基于自适应成长法的薄壁结构加筋保形优化设计

王俊翔[1] 丁晓红[1*] 张 横[1] 张德慧[2] 熊 敏[1]
1.上海理工大学机械工程学院,上海,200093
2.博世华域转向系统有限公司,上海,201821

摘要:针对薄壁结构受载时局部区域易产生翘曲变形的问题,提出一种基于自适应成长法的分阶段保形拓扑优化设计方法,获得了兼顾局部保形需求与整体结构性能合理且清晰的加强筋布局。悬臂板、受弯扭载荷方板以及含孔洞保形域方板等数值算例对比分析表明,直接引入保形约束会导致主传力路径畸变和刚度损失,而分阶段优化策略能够有效避免早期生长受干扰现象。进一步分析具有空腔薄板的两种保形方案发现,约束不同保形控制点会导致保形区周围辅筋分布存在差异,而整体主传力路径基本保持稳定,仅有部分对性能贡献较小的主筋可能发生退化或分歧新的筋条。

关键词:拓扑优化;加强筋分布;保形;自适应成长法;薄壁结构
中图分类号:TH122;V214.4
DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2026.11.016 **开放科学(资源服务)标识码(OSID)**:

Shape-preserving Optimization Design of Stiffened Thin-walled Structures Based on Adaptive Growth Method

WANG Junxiang[1] DING Xiaohong[1*] ZHANG Heng[1] ZHANG Dehui[2] XIONG Min[1]
1.School of Mechanical Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai,200093
2.Bosch Huayu Steering Systems Co.,Ltd.,Shanghai,201821

Abstract: To address the problems of local warping deformation for thin-walled structures under external loads, a staged shape-preserving topology optimization design method was proposed based on AGM, achieving a rational and well-defined stiffener layout that balanced the local shape-preserving requirements with global structural performance. Comparative numerical studies on cantilever plates, square plates under combined bending-torsion loading, and square plates with hole-shaped shape-preserving domains show that directly imposing shape-preserving constraints may cause distortion of the main load-transfer path and stiffness degradation, while the proposed staged strategy effectively avoids interference during early stiffener growth. Further analyses of two shape-preserving schemes for perforated thin plates indicate that different selections of control points may lead to variations in the distribution of auxiliary stiffeners around the shape-preserving region, whereas the global main load-transfer path remains largely stable, with only a few stiffeners of minor contribution to performance undergoing degradation or branching into new members.

Key words: topology optimization; stiffener layout; shape-preserving; adaptive growth method (AGM); thin-walled structure

0 引言

薄壁结构凭借其轻质高刚、高强度和高材料利用率被广泛应用于航空航天等领域。为提高结构的力学性能,常在其表面布置加强筋以提高结构整体的强度和刚度。拓扑优化技术是现代结构设计的前沿工具,在优化过程中依据一定准则并满足一个或多个约束来实现结构性能最优,是目前设计加强筋合理分布的常用方法。最早用于解决连续体结构拓扑优化问题的是均匀化法[1],随后发展了密度法[2]、渐进结构优化法[3]、水平集方法[4]和可移动组件法[5]等方法,以寻求结构最优材料布局。

实际工作环境下,薄壁结构在承受外载时薄弱区域易发生较大变形,导致结构局部区域的弹性变形不协调,进而造成功能型面的形状精度下降甚至局部失效[6]。结构的总位移可分为刚体运动与翘曲变形两部分,其中不利影响来源于翘曲变形,自身刚体运动并不造成负面影响。

为抑制结构局部区域的翘曲变形,朱继宏

收稿日期:2025-09-23
基金项目:国家自然科学基金(51975380)

等[7]提出了一种保形设计方法，以结构局部区域应变能的大小来衡量变形，通过施加小的正上限约束来实现对特定区域的保形设计，其研究成果成功地解决了飞机风挡玻璃受载后易破碎的问题。该团队在进一步研究中提出了方向性保形[8]，仅约束特定方向上的变形，提高了所提方法在复杂工况下的灵活性。在实际应用方面，保形优化方法在高速飞行器的结构设计中发挥较大优势，还成功用于防止机械变形对雷达散射截面产生影响[9]。另有一些研究通过在数学模型中引入位移要素来解决该问题[10-11]，实现了对局部节点或子域的位移控制。然而，上述各项研究均基于密度法，以隐式表达形式输出材料密度分布的灰度图，所得优化拓扑形态的清晰度往往较低，难以直接应用于工程结构，尤其在需要明确结构构件几何的加筋类设计中存在一定局限性。

DING等[12]从仿生优化思路中得到启发，提出了自适应成长法(adaptive growth method，AGM)。该方法直接以加强筋截面几何参数为设计变量，可生成清晰的几何显式加强筋分布结果，已广泛应用于板壳结构及三维箱型结构的动、静态性能拓扑优化设计中[13-15]。采用自适应成长法对含实体保形区或孔洞保形区的薄壁结构进行加强筋布局设计时，如何引导加强筋生长以抑制局部翘曲、维持工作过程中的几何稳定性，是一个值得研究的问题。自适应成长法模拟植物根系的生长机理，使加强筋沿主要传力路径逐步形成。若直接引入保形约束，则可能干扰原有生长过程及主传力路径的形成，甚至导致筋条早期分支失败或布局畸形，从而导致结构整体性能降低。

本文针对具有保形需求的薄壁结构拓扑优化设计问题，研究基于自适应成长法的加强筋分布设计。针对优化过程中存在的问题，提出一种分阶段保形优化策略，将优化过程划分为“结构刚度主导阶段”与“保形约束引导阶段”，在早期阶段先基于植物根系的生长机理构建合理的主传力路径，随后再引入保形约束引导局部结构优化，进而获得能够有效兼顾整体结构性能与局部保形设计需求的清晰加强筋分布形态。

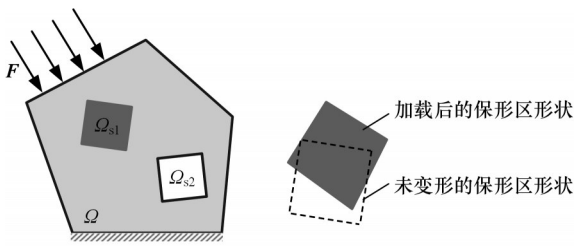
1　设计方法

1.1　保形优化设计

带有保形区域的优化设计模型如图1所示，整体设计域为Ω_s，其中Ω_{s1}和Ω_{s2}分别表示两个局部保形区域，该区域可以是实体构件、结构特征区域或开口。结构在外部载荷F的作用下，保形区域将同时发生刚体位移和相对位移，则整体位移可表示为

$$\boldsymbol{u}_s=\boldsymbol{u}_{sR}+\boldsymbol{u}_{sW} \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{u}_s$为保形区域的总体位移向量；$\boldsymbol{u}_{sR}$为对应保形区的刚体位移向量；$\boldsymbol{u}_{sW}$为该保形区的相对位移向量(即翘曲变形)。



(a)设计问题　　(b)保形区的变形方式

图1　保形设计问题示意模型

Fig.1　Schematic model of the shape-preserving design problem

系统中翘曲变形会引起额外应变能变化，为定量描述保形区域的翘曲变形程度，采用朱继宏等[7]使用的弹性应变能函数，其表达式为

$$C_{\Omega s}=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{u}_s=\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_{sR}+\boldsymbol{u}_{sW})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_s(\boldsymbol{u}_{sR}+\boldsymbol{u}_{sW})=$$
$$\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_{sR}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{u}_{sR}+\boldsymbol{u}_{sR}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{u}_{sW}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_{sW}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{u}_{sW}=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_{sW}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{u}_{sW} \tag{2}$$

其中，$C_{\Omega s}$为保形区域的应变能，$\boldsymbol{K}_s$为该区域的刚度矩阵。式(2)的运算基于刚体位移不引起结构变形，因此不产生变形能这一特征。

式(2)定义的保形区应变能可用于表征区域内节点间相对位移所反映的弹性翘曲变形。理论上，保形区不发生弹性变形时，其应变能为0，实际优化过程中，保形区仍会产生随载荷状态变化的有限弹性变形。由此，根据工程允许的变形程度，建立如下保形约束：

$$C_{\Omega s}\leqslant\varepsilon \tag{3}$$

其中，ε为一个大于零的较小上限，当满足式(3)时，即可认定在保形设计域内的翘曲变形得到了有效抑制。

1.2　自适应成长技术

自适应成长法是一种模拟自然界分枝系统形成机理的结构拓扑优化方法。采用基结构法建立薄壁结构的设计模型，如图2所示。以4节点四边形壳单元对薄壁结构进行离散，并根据相邻节点创建梁单元从而生成加强筋。加强筋具有一定的初始高度，本文将加强筋高度H作为设计变量，初始截面宽度T设置为与板壳厚度相等，如图2c所示。

图3展示了加强筋的自适应生长过程，优化数学模型为

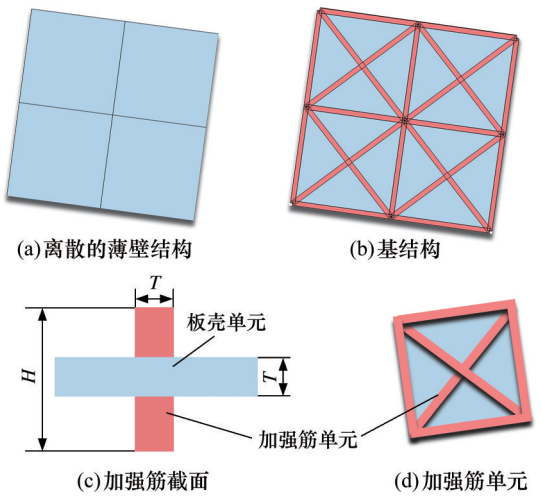


图2 基结构模型

Fig.2 Model of ground structure

$$\left.\begin{aligned}&\min\ f(\boldsymbol{H})\\&\text{s.t.}\ l_z(\boldsymbol{H})\leqslant 0 \quad z=1,2,\cdots,Z\\&\quad t_x(\boldsymbol{H})=0 \quad x=1,2,\cdots,X\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

式中：f为目标函数；l_z、t_x分别为不等式和等式的约束函数；Z、X分别为不等式和等式约束函数的个数；$\boldsymbol{H}$为加强筋高度向量。

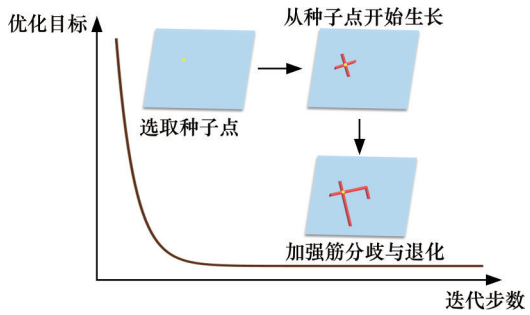


图3 薄壁结构加强筋自适应生长过程

Fig.3 Adaptive growth process of stiffeners in thin-walled structures

根据载荷和支撑条件确定种子点位置，并将该位置作为加强筋的初始成长点，与种子点相接的单元为活动单元，这些活动单元共同构成活动加强筋集合。给定优化基本参数，包括：加强筋高度初始值H_0，设计变量上下限$H_{\max}$、$H_{\min}$，分歧高度值H_b以及移动渐近线上下限值。随后计算活动加强筋集合中每个单元的灵敏度，通过移动渐近线算法更新单元高度。若加强筋单元高度低于初始值，则该单元退出活动单元集合，且不再参与后续优化；若加强筋单元高度满足分歧条件，则具备分歧能力，并将其相邻单元纳入活动加强筋集合，在后续的优化迭代中继续参与生长、分歧或退化。整个过程类似于植物根系对环境刺激做出的适应性响应，当结构整体刚度达到最优时，迭代过程则终止，从而可形成满足性能要求的加强筋分布形态。

1.3 优化设计数学模型

针对保形优化设计问题，以加强筋的高度为设计变量，在满足加强筋体积、保形区域变形能及高度范围的约束条件下，以最小化结构总应变能为优化目标，寻找最优的加强筋高度分布方案。数学优化模型可表示为

$$\left.\begin{aligned}&\text{find}\ \boldsymbol{H}=(H_1,H_2,\cdots,H_N)^{\mathrm{T}}\\&\min\ C(\boldsymbol{H})=\frac{1}{2}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}\\&\text{s.t.}\ g(\boldsymbol{H})=V-\eta V_0\leqslant 0\\&\quad C_{\Omega s}\leqslant\varepsilon\\&\quad 0<H_{\min}\leqslant H_i\leqslant H_{\max} \quad i=1,2,\cdots,N\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

式中：N为加强筋单元的总数量；H_i为第i个加强筋的高度；C为结构总应变能；$\boldsymbol{U}$为位移向量；$\boldsymbol{K}$为刚度矩阵；V为优化后的加强筋总体积；V_0为加强筋初始体积；η为体积约束因子；$H_{\min}$、$H_{\max}$分别为加强筋的最小高度和最大高度。

1.4 多阶段优化策略

若直接在自适应成长法中施加保形约束，则往往会干扰加强筋的早期生长路径。由于保形约束影响了灵敏度分布，部分原本应沿主力流路径生长的加强筋未能满足分歧条件或提前退出活动单元集合，进而导致主传力路径偏离、局部加强筋分布畸变，最终优化结果的全局刚度损失较大。这类干扰在复杂结构与载荷条件下更为显著，降低了优化结果的物理合理性与工程可行性。

为此，本文提出一种多阶段优化策略用于解决保形优化设计中因保形约束干扰而导致的加强筋不合理分布问题。将优化过程划分为两个阶段，在不同阶段中采用不同的种子点与优化设计参数，从而有效引导加强筋在初始阶段沿主传力路径合理成长，避免因早期扰动而干扰主筋走向。采用分阶段策略的保形拓扑优化设计过程如图4所示。

初始阶段的优化目标为最大化结构的整体刚度，不引入保形约束。通过引导加强筋由预设种子点出发，沿主应力路径方向进行自然生长，并根据灵敏度信息更新活动单元高度，从而实现主承载路径的初步构建。为避免优化过程过早受限于局部约束，该阶段设置柔度判断准则作为终止条件，即将当前结构的总应变能C_d与全局刚度最优解对应的应变能C_R进行比较，当二者之比满足

$$\frac{C_d}{C_R}\leqslant 1+\lambda \tag{6}$$

即认为主传力路径已基本形成，可进入下一阶段。其中，C_R由自适应成长法在不引入保形约束的条件下通过持续迭代直至完全收敛所获得，以此作为全局刚度上限的理论参考值。λ为判断因

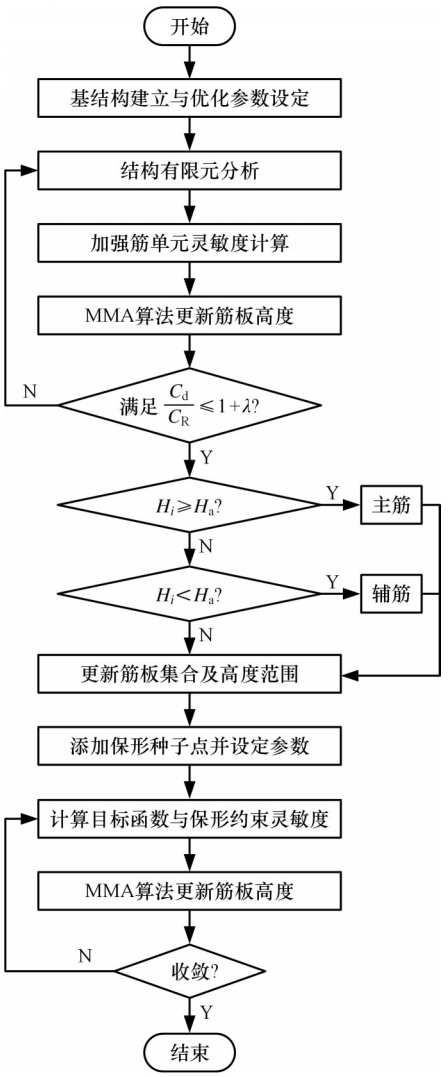


图4　分阶段优化策略的流程图

Fig.4　Flowchart of the staged optimization strategy

子，为兼顾主结构形态的充分发展与计算效率，λ的取值通常在0.1%～0.5%范围内较为合适。在该范围内，优化结构形态与标准刚度优化结果较为一致，主承载路径连续且分布合理，有利于在第二阶段控制局部区域的变形而降低对整体结构性能的影响。本文取$\lambda=0.25\%$，能在保证主筋细节充分发育的前提下，避免因过小取值带来的不必要迭代，从结构质量与优化效率两方面实现较好平衡，进而获得加强筋合理分布结果，该取值也在多次数值实验中表现出良好的适应性。

其次，在达到第一阶段终止条件后，对当前结构中所有加强筋单元进行分类，将高度大于主筋判断高度H_a的单元归入主筋集合，其余则归入辅筋集合。两类筋采用不同的成长策略，主筋集合内的加强筋始终处于活动集合中，并在优化过程中不断更新高度，主筋高度H_{main}的范围为$[H_a, H_{max}]$，用于维持和加强主传力路径。辅筋高度H_{auxi}的范围仍在初始高度与最大高度之间，根据分歧条件加入活动集合或在不满足时退化，用于调节局部应力以实现保形的目的。

第二阶段在第一阶段优化结果基础上引入保形约束，优化目标转向协调整体结构性能与局部区域形状维持之间的关系，其优化模型可表示为

$$\left.\begin{aligned}&\text{find } \boldsymbol{H}_{main}=(H_{main\,1},H_{main\,2},\cdots,H_{main\,J})^{\mathrm{T}}\\&\quad\ \boldsymbol{H}_{auxi}=(H_{auxi\,1},H_{auxi\,2},\cdots,H_{auxi\,K})^{\mathrm{T}}\\&\min C(\boldsymbol{H})=\frac{1}{2}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}\\&\text{s.t. } g(\boldsymbol{H})=(V_1+V_2)-\eta V_0\leqslant 0\\&\quad\ C_{\Omega s}\leqslant\varepsilon\\&\quad\ H_a\leqslant H_{main\,j}\leqslant H_{max}\quad j=1,2,\cdots,J\\&\quad\ H_{min}\leqslant H_{auxi\,k}\leqslant H_{max}\quad k=1,2,\cdots,K\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

式中：$\boldsymbol{H}_{main}$、$\boldsymbol{H}_{auxi}$分别为主筋和辅筋的高度向量；V_1、V_2分别为主筋和辅筋的总体积；J、K分别为主筋和辅筋的数量。

考虑到保形区域周边常出现细小加强筋分布的现象，本阶段依据保形区的几何形状，在其周围顶点处增设种子点，以引导局部加强筋的生长。在保形优化过程中，主筋集合保留了第一阶段所形成的主承载路径，并与辅筋根据灵敏度进一步演化，更新策略采用MMA算法，其表达式如下：

$$H_i^{(t+1)}=MMA\left(H_i^{(t)},\frac{\partial C}{\partial H_i},\frac{\partial C_{\Omega s}}{\partial H_i}\right)\tag{8}$$

式(8)表示以第t次迭代的加强筋高度$H_i^{(t)}$、总应变能灵敏度和保形区应变能灵敏度为输入，通过MMA算法求解近似优化子问题，得到第$t+1$次迭代的加强筋高度。在保形约束作用下，一些对性能贡献较小的主筋也可能发生退化，主筋高度逐步降低。低效筋退化所节省的材料将分配至辅筋区域，以促进辅筋细化生长或形成新的加强筋分支。通过主辅筋协同优化，可确保在满足保形约束的前提下结构性能达到最优。

最后，当目标函数值的变化小于收敛容差时，优化程序停止，并输出最终结构拓扑形态。

1.5　灵敏度分析

自适应成长法中，加强筋的生长方向依赖于目标函数对设计变量的灵敏度，即加强筋沿着目标函数灵敏度最大的方向成长。对于包含局部保形约束的优化问题，需分别推导出结构总应变能和保形区应变能关于设计变量H_i的灵敏度。结构总应变能的灵敏度常见于相关研究[12]中，可由下式直接推导得出：

$$\frac{\partial C}{\partial H_i}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial H_i}\boldsymbol{U}\tag{9}$$

本文重点针对保形约束的灵敏度推导过程进行分析。对式(2)等号两端关于设计变量H_i求偏导数可得

$$\frac{\partial C_{\Omega s}}{\partial H_i}=\frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{u}_{sW}^{T}}{\partial H_i}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{u}_{sW}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_{sW}^{T}\frac{\partial \boldsymbol{K}_s}{\partial H_i}\boldsymbol{u}_{sW}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_{sW}^{T}\boldsymbol{K}_s\frac{\partial \boldsymbol{u}_{sW}}{\partial H_i} \tag{10}$$

考虑到刚度矩阵的对称性，式(10)可进一步写为

$$\frac{\partial C_{\Omega s}}{\partial H_i}=\boldsymbol{u}_{sW}^{T}\boldsymbol{K}_s\frac{\partial \boldsymbol{u}_{sW}}{\partial H_i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_{sW}^{T}\frac{\partial \boldsymbol{K}_s}{\partial H_i}\boldsymbol{u}_{sW} \tag{11}$$

由于优化设计变量与保形区域结构刚度无关，因此其刚度矩阵对加强筋高度H_i的灵敏度为0，式(11)可进一步简化为

$$\frac{\partial C_{\Omega s}}{\partial H_i}=\boldsymbol{u}_{sW}^{T}\boldsymbol{K}_s\frac{\partial \boldsymbol{u}_{sW}}{\partial H_i} \tag{12}$$

实际上，保形区域的位移向量是结构总体位移向量的一部分，可以通过引入转换矩阵$\boldsymbol{T}_s$，以总体位移向量的形式表示，即

$$\boldsymbol{u}_{sW}=\boldsymbol{T}_s\boldsymbol{U} \tag{13}$$

考虑局部相对位移矢量$\boldsymbol{u}_{sW}$的偏导数，则有

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_{sW}}{\partial H_i}=\boldsymbol{T}_s\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial H_i}=\boldsymbol{T}_s\boldsymbol{K}^{-1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial H_i}-\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial H_i}\boldsymbol{U}\right) \tag{14}$$

将式(14)代入式(12)，可得

$$\frac{\partial C_{\Omega s}}{\partial H_i}=\boldsymbol{u}_{sW}^{T}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{T}_s\boldsymbol{K}^{-1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial H_i}-\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial H_i}\boldsymbol{U}\right) \tag{15}$$

为避免对刚度矩阵直接求逆，引入伴随法进行求解。定义

$$\boldsymbol{u}_{sW}^{T}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{T}_s=(\boldsymbol{\lambda}^{*})^{T} \tag{16}$$

其中，$\boldsymbol{\lambda}^{*}$为阶数与结构自由度数量一致的列向量。将$\boldsymbol{\lambda}^{*}$作为伴随载荷施加于原结构上，通过一次附加有限元分析可得到

$$\boldsymbol{\lambda}^{*}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}^{*} \tag{17}$$

$$(\boldsymbol{\lambda}^{*})^{T}\boldsymbol{K}^{-1}=(\boldsymbol{u}^{*})^{T} \tag{18}$$

其中，伴随位移向量$\boldsymbol{u}^{*}$表示在施加伴随载荷$\boldsymbol{\lambda}^{*}$后，结构总体产生的虚拟位移矢量。于是，式(15)可写为

$$\frac{\partial C_{\Omega s}}{\partial H_i}=(\boldsymbol{u}^{*})^{T}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial H_i}-\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial H_i}\boldsymbol{U}\right) \tag{19}$$

式(19)中外部载荷$\boldsymbol{F}$和刚度矩阵$\boldsymbol{K}$的灵敏度可经计算得到，对于与设计无关的外部载荷，有$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial H_i}=0$。则式(19)可简化为

$$\frac{\partial C_{\Omega s}}{\partial H_i}=-(\boldsymbol{u}^{*})^{T}\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial H_i}\boldsymbol{U} \tag{20}$$

由此，得到了保形设计约束关于加强筋高度H_i的灵敏度表达式。

1.6 人工附加弱单元

当保形域为实体结构时，可以通过直接约束该区域的应变能来轻松实现保形设计。但当保形域为空腔或孔洞时，不存在计算该区域应变能的物理元素。本文通过人工附加弱单元(artificial weak element，AWE)[7]的变形能间接实现对空腔区翘曲变形的表征。

在原结构上附加弱单元，由于弱单元的刚度相对于结构本身足够小，可忽略它对结构总体力学性能的影响。弱单元依据保形域内指定的关键节点生成，通过多点约束(multi-point constraints，MPCs)附加于原结构，如图5所示。

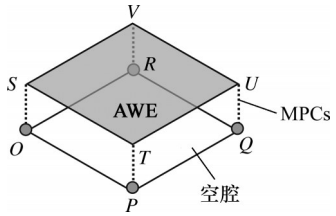


图5 保形设计中AWE的构成示意图

Fig.5 Schematic of the artificial weak element(AWE) in shape-preserving design

本文通过对全部自由度进行耦合处理，可使AWE的位移向量$\boldsymbol{u}_{AWE}$与保形区域位移向量$\boldsymbol{u}_s$完全一致，即

$$\boldsymbol{u}_{AWE}=\boldsymbol{u}_s \tag{21}$$

以弱单元的变形能表征变形控制点的翘曲变形程度，通过约束AWE变形能C_{AWE}以达到保形目的，约束表达式如下：

$$C_{AWE}\leqslant\varepsilon \tag{22}$$

以AWE的方式引入保形约束对设计变量的灵敏度分析与1.5节所述过程原理相同，此处不重复推导。C_{AWE}对加强筋高度H_i的灵敏度为

$$\frac{\partial C_{AWE}}{\partial H_i}=-(\boldsymbol{u}^{*})^{T}\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial H_i}\boldsymbol{U} \tag{23}$$

2 数值算例

以不同载荷作用下的薄板结构为例开展保形优化设计，并将设计结果分别与仅考虑整体刚度最大化的标准优化设计结果和直接引入保形约束所得的优化结果进行对比分析。通过对比不同方法下结构的拓扑形态与最终优化性能，以验证所提分阶段保形优化策略在合理性、保形控制能力及结构性能方面的综合优势。

2.1 承受集中力的悬臂板

图6中悬臂板结构的长宽尺寸为100 mm×60 mm，板厚为0.02 mm，保形域为结构中心的方形域，内部无初始加强筋布置。结构左端固定，右下端受竖直向下集中力的作用。薄板及加强筋的材料弹性模量设为100 GPa，保形区域的材料弹性模量为10 GPa，整体结构的泊松比为0.3。

在体积约束因子η=1.6的条件下，首先以最小化结构总应变能为目标，不考虑局部保形约束，采用自适应成长法求解加强筋分布。最终优化设

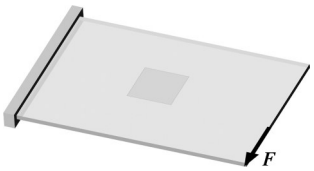


图6　受集中力悬臂板设计模型

Fig.6　Cantilever plate model under concentrated load

计结果如图7所示，种子点根据边界条件选在结构左侧节点和载荷作用点，用黄色圆点表示，图中红色线条表示加强筋，其宽度表示加强筋高度。加强筋形成了由集中力作用点到板左端支撑处的传力路径，并在结构内部有斜向加强筋分布以提高整体稳定性，最终结构总应变能为1.895 J，对应保形区域的应变能为0.195 J。

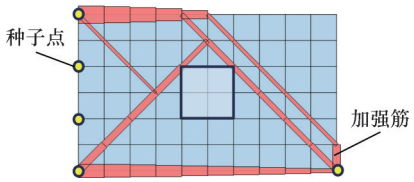
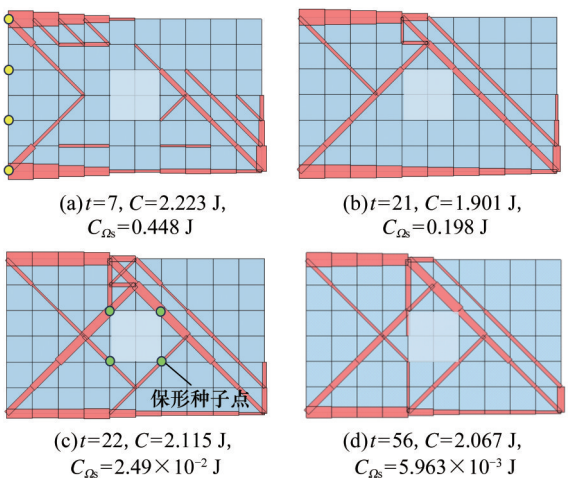


图7　悬臂板标准拓扑优化设计结果

Fig.7　Standard topology optimization result of the cantilever plate

分阶段保形优化设计中，将第一阶段终止判断因子λ设为0.25%，主筋判断高度H_a=1.5 mm，主筋高度和辅筋高度的取值范围分别为1.5～10.0 mm、0.2～10.0 mm。第二阶段开始时在保形区四角添加保形优化种子点，保形约束的上限值$\varepsilon=6\times10^{-3}$ J，约为不加约束时保形区局部应变能的3%。图8a～图8d展示了保形优化的加强筋生长过程。在优化初期加强筋从种子点位置开始生长，在载荷作用点和左边上下支撑位置逐步形成传力路径，首先向着总结构刚度最大的方向趋于成熟。当优化进入第二阶段后引入保形约束，



(a)t=7, C=2.223 J, $C_{\Omega s}$=0.448 J　(b)t=21, C=1.901 J, $C_{\Omega s}$=0.198 J

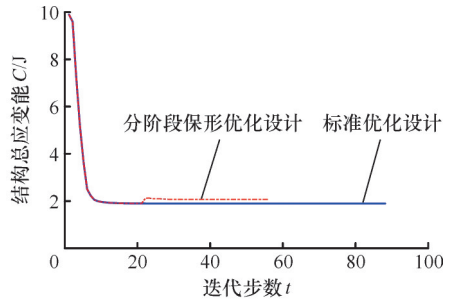
(c)t=22, C=2.115 J, $C_{\Omega s}$=2.49×10^{-2} J　(d)t=56, C=2.067 J, $C_{\Omega s}$=5.963×10^{-3} J

图8　悬臂板保形优化设计结果

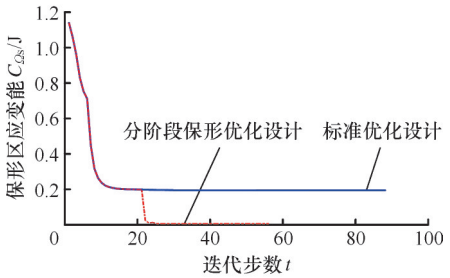
Fig.8　Shape-preserving optimization result of the cantilever plate

由图8c可见，此时保形区周围有细小加强筋从保形种子点迅速生长以控制局部变形，同时部分原有筋条因对整体性能贡献有限，导致其高度逐渐降低。当迭代步数t=56时，满足收敛条件优化停止，可形成图8d所示的加强筋分布。与标准优化结果相比，经保形设计后方形保形区的4个角点均有加强筋连接，形成了多边形框架。加强筋对保形区呈现出一种环绕分布的状态，使得传力路径在保形区周围发生改变，减少了保形区传递的载荷，从而实现了保形效果。

图9展示了不同设计方法的迭代曲线。保形优化在第一阶段与标准优化结果保持一致，曲线完全重合。进入第二阶段后，整体结构总应变能较标准优化设计略有增大，这是由于控制局部区域变形而使总结构刚度出现一定程度的损失，随后曲线逐步趋于收敛。同时，保形区域的应变能在优化第二阶段持续减小并最终稳定在约束值以下。



(a)目标函数



(b)保形区的应变能

图9　结构总应变能和保形区应变能迭代曲线

Fig.9　Iteration curves of total structural strain energy and shape-preserving region strain energy

图10给出了两种优化设计下保形域的变形云图，其中，虚线表示未发生弹性变形时的结构轮廓形状。由图10可见，标准设计下的保形区发生了较明显的翘曲变形，区域左右边界最为明显；而保形设计后变形幅度显著减小，结构的边界形状得以维持，实现了更好的局部变形协调。

如图11所示，在初始优化参数及约束条件一致的情况下，直接在算法中引入含保形约束的优化设计过程，求解过程始终依据式(5)所示的含保形约束的优化模型进行迭代。在优化初期由于受

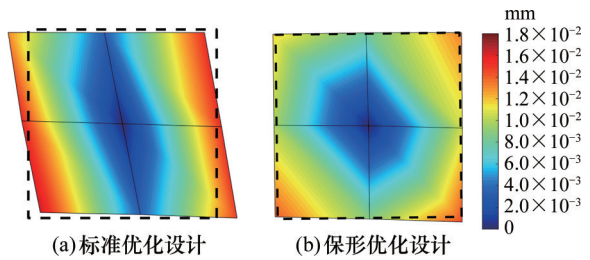


图10 保形区域的变形情况（变形放大系数为200）

Fig.10 Deformation of the shape-preserving region

（deformation scale factor is 200）

约束的影响，固定端中间的种子点附近有加强筋分布并向保形区周围生长，这导致传力路径发生畸变。最终优化结果如图11c所示，结构的部分区域出现畸形加强筋，并伴随大量细小筋条分布，整体布局不规整。表1列出了不同设计方案下结构总应变能和保形区的应变能数据。两种保形优化方案虽都满足了保形约束，但与直接引入保形约束的方法相比，本文提出的分阶段策略能有效避免因保形约束的引入造成加强筋生长方向发生偏离而陷入局部最优解的情况，且最终整体结构刚度略优于直接引入法，在结构布局合理性与保形控制之间实现了更好的平衡。

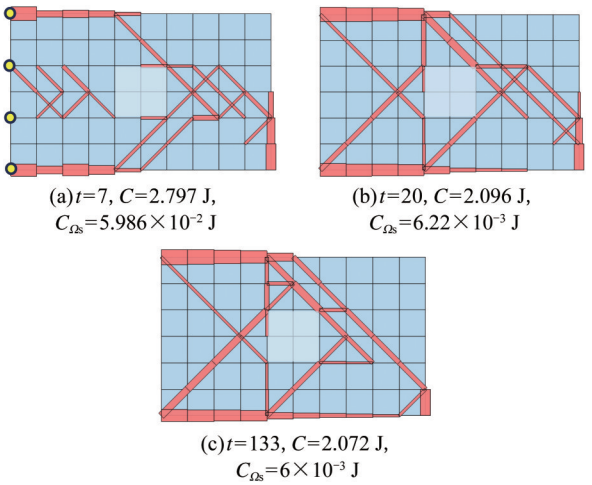


图11 悬臂板直接引入保形约束设计结果

Fig.11 Cantilever plate optimization result with directly imposed shape-preserving constraint

表1 悬臂板不同设计方法的应变能对比

Tab.1 Comparison of strain energy under different design methods for the cantilever plate

方法	应变能/J	
	总结构	保形区
标准优化	1.895	0.195
分阶段保形优化	2.067	5.963×10^{-3}
直接引入保形约束	2.072	6×10^{-3}

将本文方法与文献[7]中基于SIMP法的保形拓扑优化方法进行对比，其中SIMP法的设计结果如图12所示，其中黑色区域表示相对密度为1的实体材料区域。对比图8d与图12b可见，由两种方法得到的结构在保形区周围均发生了改变，形成了相似的四角点支撑拓扑形态，在响应保形约束方面具有一致性。不同的是，SIMP法所得结果是黑白密度分布图，部分区域存在局部增粗或变细的不规则形态，整体边界模糊，尚需进行进一步的后处理以生成可制造结构。而本文所用方法直接输出明确的加强筋几何结构，拓扑边界清晰，分布连续合理，具备更强的工程适用性。

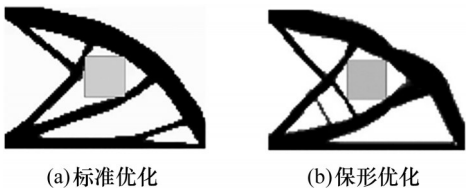


图12 SIMP法优化结果[7]

Fig.12 Optimization result by the SIMP method[7]

2.2 承受弯扭载荷的方板结构

承受横向载荷的薄板结构的加强筋分布设计更为复杂。考虑图13所示的正方形薄板，其厚度与边长之比为0.001，保形域为板中心的方形域，其左端固定，自由端受弯扭组合载荷。保形域和板结构的材料属性设为相同，弹性模量为210 GPa，泊松比为0.3。体积约束因子设为0.25，初始种子点选在支撑处和载荷作用处，由于结构载荷条件较为复杂，采用SIGMUND等[2]提出的敏度过滤法以避免网格依赖。同时，为使迭代优化具有良好的收敛性，使用文献[14]中方法将继承性引入灵敏度信息处理中。仅考虑总结构刚度最大化的设计结果如图14所示，经研究得到整体结构和保形域的应变能分别为0.765 J和2.57×10^{-4} J。

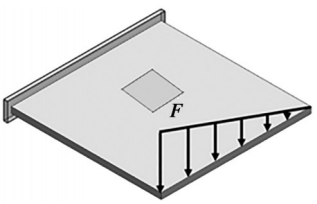


图13 受弯扭载荷的方板结构模型

Fig.13 Square plate model under bending-torsion load

分阶段保形优化判断因子的取值与2.1节相同。由于本例板结构厚度较大，加强筋的体积分数相应增大，主传力路径上的加强筋整体较高，因此将主筋判断高度H_a设为5 mm。保形种子点选在保形区四角，保形约束的上限值$\varepsilon=1\times10^{-5}$。图15a～图15d所示为保形优化设计的主要过程。第一阶段加强筋在载荷较大的一侧逐渐形成传力路径，当迭代步数t=55时进入第二阶段优化，保

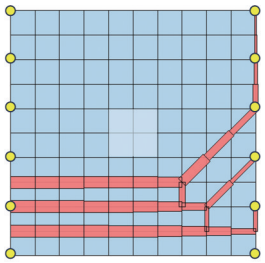


图 14　受弯扭载荷方板标准拓扑优化设计结果

Fig.14　Standard topology optimization result of the square plate under bending-torsion load

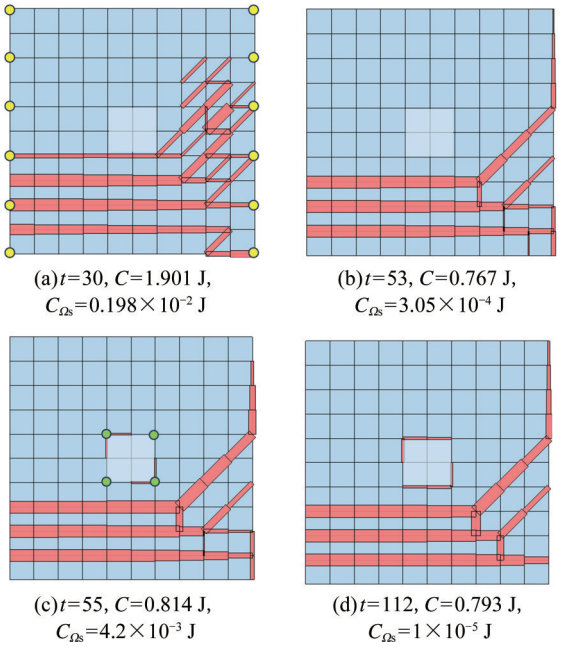


图 15　受弯扭载荷方板保形优化设计结果

Fig.15　Shape-preserving optimization result of the square plate under bending-torsion load

形种子点附近有加强筋开始生长，通过不断更新高度控制保形区应变能来满足约束条件，主筋也生长为最终形态，与标准优化设计分布相似。最终优化结果如图 15d 所示，表现为主传力路径并未发生明显改变，只是部分筋的高度大小有所区别，在保形区周围有直角筋分布，该部分充当局部加固筋，以抑制翘曲变形情况。

将保形约束直接添加到优化模型开展优化，得到图 16 所示的优化设计结果。可以看出，主筋分布于薄板上下两侧边界处以远离保形区，使得力流绕开了保形区从而达到保形目的。与标准优化的加强筋形态相比发生很大改变，原本应成长的加强筋因保形约束影响并未出现分歧。此外，保形区周围也形成了细小框形加强筋分布，以提高保形区域的刚度。三种设计方法的优化结果数据见表 2。直接引入约束法虽满足了保形约束，但整体刚度损失达到 17%，由于优化目标为全局刚度最优，通过大幅牺牲整体刚度来实现保形效果是不合理的。分阶段优化策略在全局刚度损失仅为 3.6% 的情况下还满足了保形约束。

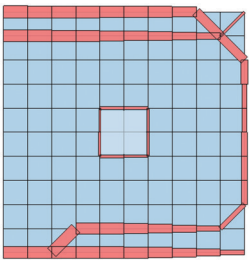


图 16　受弯扭载荷方板直接引入保形约束设计结果

Fig.16　Optimization result of the square plate with directly imposed shape-preserving constraint under bending-torsion load

表 2　受弯扭载荷方板不同设计方法的应变能对比

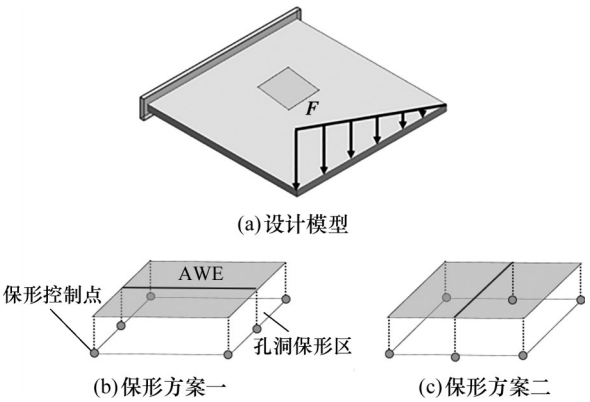
Tab.2　Comparison of strain energy under different design methods for the square plate under bending-torsion load

方法	应变能/J	
	总结构	保形区
标准优化	0.765	2.57×10^{-4}
分阶段保形优化	0.793	1.00×10^{-5}
直接引入保形约束	0.896	1.00×10^{-5}

2.3　具有孔洞保形域的受弯扭载荷方板结构

为对含有空域的结构进行保形设计，本例将保形域指定为一个方孔，即保形域内无材料分布。方板模型的边界条件、几何尺寸、种子点、材料属性等参数均与 2.2 节设为相同，只有保形区域变为方形孔洞，如图 17a 所示。由于孔洞内部不存在实体单元来直接计算局部应变能，故通过附加人工弱单元（AWE）来处理保形约束。通过设置合理的 AWE 形式将孔洞保形问题转化为控制其周界若干关键节点间的相对位移协调，来间接表征孔洞边界的形状变化。为对不同保形控制点下的优化结果进行分析，本例给出了两种保形方案，分别是将横向布置的两个四节点 AWE 和纵向布置的两个四节点 AWE 附加到此空域，如图 17b 和图 17c 所示。将 AWE 的弹性模量设为 100 Pa，泊松比设置为 0.3。仅考虑整体结构刚度最大化的拓扑优化设计结果如图 18 所示。与 2.2 节中实体保形域方板结构的加强筋分布形态有所不同，这是由于中心孔洞削弱了整体刚度，上端区域也需承担部分载荷，从而形成了新的传力路径。最终全局结构的应变能为 0.817 J，保形方案一和保形方案二的 AWE 应变能分别为 5.63×10^{-14} J 和 2.47×10^{-12} J。

AWE 应变能约束上限值基于无保形约束时的初始 AWE 应变能数值设定。依据文献[7]及



(a)设计模型　(b)保形方案一　(c)保形方案二

图17　设计方案

Fig.17　Design schemes

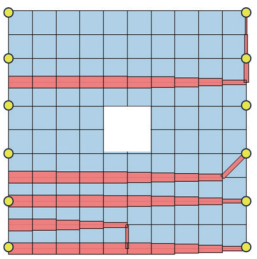
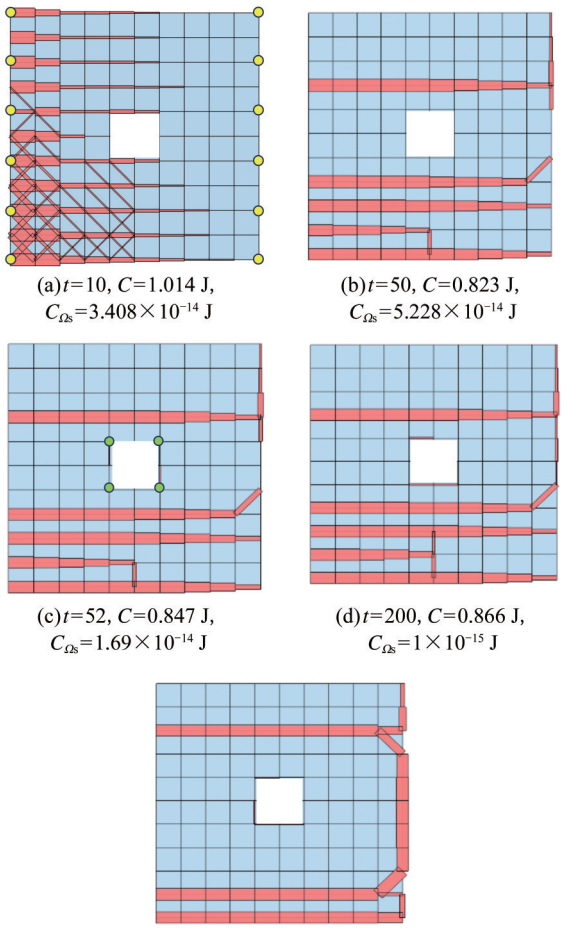


图18　孔洞方板标准拓扑优化设计结果

Fig.18　Standard topology optimization result of the perforated square plate

试算结果，将AWE应变能约束上限取为初始值的1%～20%较为合理。针对保形方案一开展分阶段优化设计，优化参数与判断条件等均与2.2节相同，AWE的保形约束上限值为1×10^{-15} J。加强筋的生长过程如图19a～图19d所示，仍表现为待主筋生长完毕后，部分筋开始从保形种子点分歧，形成局部支撑结构，最终加强筋形态如图19d所示。直接引入AWE的保形约束设计结果如图19e所示，可以看出在受到保形约束影响后，主传力路径发生了较大改变，表现为载荷较大端边界分布两条主筋，较小侧分布一条主筋，保形区周围有细小加强筋分布，也实现了保形效果。最终结构整体应变能为0.931 J，相较标准优化设计造成的刚度损失达到14%。

保形方案二的AWE约束上限值设为1.3×10^{-13} J，图20a～图20d展示了分阶段优化设计过程。与保形方案一相比，主筋分布形态相同，由于抑制的是不同保形控制点间的相对位移，故保形区周围加强筋形态存在区别。在保形方案二直接引入保形约束的优化过程中，主筋受约束影响较大，导致传力路径异常，最终未能收敛至满足保形约束的合理解。迭代步数达到上限后输出图20e所示的优化结果，全局结构和AWE的应变能分别为1.203 J和2.8×10^{-13} J。将不同保形方案下的设计结果进行对比，具体数据列于表3和表4。



(a)t=10, C=1.014 J, $C_{\Omega s}=3.408\times10^{-14}$ J　(b)t=50, C=0.823 J, $C_{\Omega s}=5.228\times10^{-14}$ J

(c)t=52, C=0.847 J, $C_{\Omega s}=1.69\times10^{-14}$ J　(d)t=200, C=0.866 J, $C_{\Omega s}=1\times10^{-15}$ J

(e)直接引入保形约束设计结果

图19　保形方案一优化设计结果

Fig.19　Optimization results of shape-preserving scheme Ⅰ

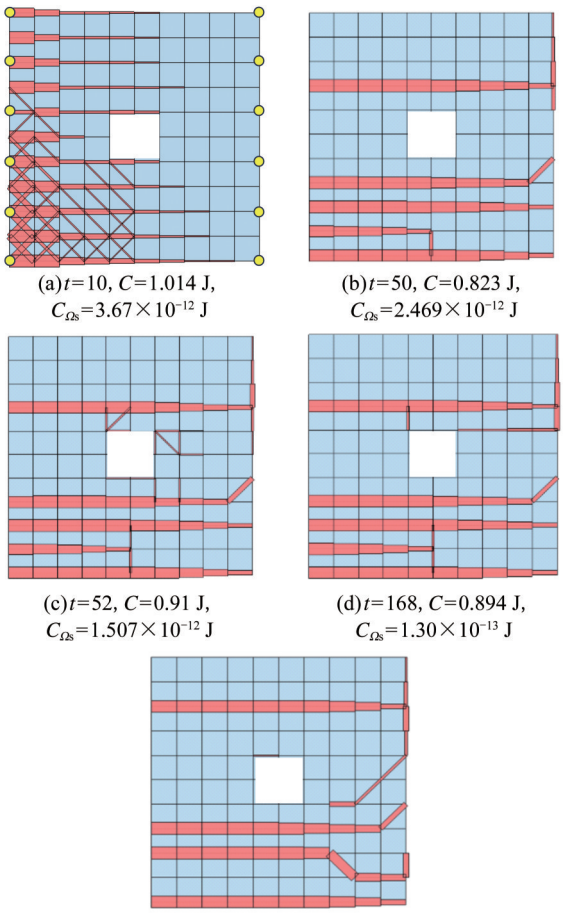
通过对结果数据进行分析，本文所提分阶段保形优化策略无论是在保形效果的实现上，还是保形造成的全局刚度损失上，结果均优于直接引入约束的方式。同时，观察上述保形优化结果的加强筋分布图可以看出，不同保形方案并未造成主筋分布产生过大差异，保形效果主要通过保形区周围辅筋的不同分布来实现。

3　结论

本文提出一种基于自适应成长法的分阶段保形优化策略，用于抑制薄壁结构局部区域的翘曲变形，实现了结构不同节点间的位移协调，得到如下结论：

1）与SIMP法相比，通过将保形约束引入自适应成长法，可以得到清晰的加强筋布局，不需要专门的后处理程序就可以得到最优设计结果，符合该类结构在实际条件下以加筋的方式提高整体和局部性能，具有实际工程意义。

2）相较于将约束直接引入自适应成长技术，新优化策略避免了因约束干扰造成主传力路径发



(e)直接引入保形约束设计结果

图 20　保形方案二优化设计结果

Fig.20　Optimization results of shape-preserving scheme Ⅱ

表 3　保形方案一不同设计方法的应变能对比

Tab.3　Comparison of strain energy under different design methods for shape-preserving scheme Ⅰ

方法	应变能/J	
	总结构	AWE1
标准优化	0.817	5.63×10^{-14}
分阶段保形优化	0.866	1.00×10^{-15}
直接引入保形约束	0.931	1.00×10^{-15}

表 4　保形方案二不同设计方法的应变能对比

Tab.4　Comparison of strain energy under different design methods for shape-preserving scheme Ⅱ

方法	应变能/J	
	总结构	AWE2
标准优化	0.817	2.47×10^{-12}
分阶段保形优化	0.894	1.30×10^{-13}
直接引入保形约束	1.203	2.80×10^{-13}

生改变而导致整体刚度牺牲过大或畸形筋板分布的情况，对该问题适用性强，也为自适应成长法在解决多约束问题上提供一种思路。

3）在数值算例中对标准刚度最大化的拓扑优化、直接引入约束的保形优化和分阶段保形优化的设计结果、变形行为和变形能数据进行了对比，发现分阶段保形优化策略可以有效获得清晰加强筋形态和达到保形目的双重设计效果，且能够以较小的总体刚度损失实现保形。进一步分析不同保形方案的优化设计结果，发现保形的实现是通过保形区周围辅筋支撑以及部分主筋的成长或退化来完成的。

参考文献：

[1] BENDSØE M P, KIKUCHI N. Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988, 71(2): 197-224.

[2] SIGMUND O. A 99 Line Topology Optimization Code Written in Matlab[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2001, 21(2): 120-127.

[3] HUANG X, ZUO Z H, XIE Y M. Evolutionary Topological Optimization of Vibrating Continuum Structures for Natural Frequencies[J]. Computers & Structures, 2010, 88(5/6): 357-364.

[4] XIA Q, SHI T L, WANG M Y. A Level Set Based Shape and Topology Optimization Method for Maximizing the Simple or Repeated First Eigenvalue of Structure Vibration [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2011, 43(4): 473-485.

[5] WANG Rixin, ZHANG Xianmin, ZHU Benliang. A Projective Transformation-based Topology Optimization Using Moving Morphable Components[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2021, 376: 113646.

[6] 张卫红，罗小桃，王振培，等. 飞机装配工装结构分析与优化技术[J]. 航空制造技术，2009，52(增刊2)：40-43.
ZHANG Weihong, LUO Xiaotao, WANG Zhenpei, et al. Structural Analysis and Optimization Technique of Aircraft Assembly Fixture [J]. Aeronautical Manufacturing Technology, 2009, 52(S2): 40-43.

[7] 朱继宏，李昱，张卫红，等. 考虑多点保形的结构拓扑优化设计方法[J]. 航空学报，2015，36(2)：518-526.
ZHU Jihong, LI Yu, ZHANG Weihong, et al. Structure Topology Optimization with Multi-point Shape-preserving Constraint [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2015, 36(2): 518-526.

[8] 朱继宏，王林，李昱，等. 基于多点自由度约束的方向性保形拓扑优化设计方法[J]. 应用数学和力学，2016，37(10)：999-1012.
ZHU Jihong, WANG Lin, LI Yu, et al. A Directional Shape-preserving Topology Optimization Method with Multi-point Constraints[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2016, 37(10): 999-1012.

[9] CHEN Fei, ZHU Jihong, DU Xinxin, et al. Shape Preserving Topology Optimization for Structural Radar Cross Section Control[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2022, 35(6): 198-210.

[10] MAUTE K, ALLEN M. Conceptual Design of Aeroelastic Structures by Topology Optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2004, 27(1): 27-42.

[11] HUANG X, XIE Y M. Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures with an Additional Displacement Constraint[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2010, 40(1): 409-416.

[12] DING X H, YAMAZAKI K. Stiffener Layout Design for Plate Structures by Growing and Branching Tree Model (Application to Vibration-proof Design)[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2004, 26(1): 99-110.

（下转第 2850 页）