal of the Franklin Institute, 2023, 360(5): 3677–3699.

[7] CHEN Shijie, DAI Jiahao, YI Jingwen, et al. An optimal design of the leader-following formation control for discrete multi-agent systems[J]. IFAC PapersOnLine, 2022, 55(3): 201–206.

[8] 景丽. 离散异构线性多智能体系统的输出一致性[J]. 计算技术与自动化, 2022, 41(2):19–22.

[9] SABER R O, MURRAY R M. Consensus protocols for networks of dynamic agents[C]. Proceedings of the 2003 American Control Conference, Denver, CO, USA, 2003: 951–956.

[10] HAN Yueqiao, KAO Yonggui, GAO Cunchen. Robust observer-based H_{∞} control for uncertain discrete singular systems with time-varying delays via sliding mode approach[J]. ISA Transactions. 2018, (80): 81–88.

[11] SARPYURK S Z, ISTEFANOPULOS Y, KAYNAK O. On the stability of discrete-time sliding mode control systems[J]. Automation and Remote Control, 1987, 32(10): 930–932.