



滑翔制导炮弹多阶段全弹道不确定性传播方法

赵童伸¹, 陈琦^{1*}, 宋党帅², 尹秋霖¹

(1.南京理工大学 能源与动力工程学院, 江苏 南京 210094; 2.西北工业大学 无人系统技术研究院, 陕西 西安 710072)

摘要:滑翔制导炮弹受有限的弹体空间和较小的控制舵面的影响,具有升阻比小、机动能力有限、抗干扰能力弱的特点,致使其对外部诸多复杂的不确定扰动因素较为敏感。为揭示不确定性在滑翔弹随机动力学系统中的传播机理,研究滑翔弹多阶段全弹道对各类随机不确定性因素的敏感性,建立了一种可以合理描述系统模型不确定性、初始状态不确定性、气动参数不确定性和气象不确定性的多维动力学模型,采用拉丁超立方采样策略,设计了一种基于非干涉多项式混沌展开和随机响应面法相结合的不确定性量化传播算法,并以滑翔弹全弹道不确定性量化传播问题为例进行仿真,并将仿真结果与蒙特卡洛仿真法的仿真结果进行对比分析。仿真结果表明:相较于助推火箭平均推力和大气密度参数的不确定性,滑翔弹全弹道以及落点精度对气动参数参数的不确定性更为敏感;与蒙特卡洛仿真法相比,该算法可在保证精度的同时,大幅度提高了计算效率,有效突破了高维不确定性传播分析所面临的大规模计算问题。

关键词:滑翔制导炮弹;不确定性因素;全弹道;多项式混沌展开;不确定性量化分析

中图分类号:TJ385 **文献标志码:**A **文章编号:**1004-499X(2025)02-0049-11

Uncertainty Propagation Method for Multi-stage Full Trajectory of Glide-Guided Projectiles

ZHAO Tongshen¹, CHEN Qi^{1*}, SONG Dangshuai², YIN Qiulin¹

(1.School of Energy and Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China;

2. Research Institute of Unmanned Systems Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Subject to the limitations of confined projectile spatial dimensions and diminutive control surfaces, glide-guided projectiles are characterized by diminished lift-to-drag ratios, constrained maneuverability, and compromised disturbance rejection capabilities, thereby rendering them highly susceptible to intricate external stochastic perturbations. To unravel the propagation dynamics of uncertainties within the stochastic nonlinear systems governing glide projectiles and to quantify the sensitivity of multiphase full-trajectory behaviors to heterogeneous stochastic uncertainties, this study formulates a high-fidelity multidimensional dynamical model that rigorously encapsulates uncertainties inherent to system modeling approximations, initial state variabilities, aerodynamic coefficient fluctuations, and meteorological parameter stochasticity. Employing a Latin hypercube sampling methodology, a composite uncertainty quantification and propagation framework is devised, synergizing non-intrusive spectral polynomial chaos expansion with stochastic response surface methodology. The efficacy of this framework is empirically validated through high-dimensional uncertainty propagation simulations spanning the entire projectile trajectory, with rigorous benchmarking against Monte Carlo simulation (MCS) outcomes. Numerical experiments demonstrate that the integrated trajectory exhibits markedly amplified sensitivity to aerodynamic parameter uncertainties relative to perturbations in booster propulsion mean thrust and atmospheric density profiles, with the former dominating terminal precision degradation.

Moreover, the proposed framework attains computational acceleration exceeding conventional MCS by orders of magnitude while preserving statistical fidelity, thereby circumventing the curse of dimensionality endemic to high-order uncertainty propagation analyses. These findings furnish a foundational paradigm for probabilistic trajectory optimization and resilience enhancement in next-generation precision-guided munitions.

Key words: gliding guided projectile; uncertainty factors; full trajectory; polynomial chaos expansion; quantitative analysis of uncertainty

滑翔制导炮弹作为一种精确制导武器,兼具战术导弹和普通炮弹的优点,备受国内外学者的广泛关注^[1-3]。但苛刻的身管发射环境、有限的弹体空间、较小的控制舵面以及有控弹道段的无动力飞行导致滑翔弹具有升阻比小、机动能力有限、抗干扰能力弱、对外部扰动因素较为敏感的特点。因此,滑翔制导炮弹方案弹道设计的合理性显得尤为重要^[4]。

现有对弹道规划的研究大多围绕着确定性系统^[5]和单阶段弹道^[6]展开,对实际飞行中的不确定性考虑较少,这将造成滑翔弹沿方案弹道飞行时产生较大的过程和终端偏差,影响飞行的可靠性和命中精度^[7]。为研究随机不确定性对实际飞行弹道的影响,部分学者重点聚焦不确定性量化传播技术和分析方法,为弹道规划提供了新思路和新方法^[4,7-9]。

典型的不确定性量化传播分析方法有蒙特卡罗仿真法(Monte Carlo simulation, MCS)^[10]、线性协方差分析法(linear analysis of covariance, LAC)^[4,8,11]和混沌多项式展开法(polynomial chaos expansion, PCE)^[7,9,12]等。MCS是通过通过对不确定性参数进行随机采样的方式来估算系统响应的不确定性量,该方法计算效率较低,且需要大量的样本点才能得到高精度的计算结果,通常用于检验其它方法的准确性^[13]。LAC是将非线性系统近似为线性系统,得到系统随机量的均值和协方差传播方程,是一种高效的随机系统统计特征计算方法,但该方法受限于不确定性变量的分布形式,且当原系统非线性程度比较高时,求解精度较低^[14]。PCE是基于混沌多项式理论,将原随机变量表示为多个正交多项式加权的形式,在本质上相当于构建一个代理模型,不确定性传播便在该代理模型上运行^[15]。

PCE主要分为两大类:侵入式PCE(intrusive PCE, IPCE)和非侵入式PCE(non-intrusive PCE, NIPCE)^[16]。其中,IPCE主要应用于动力学系统的不确定性传播,该方法利用Galerkin投影法将随机微分方程组转化为以PCE系数为新状态量的高维

确定性微分方程组,通过数值积分法求解得到PCE系数的变化规律,进而完成不确定性传播^[7]。该方法虽然具有较高的计算效率,但建模过程过于繁杂,导致通用性较差。与之相比,NIPCE在进行不确定性传播时,可将模型当作黑箱处理,仅需关注输入与输出之间的映射关系,构建输出响应的PCE代理模型,进而完成不确定性传播,对处理非线性系统的不确定性量化传播问题具有较好的通用性^[17-18]。

PCE以较优的近似效果和计算效率,在工程实践中得到了广泛应用。FISHER等^[19]首次采用IPCE策略将随机不确定性问题转化为高维确定性问题的,并结合配点法给出求解过程。黄悦琛^[15]和江秀强^[20]使用PCE,根据已知进入器初始状态和模型参数的不确定性,研究了火星进入问题的不确定性量化传播,求解了后续任意时刻飞行状态分布特征的初值问题。在弹道优化方面,闫循良等^[9]将NIPCE与凸优化相结合,用于解决初始状态和动力学参数不确定性的火箭基循环飞行器上升段鲁棒轨迹优化问题。WU等^[21]将稀疏网格法和NIPCE相结合,研究跨声速飞行器气动外形和马赫数的不确定性对飞行灵敏度和气动特性的影响,但对飞行器自身的不确定性考虑较少,研究对象具有局限性。杨晓骞^[22]以高超声速飞行器为研究对象,主要考虑气动参数摄动的不确定性,建立了基于广义多项式混沌方法的再入轨迹鲁棒优化策略,有效降低了优化轨迹对气动参数摄动的敏感程度,展现出较强的鲁棒稳定性。

以上弹道不确定性的研究均侧重于单阶段问题,对多阶段的、不确定性维度和模型复杂度更高的不确定性量化传播问题未深入研究。因此,本文针对滑翔制导炮弹多阶段全弹道不确定性量化传播问题展开研究。首先结合滑翔制导炮弹动力学和运动学模型,建立四阶段弹道模型。采用NIPCE和随机响应面法^[19](stochastic response surface method, SRSM)相结合的方式,设计一种多阶段全弹道不确

定性量化传播分析的求解策略,实现对高维不确定性问题的有效转化和快速求解。最终,以某型滑翔弹为例进行仿真,通过与传统 MCS 对比,验证本文所述方法的有效性和可靠性,并分析启控点的散布对气动参数不确定性的敏感性。

1 动力学基本模型

1.1 滑翔制导炮弹运动学模型

滑翔制导炮弹在空间中的运动一般看成可控制的变质量系统的运动。忽略弹体的转动惯量和地球自转,假设系统处于瞬时平衡状态,即所受到的合外力矩为零,控制系统较理想工作时,滑翔弹的动力学方程可简化为^[23]

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{F_p \cos \alpha \cos \beta - F_x - mg \sin \theta}{m} \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{F_p \sin \alpha + F_y - mg \cos \theta}{mv} \\ \frac{d\psi_v}{dt} = \frac{F_p \cos \alpha \sin \beta - F_z}{mv \cos \theta} \\ \frac{dx}{dt} = v \cos \theta \cos \psi_v \\ \frac{dy}{dt} = v \sin \theta \\ \frac{dz}{dt} = -v \cos \theta \sin \psi_v \\ \frac{dm}{dt} = -\dot{m}_c \end{cases} \quad (1)$$

式中: v 为弹体飞行速度, F_p 为火箭发动机平均推力, m 为滑翔弹的质量, g 为重力加速度, θ 为弹道倾角, ψ_v 为弹道偏角, F_x 为气动阻力, F_y 为气动升力, F_z 为气动侧向力, x 、 y 、 z 为制导炮弹在地面坐标系中的位置。 α 为平衡攻角, β 为平衡侧滑角, $\dot{m}_c$ 为炮弹单位时间内质量消耗量,其值由助推火箭性能决定^[24]。

该模型的状态向量可表示为 $\mathbf{x} = (v \ \theta \ \psi_v \ x \ y \ z)^T$,控制向量可表示为 $\mathbf{u} = (\alpha \ \beta)^T$ 。滑翔弹气动阻力、气动升力和气动侧向力的表达式为^[25]

$$\begin{cases} F_x = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_x^0 [1 + k_c (\alpha^2 + \beta^2)] \\ F_y = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_y^\alpha \alpha \\ F_z = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_z^\beta \beta \end{cases} \quad (2)$$

式中: ρ 为大气密度, S 为参考面积, k_c 为诱导系数, C_x^0 为零升阻力系数, C_y^α 为升力系数导数, C_z^β 为侧向力系数导数,其值可由风洞试验数据插值得到^[26]。

设系统模型参数向量为 $\mathbf{w} = (F_p \ \rho \ C_x^0 \ C_y^\alpha \ C_z^\beta)^T$,则方程(1)在状态空间中可表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) \quad (3)$$

式中: $\mathbf{f}_i$ 为方程(1)的右端项; $t \in [t_0, t_e]$ 为时间变量, t_0 为起始时刻, t_e 为结束时刻。

1.2 四段式弹道模型

如图1所示,滑翔制导炮弹飞行弹道可分为4个阶段,即 $n=1,2,3,4$ 分别为起飞段、助推段、爬升段和滑翔段。

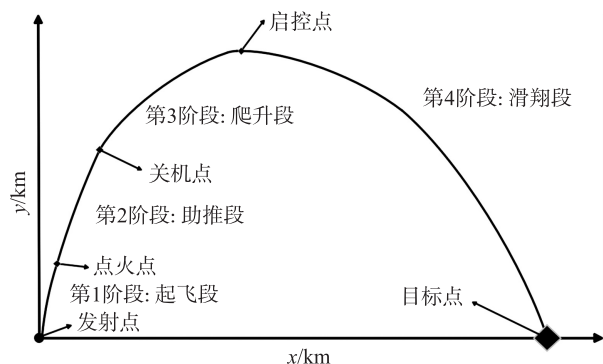


图1 滑翔弹方案弹道全弹道示意图

Fig. 1 Schematic diagram of gliding guided projectile trajectory

设各段起始时刻为 t_0^n ,各段的结束时刻为 t_e^n ,本文对弹道各阶段定义如下:

①起飞段:初始于发射位置,止于助推火箭点火位置。助推火箭需在炮弹出炮筒一段时间后点火,该段弹道时间区间为 $[t_0^1, t_e^1]$ 。

②助推段:始于助推火箭点火位置,止于关机位置。助推持续时间为定值,时间区间为 $[t_0^2, t_e^2]$ 。

③爬升段:始于助推火箭关闭位置,止于滑翔启控点。在炮弹实际飞行环境中,由于随机扰动的存在,在火箭助推后弹体需要一定的时间恢复自身平衡,爬升时间区间为 $[t_0^3, t_e^3]$ 。

④滑翔段:始于滑翔段启控点,直到落地结束,其时间区间为 $[t_0^4, t_e^4]$ 。

1.3 条件约束

1.3.1 过程约束

滑翔制导炮弹所处飞行阶段不同时,飞行特征和过程约束也不同。助推火箭只在助推段工作,在其他3个阶段均不工作,炮弹在前3阶段均无控制量。综上

所述,滑翔制导炮弹过程约束定义如下:

①起飞段和爬升段约束为 $F_p = 0, \dot{m}_c = 0, \alpha = 0, \beta = 0$ 。

②助推段约束为 $F_p = F_T, \dot{m}_c = m_p/t_w, \alpha = 0, \beta = 0$ 。其中, F_T 为火箭发动机推力均值, m_p 为装药量, t_w 为助推火箭工作时长。

③滑翔段约束为 $F_p = 0, \dot{m}_c = 0, |\alpha| \leq \alpha_{\max}, |\beta| \leq \beta_{\max}$ 。其中, $\alpha_{\max}, \beta_{\max}$ 分别为所允许的最大平衡攻角、侧滑角幅值。

1.3.2 连续约束

研究滑翔弹多阶段全弹道需要考虑它在飞行过程中状态变量和飞行时间的连续,即: $t_e^n = t_0^{n+1}, \mathbf{x}_e^n = \mathbf{x}_0^{n+1} (n=1, 2, 3)$ 。

2 不确定性建模与问题转化

滑翔弹在实际飞行过程中会受到各类随机因素的干扰,将其全部纳入考虑并不现实。因此,本文注重分析并研究以下几种具有代表性的不确定性因素:滑翔制导炮弹动力学模型不确定性、初始状态不确定性、气动参数不确定性和气象不确定性。

滑翔弹真实飞行环境中的随机干扰致使气动产生随机增量,这些随机力主要影响式(1)的前3项,进而对动力学模型产生影响。考虑到弹体的加工误差和弹道飞行环境的不同,实际飞行中的气动参数与参考值必然存在差异,但其随马赫数的变化规律是一致的。真实气象与标准气象的主要差异在于风场、气温和大气密度的偏差,其中风场对弹道计算的影响可视作未建模的随机力,因此可将其归结到系统模型不确定性;气温主要影响滑翔弹的飞行马赫数,马赫数的变化致使气动参数发生变化,因此可将气温偏差归结到气动参数的不确定性。综上所述,本文气象不确定性总结为大气密度的不确定性。

假设上述不确定性因素之间互不相关,依据4种不确定性的性质不同,可将其归为状态参数不确定性和模型参数不确定性两大类进行分析。

2.1 不确定性建模

全弹道状态参数不确定性可描述为六维初始飞行状态的不确定性,具体包括飞行速度、弹道倾角、弹道偏角、炮弹三维空间内的质心位置。模型参数的不确定性可描述为五维不确定性向量,包括助推火箭平均推力、大气密度、阻力系数、升力系数和侧向力系数。对上述不确定性进行建模,将不确定条件下的实际状态参数设为 $\tilde{\mathbf{x}}$,模型参数设为 $\tilde{\mathbf{w}}$,则有:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_0 + \Delta \mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0 + \bar{\mathbf{x}}_0 \circ \mathbf{N}_x \circ \boldsymbol{\sigma}_x \\ \tilde{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{w}} + \Delta \mathbf{w} = \bar{\mathbf{w}} + \bar{\mathbf{w}} \circ \mathbf{N}_w \circ \boldsymbol{\sigma}_w \end{cases} \quad (4)$$

式中: $\bar{\mathbf{x}}_0$ 为标称状态参数, $\bar{\mathbf{w}}$ 为模型参数标称值, $\Delta \mathbf{x}_0$ 和 $\Delta \mathbf{w}$ 相应的不确定性向量,算子“ $\circ$ ”为 Hadamard 积, $\boldsymbol{\sigma}_x$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_w$ 分别为状态参数和模型参数相对标称值的偏离程度, $\mathbf{N}_x$ 和 $\mathbf{N}_w$ 为服从一定分布类型的随机数。

实际状态参数 $\tilde{\mathbf{x}}$ 和模型参数 $\tilde{\mathbf{w}}$ 可表示为

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{v} \quad \tilde{\theta} \quad \tilde{\psi}_v \quad \tilde{x} \quad \tilde{y} \quad \tilde{z})^T \\ \tilde{\mathbf{w}} = (\tilde{F}_p \quad \tilde{\rho} \quad \tilde{C}_x^0 \quad \tilde{C}_y^\alpha \quad \tilde{C}_z^\beta)^T \end{cases} \quad (5)$$

$\bar{\mathbf{x}}_0, \bar{\mathbf{w}}$ 和 $\Delta \mathbf{x}_0, \Delta \mathbf{w}$ 可表示为

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}_0 = (v_0 \quad \theta_0 \quad \psi_{v0} \quad x_0 \quad y_0 \quad z_0)^T \\ \bar{\mathbf{w}} = (F_p \quad \rho \quad C_x^0 \quad C_y^\alpha \quad C_z^\beta)^T \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x}_0 = (\Delta v_0 \quad \Delta \theta_0 \quad \Delta \psi_{v0} \quad \Delta x_0 \quad \Delta y_0 \quad \Delta z_0)^T \\ \Delta \mathbf{w} = (\Delta F_p \quad \Delta \rho \quad \Delta C_x^0 \quad \Delta C_y^\alpha \quad \Delta C_z^\beta)^T \end{cases} \quad (7)$$

本文以状态参数和模型参数的 3σ 与相对应参数标称值的比值定义各参数相对标称值的偏离程度, $\boldsymbol{\sigma}$ 为各参数对应的标准差,则 $\boldsymbol{\sigma}_x$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_w$ 可表示为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_x = (\sigma_v \quad \sigma_\theta \quad \sigma_\psi \quad \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z)^T \\ \boldsymbol{\sigma}_w = (\sigma_{F_p} \quad \sigma_\rho \quad \sigma_{C_x} \quad \sigma_{C_y} \quad \sigma_{C_z})^T \end{cases} \quad (8)$$

由文献[27]可知,真实大气密度偏离标称值的统计特征与海拔高度 y 有关,其标准差在不同海拔高度下与标准大气密度的关系可近似为

$$\sigma_\rho = 0.003 \, 517 \exp\left(\frac{y}{26 \, 629.77}\right) \quad (9)$$

则参数偏离标称值的 3σ 置信区间如下文表4所示。假设 $\mathbf{N}_x$ 和 $\mathbf{N}_w$ 中的每一个元素均为均值为0,方差为1的随机数,其值可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{N}_x = (N_v \quad N_\theta \quad N_\psi \quad N_x \quad N_y \quad N_z)^T \\ \mathbf{N}_w = (N_{F_p} \quad N_\rho \quad N_{C_x} \quad N_{C_y} \quad N_{C_z})^T \end{cases} \quad (10)$$

令 $\mathbf{N} = (\mathbf{N}_x^T \quad \mathbf{N}_w^T)^T$ 表示方程(3)状态参数和模型参数的随机不确定性变量,则方程(3)可表示为一组随机常微分方程组:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}_i(t, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{u}, \mathbf{N}) \quad (11)$$

2.2 问题转化与系数求解

问题转化的核心在于滑翔弹不确定性动力学模型的转化和样本点的选取。本文构建了 NIPCE-SRSM 模型不确定性量化传播模型,将式(11)转化为以 PCE 系数为状态的高维确定性系统,采用拉丁超立方抽样(Latin hypercube sampling, LHS)策略选取样本点^[28],使用最小二乘法估算 PCE 系数。

根据广义多项式混沌展开理论,方程(11)的解 $\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{N})$ 可近似为多项式形式:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{N}) \approx \hat{\mathbf{x}}(t, \mathbf{N}) = \sum_{i=0}^M \tilde{\mathbf{x}}_i(t) \Phi_i(\mathbf{N}) \quad (12)$$

式中: $\Phi_i(\mathbf{N})$ 为多维随机变量构成的多项式基, $\tilde{\mathbf{x}}_i(t)$ 是 $\Phi_i(\mathbf{N})$ 的系数向量, i 是 $\Phi_i(\mathbf{N})$ 的阶数, $\mathbf{N}$ 是 d 维的标准随机变量, M 为混沌多项式最大展开阶数。

PCE 系数 $Q=M+1$,它随着 PCE 模型的阶数 i 和随机变量 $\mathbf{N}$ 的维数 d 的增长而增加,具体函数关系为

$$Q=M+1=\frac{(d+M)!}{d! M!} \quad (13)$$

根据 Askey 法则,不同分布类型的随机变量对应着不同的多项式基^[29],具体对应形式如表 1 所示。

设样本点选取个数为 H ,在标准随机空间中选取两倍未知混沌多项式系数个数的样本(即 $H=2Q$)可以保证求解精度^[16]。将选取的 H 个样本点从标准随机 $\mathbf{N}$ 空间变换到原随机 $\mathbf{x}$ 空间:

$$\mathbf{x}_{jh}^S = T_h(\mathbf{N}_{jh}^S) \quad (14)$$

式中:上标“S”表示所标示的量为样本点,下标 j, h 表示第 j 个样本点中的第 h 维样本点, T_h 为转换过程,对于正态分布类型的随机数,变换过程为

$$T_h(\mathbf{N}_{jh}^S) = \mu_{x_h} + \sigma_{x_h} \mathbf{N}_{jh}^S \quad (15)$$

式中: μ_{x_h} 和 σ_{x_h} 分别为第 h 维随机输入变量 x_h 的均值和方差。在样本点 $\mathbf{x}^S$ 上调用真实响应模型,可得各样本点处真实响应值。

综合考虑计算效率和精度、问题的强非线性,本文设置 PCE 阶数 $i=2$ 。由上文可知,不确定性维度

$d=11$,则系统每个状态量的 PCE 系数个数为 $Q=91$,总个数为 $Q_x=6Q=546$;模型参数的 PCE 系数个数为 $Q_w=5Q=455$ 。则用于回归的抽样点个数为 $H=2Q=182$ 。

综上,式(15)在随机系统中可转化为确定性动力学系统:

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{PCE}} = \mathbf{F}(t, \tilde{\mathbf{x}}_{\text{PCE}}, \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{w}}_{\text{PCE}}) \quad (16)$$

式中: $\tilde{\mathbf{x}}_{\text{PCE}} \in \mathbf{R}^{546 \times 1}$ 为状态变量的 PCE 系数, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^{2 \times 1}$ 为控制量, $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{PCE}} \in \mathbf{R}^{455 \times 1}$ 为模型参数的 PCE 系数。 $\mathbf{F} \in \mathbf{R}^{1092 \times 1}$ 为 H 个样本点代入原六维系统中的真实响应值。 $\Psi_x \in \mathbf{R}^{1092 \times 546}$ 为转化后确定性动力学系统的传递矩阵。

设 $\Omega(\mathbf{N}_j) = (\Phi_0(\mathbf{N}_j) \quad \Phi_1(\mathbf{N}_j) \quad \cdots \quad \Phi_M(\mathbf{N}_j))$, ($j=1, 2, \cdots, H$), 定义

$$\Theta(\mathbf{N}_j) = \mathbf{I}_6 \otimes \Omega(\mathbf{N}_j) \quad (17)$$

式中: $\Theta(\mathbf{N}_j) \in \mathbf{R}^{6 \times 546}$, $\otimes$ 符号表示克罗内克乘积,则 $\Psi_x = (\Theta(\mathbf{N}_1)^T \quad \Theta(\mathbf{N}_2)^T \quad \cdots \quad \Theta(\mathbf{N}_H)^T)^T$ 。

对于(17)所示的超定方程组,可通过线性最小二次回归进行求解,即:

$$\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{x}}_{\text{PCE}}) = \sum_{j=1}^H \varepsilon_j^2 = \sum_{j=1}^H [\mathbf{F} - \sum_{i=0}^M \tilde{\mathbf{x}}_{\text{PCE}} \Phi_i(\mathbf{N}_j^S)]^2 \quad (18)$$

式中: ε_j 为第 j 个样本点的残差。根据残差平方和最小原则,可得:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_{\text{PCE}} = \mathbf{L}\mathbf{F}(t, \tilde{\mathbf{x}}_{\text{PCE}}, \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{w}}_{\text{PCE}}) \\ \mathbf{L} = (\Psi_x^T \Psi_x)^{-1} \Psi_x^T \end{cases} \quad (19)$$

式中: $\mathbf{L} \in \mathbf{R}^{546 \times 1092}$ 为系数回归矩阵,采用四阶龙格库塔法对上式进行求解,即可获得全部 PCE 系数随时间 t 的变化规律。

表 1 不同分布类型和正交多项式之间的对应关系

Table 1 Correspondence between different distribution types and orthogonal polynomials

分布类型	概率密度函数	正交多项式	权函数	变量范围
正态	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	Hermite $H_n(x)$	$e^{-\frac{x^2}{2}}$	$[-\infty, +\infty]$
指数	e^{-x}	Laguerre $L_n(x)$	e^{-x}	$[0, +\infty]$
均匀	$\frac{1}{2}$	Laguerre $P_n(x)$	1	$[-1, 1]$
Beta	$\frac{e^{-x}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}{2^{\alpha+\beta+1}B(\alpha+1, \beta+1)}$	Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$[-1, 1]$

2.3 计算统计矩

PCE 系数求出后,可直接在 PCE 代理模型上运行 MCS,得到输出响应的概率特征,如期望、方差

等,进而可以得到原动力学系统中各状态量的统计规律。期望和方差的解析式为

$$\mu_{\tilde{\mathbf{x}}} = E(\hat{\mathbf{x}}) = b_0 \quad (20)$$

$$\sigma_x^2 = E(\hat{x}^2) - E(\hat{x})^2 = E\left[\left(\sum_{i=0}^M \tilde{x}_{PCE} \Phi_i(N_j)\right)^2\right] - b_0^2 =$$
$$\sum_{i=1}^M \tilde{x}_{PCE}^2 E[\Phi_i^2(N_j)] \tag{21}$$

式中： E 为求解期望的运算符。

3 仿真与分析

3.1 仿真参数设置

本文以某型滑翔制导炮弹为例进行仿真分析, 仿真工况为攻角 $\alpha=5^\circ$, 侧滑角 $\beta=-0.2^\circ$, 助推火箭装药量为 7.23 kg。初始状态均值和模型参数如表 2 和表 3 所示, 各阶段持续时长的上下界表 4 所示, 初始状态参数偏离标称值的 3σ 置信区间, $\sigma_x = (0.022\ 5\ 0.067\ 0.06\ 0.05\ 0.05\ 0.05)^T$, 模型参数偏离标称值的 3σ 置信区间 $\sigma_p = (0.026\ \sigma_p\ 0.05\ 0.05\ 0.05)^T$ 。此外, 本文所有仿真过程均在搭载了 AMD Ryzen 5 4600U 2.1 GHz 处理器的个人电脑上完成, 所使用的仿真环境为 Window 10 系统下的数学处理工具。

表 2 初始状态基本参数

Table 2 Basic parameters of initial state

$v_0/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$\theta_0/(^{\circ})$	$\psi_0/(^{\circ})$	x_0/m	y_0/m	z_0/m	m_0/kg
800	45	0.5	0	0	0	51.73

表 3 弹体模型参数

Table 3 Parameters of projectile model

F_p/N	S/m^2	k_c	$\dot{m}_c/(\text{kg}\cdot\text{s}^{-1})$
1 219.20	0.013 3	35	0.513 9

表 4 各阶段持续时长的上下界

Table 4 Upper and lower bounds on the durations of each stage

边界	t_0^n/s	t_e^n/s
$n=1$	0	5
$n=2$	5	19.068
$n=3$	19.068	49.068
$n=4$	49.068	173

3.2 仿真结果分析

为验证 PCE-SRSM 算法的有效性, 本文对正态分布类型的随机不确定性进行量化分析。以考虑不确定性的 10 000 次 MCS 仿真结果为基准, 验证 PCE-SRSM 仿真结果, 如图 2 和图 3 所示。由图可知, 基于 PCE-SRSM 所得不确定性量化传播结果与 MCS 所得结果具有很好的吻合度, 证明了 PCE-SRSM 的有效性。

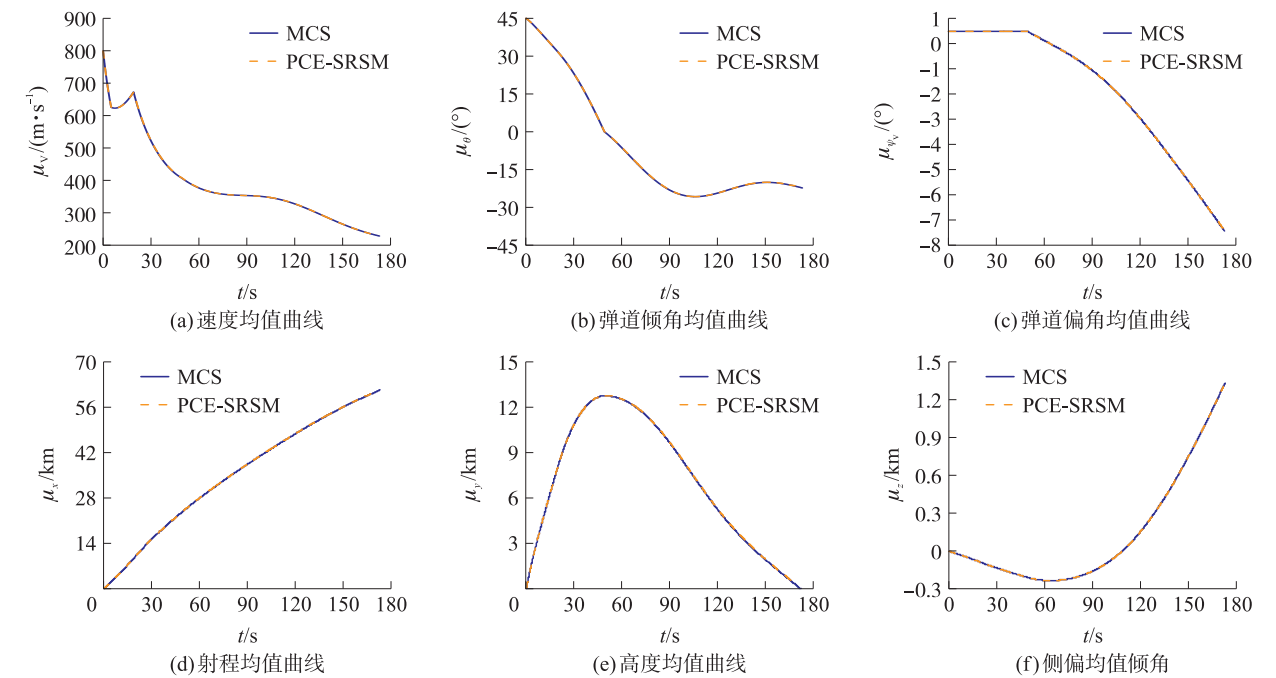


图 2 正态分布类型状态均值

Fig. 2 Mean of normally distributed type states

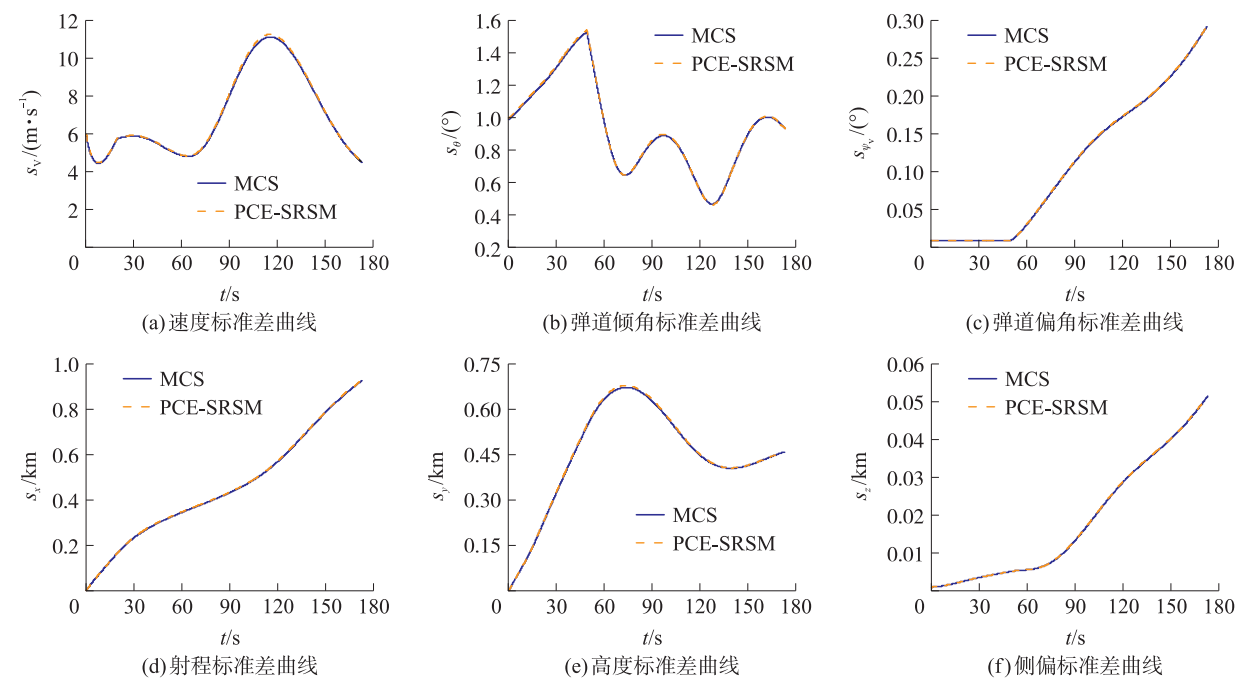


图3 正态分布类型状态标准差

Fig. 3 Normal distribution type state standard deviation

表5给出了两种仿真方法的时间计算成本,通过对比可以发现,PCE-SRSM 的仿真时间仅为 MCS 仿真时间的 3.48%,克服了 MCS 收敛慢的问题,具有更高的计算效率。

表5 仿真时间成本对比

Table 5 Cost of simulation at different time durations

仿真方法	仿真时间/s
MCS	4 513.668
PCE-SRSM	157.096

图4和图5展示了PCE-SRSM与MCS在滑翔弹射程、侧偏上均值及标准差的相对偏差。图6和图7则给出了相对误差的百分比。通过分析可知,与MCS相比,PCE-SRSM的射程均值相对偏差在12 m以内,相对误差不超过0.06%;侧偏均值相对偏差在2 m以内,侧偏在-7.8 m到8.5 m范围内时,相对误差在10.5%到56%之间,其他侧偏范围内的相对误差小于10.5%;标准差相对偏差均在可接受范围内。

由此可见,PCE-SRSM在进行滑翔弹不确定性量化传播时,即使使用较少样本,仍能达到与MCS相当的计算精度,体现了PCE-SRSM在处理高维不确定性系统时的准确性和可靠性,表现出比MCS更显著的优势。综上所述,本文算法可替代MCS进行滑翔制导炮弹全弹道不确定性量化传播,具有较好

的应用价值。

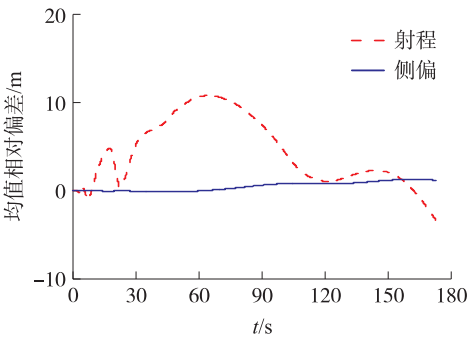


图4 PCE-SRSM与MCS均值相对偏差

Fig. 4 Relative deviation of the mean of PCE-SRSM with MCS

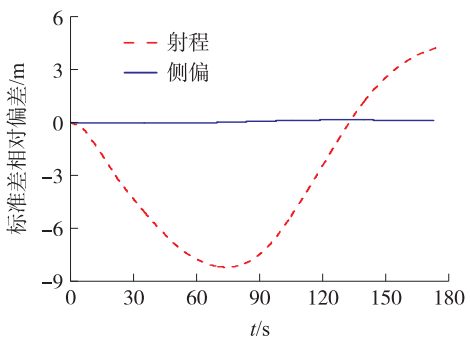


图5 PCE-SRSM与MCS标准差相对偏差

Fig. 5 Standard deviation relative deviation of PCE-SRSM with MCS

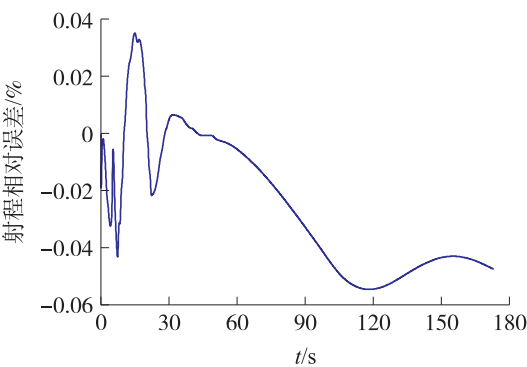


图 6 PCE-SRSM 与 MCS 射程相对误差
Fig. 6 Range relative error of PCE-SRSM with MCS

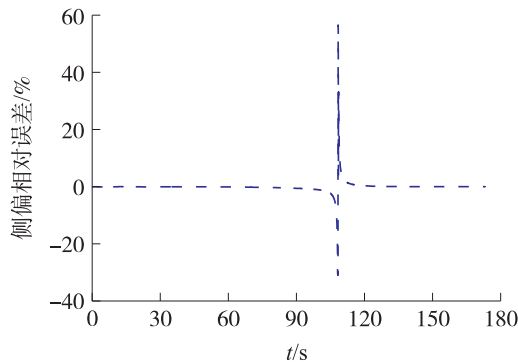


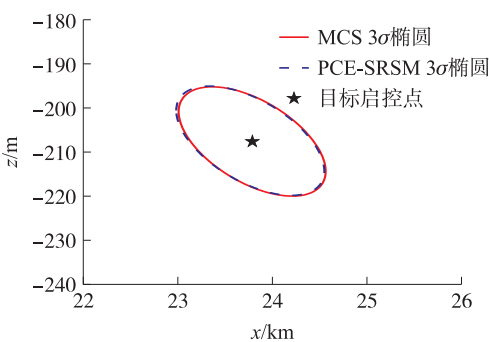
图 7 PCE-SRSM 与 MCS 侧偏相对误差
Fig. 7 Relative error of side deviation of PCE-SRSM with MCS

3.3 不确定性传播分析

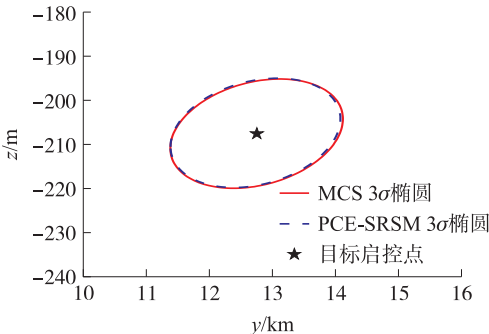
滑翔制导炮弹启控点的正确选择对滑翔段的精确制导具有重要意义,而探究不确定性对启控点散布的影响有助于启控点的正确选择。

本节根据 PCE-SRSM 和 MCS 得到的高度与侧偏的均值和协方差信息、射程与侧偏的均值和协方差信息,构建 3σ 概率椭圆来描述启控点位置的不确定性,结果如图 8 所示。通过对比目标启控点与理论 3σ 椭圆曲线可以发现,两种方法的 3σ 椭圆曲线符合较好,进一步验证了 PCE-SRSM 的准确性,同时也说明了本文所考虑不确定性的合理性。

为探究不确定性对启控点散布的影响,以 PCE-SRSM 的启控点 3σ 椭圆为基准(工况 1),改变模型参数不确定性的正态分布范围,其中,工况 2 为改变推力、密度参数不确定性的分布范围,工况 3 为改变气动力参数不确定性的分布范围,基本参数如表 6 所示。两种方法的启控点 3σ 椭圆如图 9 和图 10 所示。



(a) 射程与侧偏 3σ 椭圆



(b) 高度与侧偏 3σ 椭圆

图 8 PCE-SRSM 与 MCS 启控点位置 3σ 椭圆
Fig. 8 Start point 3σ ellipse of PCE-SRSM and MCS

表 6 不同工况下的仿真参数

Table 6 Simulation parameters under different operating conditions

方法及分布	PCE-SRSM	
	推力、密度参数	气动力参数
工况 1	(0,1)	(0,1)
工况 2	(0,3)	(0,1)
工况 3	(0,1)	(0,3)

由图 9 可知,当改变助推火箭平均推力、密度参数不确定性的正态分布范围后,工况 2 的射程与侧偏 3σ 椭圆以及高度与侧偏 3σ 椭圆与工况 1 相比并不重合,且分布范围变大。这表明与工况 1 相比,工况 2 下的各启控点与目标启控点的误差增大。由图 10 显示,当改变气动力参数不确定性的正态分布范围后,工况 3 下各启控点与目标启控点的误差增大,并且其 3σ 椭圆分布范围大于工况 2。由此可知,在相同条件下,推力、密度参数的不确定性对启控点散布的影响较气动力参数的不确定性弱,即在一定条件下,启控点散布的不确定性对气动力参数更为敏感。

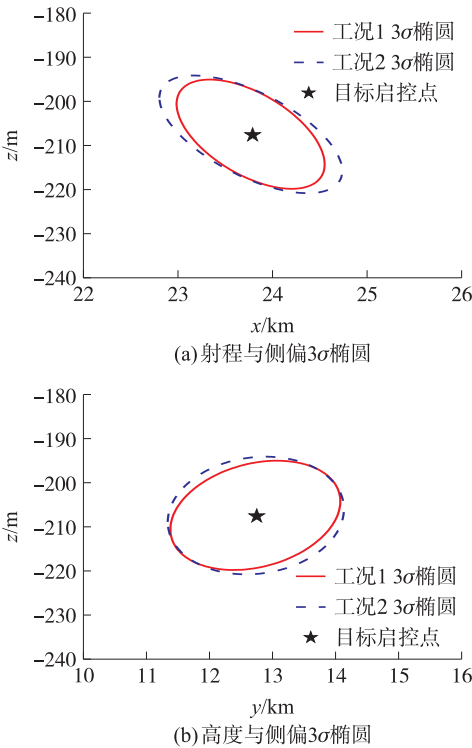


图 9 工况 1 与工况 2 启控点位置 3σ 椭圆对比
Fig. 9 Comparison of the position of the starting point 3σ ellipse between case 1 and case 2

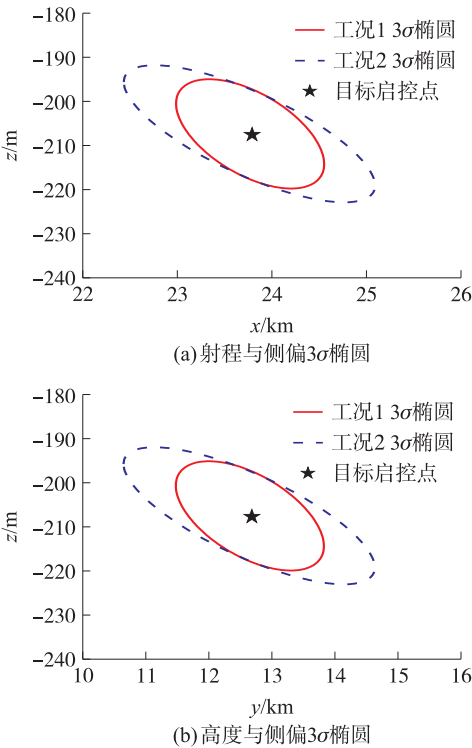


图 10 工况 1 与工况 3 启控点位置 3σ 椭圆对比
Fig. 10 Comparison of the position of the starting point 3σ ellipse between case 1 and case 3

为探讨模型参数的不确定性对落点精度的影响,分别对表格 7 中 3 种工况下的落点精度进行分析。以标称弹道的射程和侧偏为基准,分析在改变模型参数分布范围后的 3 种工况下终点位置 3σ 误差椭圆对比曲线,结果如图 11 和图 12 所示。

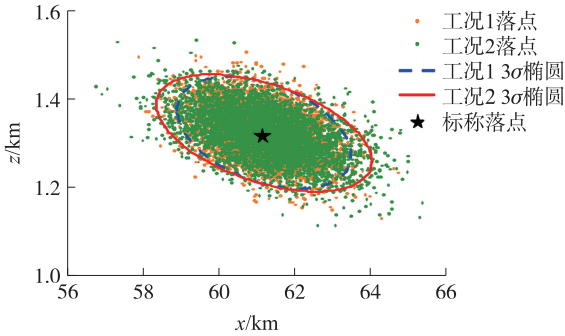


图 11 工况 1 与工况 2 落点位置 3σ 椭圆对比
Fig. 11 Comparison of the position of the landing points 3σ ellipse between case 1 and case 2

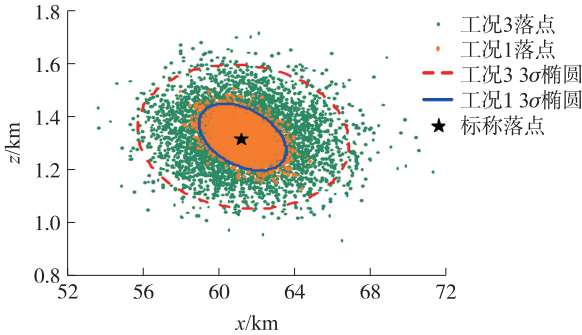


图 12 工况 1 与工况 3 落点位置 3σ 椭圆对比
Fig. 10 Comparison of the position of the landing points 3σ ellipse between case 1 and case 3

通过对比可以发现,当改变推力、密度的不确定性分布范围后,落点分别范围随之发生变化,工况 1 与工况 2 的落点 3σ 误差椭圆存在一定偏差。这是因为大气密度分布范围的变化影响着全阶段弹道的运动状态,助推火箭平均推力的分布范围影响着滑翔弹第二阶段的运动状态,进而对落点精度产生一定的影响。由此可以看出,与单阶段弹道不确定性传播相比,多阶段的不确定性传播不仅需要考虑各阶段特有变量的不确定性,还需要考虑对全阶段弹道均有影响的不确定性量。在滑翔弹单阶段弹道不确定性传播规律的研究中,在一定程度上忽略了滑翔弹各阶段之间的关联性,不利于全弹道的规划和对落点精度的研究。

由图 12 可知,气动力参数的不确定性分布范围发生变化后,工况 1 与工况 3 的落点位置 3σ 椭圆差

异较大。对比图 11 和图 12 可知,在一定条件下,气动力参数的不确定性对落点精度的影响更大。对比图 12 与图 10(a), 3σ 椭圆变化趋势并不相同,这是因为从启控点位置进入滑翔段后引入了控制量,这对滑翔段气动阻力、气动升力和气动侧向力具有一定的影响,进而影响落点精度。因此,在多阶段过程中,不确定性不仅在每个阶段内传播,还在阶段间传递。每个阶段可能有不同的动力学特性,不确定性传播规律在阶段转换时会发生变化。

4 结论

本文针对滑翔制导炮弹的全弹道不确定性量化传播问题,建立了考虑状态参数不确定性和模型参数不确定性的数学模型,对滑翔弹全弹道的不确定性传播过程进行量化并分析,得到如下结论:

①PCE-SRSM 具有较好的强非线性近似能力,可达到与 MCS 相当的计算精度且更具较高的计算效率,验证了 PCE-SRSM 的有效性和优越性。

②在一定条件下,启控点散布的不确定性对气动参数的不确定性更为敏感,即气动参数的不确定性对落点精度的影响更大。

③通过分析可知,多阶段不确定性传播中的不确定性具有累积性,每个阶段的不确定性传播都可能影响下一个阶段的初始条件,不确定性传播规律在阶段转换时会发生变化,该项研究工作为后续弹道优化的研究提供了理论基础。

参考文献

- [1] 李翔,李法忠. 国外舰炮制导弹药的发展现状及特点分析[J]. 舰船科学技术,2020,42(3):176-179.
LI Xiang, LI Fazhong. Analysis of the current situation and characteristics of development of guided ammunition for foreign ship guns[J]. Ship Science and Technology, 2020, 42(3): 176-179. (in Chinese)
- [2] 岳松堂. 国外陆军精确制导弹药发展分析[J]. 现代军事, 2015(11):56-62.
YUE Songtang. Analysis of the development of precision guided ammunition for foreign armies[J]. Modern Military, 2015(11): 56-62. (in Chinese)
- [3] 谢蕃葳,王旭刚. 基于改进 DQN 方法的滑翔制导炮弹弹道规划[J]. 弹道学报,2023,35(4):53-60.
XIE Fanwei, WANG Xugang. Trajectory planning for glide-guided projectiles based on an improved DQN method[J]. Journal of Ballistics, 2023, 35(4): 53-60. (in Chinese)
- [4] 陈琦,王中原,常思江,等. 不确定飞行环境下的滑翔制导炮弹

方案弹道优化[J]. 航空学报,2014,35(9):2593-2604.

- CHEN Qi, WANG Zhongyuan, CHANG Sijiang, et al. Optimal trajectory design under uncertainty for a gliding guided projectile [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2014, 35(9): 2593-2604. (in Chinese)
- [5] RAO H, ZHONG R, LI P. Fuel-optimal deorbit scheme of space debris using tethered space-tug based on pseudospectral method [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2021, 34(9): 210-223.
- [6] CHAI R, TSOUDOS A, SAVVARIS A, Chai S, Xia Y. High-fidelity trajectory optimization for aeroassisted vehicles using variable order pseudospectral method [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2021, 34(1): 237-251.
- [7] 王培臣,闫循良,王宽,等. 基于随机响应面与混沌多项式的鲁棒轨迹优化[J]. 系统工程与电子技术, 2023, 45(10): 3226-3239.
WANG Peichen, YAN Xunliang, WANG Kuan, et al. Robust trajectory optimization based on stochastic response surface and chaos polynomials [J]. Systems Engineering and Electronics, 2023, 45(10): 3226-3239. (in Chinese)
- [8] 刘旭,李响,张后军,等. 不确定条件下采用协方差描述函数法的再入轨迹鲁棒优化[J]. 宇航学报, 2021, 42(11): 1404-1415.
LIU Xu, LI Xiang, ZHANG Houjun, et al. Robust reentry trajectory optimization under uncertainties using covariance analysis describing function technique [J]. Journal of Astronautics, 2021, 42(11): 1404-1415. (in Chinese)
- [9] 闫循良,王培臣,王舒眉,等. 基于混沌多项式的 RBCC 飞行器上升段鲁棒轨迹快速优化[J]. 航空学报, 2023, 45(10): 3226-3239.
YAN Xunliang, WANG Peichen, WANG Shumei, et al. Rapid optimization of robust trajectory in ascent phase of RBCC aircraft based on chaos polynomials [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2023, 45(10): 3226-3239. (in Chinese)
- [10] CHAO Y, KUMAR M. An adaptive Monte Carlo method for uncertainty forecasting in perturbed two-body dynamics [J]. Acta Astronautica, 2018, 155: 369-378.
- [11] 马慧东. 航天器轨道的不确定性传播与机动优化[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2020.
MA Huidong. Uncertainty propagation and maneuver optimization of spacecraft orbits [D]. Harbin: Harbin University of Technology, 2020. (in Chinese)
- [12] JIANG X, LI S. Uncertainty quantification for Mars atmospheric entry using polynomial chaos and spectral decomposition [C]// Proc. of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. Reston: AIAA, 2018.
- [13] ALHASSAN E, ROCHMAN D, SJOSTRAND H, et al. Bayesian updating for data adjustments and multi-level uncertainty propagation within total Monte Carlo [J]. Annals of Nuclear Energy, 2020, 139: 107239.
- [14] 朱大林,唐胜景,郭杰,等. 稳健优化在导弹启控点选择中的应用[J]. 弹道学报, 2013, 25(1): 22-26.

- ZHU Dalin, TANG Shengjing, GUO Jie, et al. Application of robust optimization to selection of missile initial control points[J]. Journal of Ballistics, 2013, 25(1): 22–26. (in Chinese)
- [15] 黄悦琛. 火星进入不确定性最优轨迹规划与制导方法研究[D]. 长沙:国防科技大学, 2018.
- HUANG Yuechen. Research on optimal trajectory planning and guidance method for Mars entry uncertainty [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2018. (in Chinese)
- [16] 熊芬芬, 陈江涛, 任成坤, 等. 不确定性传播的混沌多项式方法研究进展[J]. 中国舰船研究, 2021, 16(4): 19–36.
- XIONG Fenfen, CHEN Jiangtao, REN Chengkun, et al. Recent advances in polynomial chaos method for uncertainty propagation [J]. Chinese Journal of Ship Research, 2021, 16(4): 19–36. (in Chinese)
- [17] 余慧杰, 朱悦晨, 王海华, 等. 基于多项式混沌展开的非线性系统试验不确定度评定方法[J]. 机械强度, 2022, 44(4): 772–780.
- YU Huijie, ZHU Yuechen, WANG Haihua, et al. A test uncertainty evaluation method for nonlinear systems based on polynomial chaotic expansion[J]. Mechanical Strength, 2022, 44(4): 772–780. (in Chinese)
- [18] 岳鑫鑫. 基于稀疏多项式混沌展开的高维代理模型及结构不确定性研究[D]. 镇江:江苏大学, 2021年.
- YUE Xinxin. Research on high-dimensional surrogate model and structural uncertainty based on sparse polynomial chaos [D]. Zhenjiang: Jiangsu University, 2021. (in Chinese)
- [19] FISHER J, BHATTACHARYA R. Optimal trajectory generation with probabilistic system uncertainty using polynomial chaos[J]. Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, 2011, 133(1): 014501.
- [20] 江秀强. 火星进入不确定性量化与鲁棒最优制导方法研究[D]. 南京:南京航空航天大学, 2018.
- JIANG Xiuqiang. Research on Mars entry uncertainty quantification and robust optimal guidance method [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2018. (in Chinese)
- [21] WU X, ZHANG W, SONG S, et al. Sparse grid-based polynomial chaos expansion for aerodynamics of an airfoil with uncertainty[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2018, 31(5): 997–1011.
- [22] 杨晓骞. 不确定条件下高超声速飞行器轨迹优化控制方法研究[D]. 长沙:国防科技大学, 2016.
- YANG Xiaolian. Research on trajectory optimization control method for hypersonic vehicle under uncertain conditions [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2016. (in Chinese)
- [23] 韩子鹏. 弹箭外弹道学[M]. 北京:北京理工大学出版社, 2008.
- HAN Zipeng. External ballistics of projectiles [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2008. (in Chinese)
- [24] 钱杏芳, 林瑞雄, 赵亚男. 导弹飞行力学[M]. 北京:北京理工大学出版社, 2006.
- QIAN Xingfang, LIN Ruixiong, ZHAO Yanan. Missile flight mechanics [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2006. (in Chinese)
- [25] 尹秋霖, 陈琦, 王中原, 等. 一种基于轨迹预测的滑翔制导炮弹时间约束末制导律扩展方法[J]. 弹道学报, 2024, 36(2): 21–28.
- YIN Qiulin, CHEN Qi, WANG Zhongyuan, et al. An extended time-constrained terminal guidance law for glide-guided projectiles based on trajectory prediction [J]. Journal of Ballistics 2024, 36(2): 21–28. (in Chinese)
- [26] 陈琦. 滑翔增程制导炮弹弹道优化及制导控制方法研究[D]. 南京:南京理工大学, 2017.
- CHEN Qi. Investigation on trajectory optimization and guidance&control scheme for a type of gliding guided projectiles [D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2017. (in Chinese)
- [27] JUSTUS C G, LESLIE F W. The NASA Marshall space flight center earth global reference atmospheric model 2010 version[R]. NASA/TM 2011216467. Washington: NASA, 2011.
- [28] XIONG Fenfen, CHEN Shishi, XIONG Ying. Dynamic system uncertainty propagation using polynomial chaos [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2014, 27(5): 1157–1170.
- [29] SCHOUTENS W. Stochastic process and orthogonal polynomials [M]. Berlin: Springer, 2012.