doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023433

临界点理论在分数阶微分方程边值问题中的应用

秦锐珍，周文学，曹美丽
（兰州交通大学 数理学院，兰州 730070）

摘要： 用临界点理论和变分法研究 Banach 空间中带 Sturm-Liouville 边值条件的 Caputo 型分数阶微分方程解的存在性. 通过定义适当的分数阶导数空间，将分数阶微分方程边值问题解的存在性转化为寻找定义在某个空间上对应泛函的临界点，得到了该边值问题存在一系列无界的广义解.

关键词： Sturm-Liouville 边值条件；临界点理论；变分法；不连续分数阶导数
中图分类号： O175.8 **文献标志码：** A **文章编号：** 1671-5489(2024)04-0831-11

Applications of Critical Point Theory to Boundary Value Problems of Fractional Differential Equations

QIN Ruizhen, ZHOU Wenxue, CAO Meili
(*School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: The critical point theory and the variational method were used to study the existence of the solution for the Caputo type fractional differential equation with the Sturm-Liouville boundary condition in Banach space. By defining the appropriate fractional derivative space, the existence of the solution to the boundary value problem of fractional differential equation was transformed into finding the critical point defined as the corresponding functional in a certain space, and a series of unbounded generalized solutions to the boundary value problem were obtained.

Keywords: Sturm-Liouville boundary condition; critical point theory; variational method; discontinuous fractional derivative

0 引 言

分数阶微分方程相比于整数阶微分方程，能更准确地描述并分析一些复杂的系统和现象. 因此，分数阶微分方程在物理、电化学、黏弹性、控制、多孔介质和电磁学等领域应用广泛[1-4]. 人们已利用一些经典的工具得到了许多关于分数阶微分方程解的存在性结果，如不动点理论、拓扑度理论和比较方法[5-8]等. 而临界点理论是处理分数阶微分方程边值问题的有效工具[9-14]，但利用临界点理论研究分数阶边值问题解的存在性文献报道相对较少. 文献[15]研究了如下分数阶微分方程边值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}\,{}_0D_t^{-\beta}(u'(t))+\dfrac{1}{2}\,{}_tD_T^{-\beta}(u'(t))\right)+\nabla F(t,u(t))=0, \quad t\in[0,T], \\ u(0)=u(T)=0, \end{cases}$$

收稿日期： 2023-10-13. **网络首发日期：** 2024-06-21.

第一作者简介： 秦锐珍(2000—)，女，汉族，硕士研究生，从事分数阶微分方程的研究，E-mail：qinrz427@163.com. **通信作者简介：** 周文学(1976—)，男，汉族，博士，教授，从事非线性分析问题的研究，E-mail：wxzhou2006@126.com.

基金项目： 国家自然科学基金(批准号：11961039).
网络首发地址： https://link.cnki.net/urlid/22.1340.o.20240620.1442.002.

通过变分方法，建立了关于其解的存在性等准则. 文献[16]研究了如下分数阶边值问题：

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}\,{}_0D_t^{-\beta}(u'(t))+\dfrac{1}{2}\,{}_tD_T^{-\beta}(u'(t))\right)\in\partial F(t,u(t)), \quad t\in[0,T], \\ u(0)=u(T)=0, \end{cases}$$

利用非光滑临界点理论的变分方法，证明了其解的存在性和多重性.

受上述研究结果的启发，本文研究带 Sturm-Liouville 边值条件的不连续分数阶边值问题(BVP)：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}\,{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}(u^2(t))+\dfrac{1}{2}\,{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}(u^2(t))\right)+f(u(t))=0, \quad \text{a.e. } t\in[0,T], \\ au(0)-b\left(\dfrac{1}{2}\,{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}u^2(0)+\dfrac{1}{2}\,{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}u^2(0)\right)=0, \\ cu(T)+d\left(\dfrac{1}{2}\,{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}u^2(T)+\dfrac{1}{2}\,{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}u^2(T)\right)=0 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性，其中${}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}$和${}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}$分别表示 $3\leqslant\beta<4$ 阶左、右 Caputo 分数阶导数，$a,b,c,d>0$，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个几乎处处连续函数，$u(t)$为单调减函数.

1 预备知识

定义 1(左、右 Riemann-Liouville 分数阶导数)[17] 令 f 是定义在$[a,b]$上的一个函数，函数 f 的左、右 $\gamma>0$ 阶 Riemann-Liouville 分数阶导数分别用${}_aD_t^{\gamma}f(t)$和${}_tD_b^{\gamma}f(t)$表示，定义如下：

$${}_aD_t^{\gamma}f(t)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\,{}_aD_t^{\gamma-n}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\int_a^t(t-s)^{n-\gamma-1}f(s)\mathrm{d}s\right),$$

$${}_tD_b^{\gamma}f(t)=(-1)^n\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\,{}_tD_b^{\gamma-n}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}(-1)^n\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\int_t^b(s-t)^{n-\gamma-1}f(s)\mathrm{d}s\right),$$

其中 $t\in[a,b]$，$n-1\leqslant\gamma<n$，$n\in\mathbb{N}$. 特别地，如果 $0\leqslant\gamma<1$，则

$${}_aD_t^{\gamma}f(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,{}_aD_t^{\gamma-1}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_a^t(t-s)^{-\gamma}f(s)\mathrm{d}s\right), \quad t\in[a,b],$$

$${}_tD_b^{\gamma}f(t)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,{}_tD_b^{\gamma-1}f(t)=-\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_t^b(s-t)^{-\gamma}f(s)\mathrm{d}s\right), \quad t\in[a,b].$$

注 1 如果 $f\in C([a,b],\mathbb{R}^N)$，则显然 f 在区间$[a,b]$上存在 $\gamma>0$ 阶的 Riemann-Liouville 分数阶积分. 另一方面，如果 $f\in AC^n([a,b],\mathbb{R}^N)$，则在$[a,b]$上存在 $\gamma\in[n-1,n)$阶 Riemann-Liouville 分数阶导数，其中 $C^k([a,b],\mathbb{R}^N)(k=0,1,\cdots)$表示在$[a,b]$上有 k 次连续可微的映射集，$AC([a,b],\mathbb{R}^N)$是在$[a,b]$上 $f\in C^{k-1}([a,b],\mathbb{R}^N)$绝对连续的函数空间，$AC^{(k)}([a,b],\mathbb{R}^N)(k=0,1,\cdots)$是函数 f 的空间，使得 $f^{(k-1)}\in AC([a,b],\mathbb{R}^N)$. 特别地，$AC([a,b],\mathbb{R}^N)=AC^1([a,b],\mathbb{R}^N)$.

定义 2(左、右 Caputo 分数阶导数)[17] 令 $\gamma\geqslant0$ 且 $n\in\mathbb{N}$.

1) 如果 $\gamma\in(n-1,n)$且 $f\in AC^n([a,b],\mathbb{R}^N)$，则函数 f 的左、右 γ 阶 Caputo 分数阶导数分别用${}_a^{\mathrm{C}}D_t^{\gamma}f(t)$和${}_t^{\mathrm{C}}D_b^{\gamma}f(t)$表示，且在$[a,b]$上几乎处处存在. ${}_a^{\mathrm{C}}D_t^{\gamma}f(t)$和${}_t^{\mathrm{C}}D_b^{\gamma}f(t)$分别定义为

$${}_a^{\mathrm{C}}D_t^{\gamma}f(t)={}_aD_t^{\gamma-n}f^{(n)}(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\left(\int_a^t(t-s)^{n-\gamma-1}f^{(n)}(s)\mathrm{d}s\right),$$

$${}_t^{\mathrm{C}}D_b^{\gamma}f(t)=(-1)^n\,{}_tD_b^{\gamma-n}f^{(n)}(t)=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\gamma)}\left(\int_t^b(s-t)^{n-\gamma-1}f^{(n)}(s)\mathrm{d}s\right),$$

其中 $t\in[a,b]$. 特别地，如果 $0<\gamma<1$，则

$${}_a^{\mathrm{C}}D_t^{\gamma}f(t)={}_aD_t^{\gamma-1}f'(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\left(\int_a^t(t-s)^{-\gamma}f'(s)\mathrm{d}s\right), \quad t\in[a,b],$$

$${}_t^{\mathrm{C}}D_b^{\gamma}f(t)=-{}_tD_b^{\gamma-1}f'(t)=-\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\left(\int_t^b(s-t)^{-\gamma}f'(s)\mathrm{d}s\right), \quad t\in[a,b].$$

2) 如果 $\gamma=n-1$ 且 $f\in AC^{n-1}([a,b],\mathbb{R}^N)$，则${}_a^{\mathrm{C}}D_t^{n-1}f(t)$和${}_t^{\mathrm{C}}D_b^{n-1}f(t)$分别表示为${}_a^{\mathrm{C}}D_t^{n-1}f(t)=f^{(n-1)}(t)$和${}_t^{\mathrm{C}}D_b^{n-1}f(t)=(-1)^{(n-1)}f^{(n-1)}(t)$，$t\in[a,b]$. 特别地，${}_a^{\mathrm{C}}D_t^{0}f(t)={}_t^{\mathrm{C}}D_b^{0}f(t)=f(t)$，$t\in[a,b]$.

2　分数阶导数空间

定义 3[17]　令 $\alpha\in(1/2,1]$，$p\in[1,+\infty)$，分数阶导数空间

$$E^{\alpha,p}=\{u:[0,T]\to\mathbb{R}^N:u\text{ 是绝对连续的且}{}_0D_t^{\alpha}u\in L^p([0,T],\mathbb{R}^N)\}$$

的定义是 $C_0^{\infty}([0,T],\mathbb{R}^N)$ 在 $E_0^{\alpha,p}$ 范数

$$\|u\|_{\alpha,p}=\left(\int_0^T|u(t)|^p+|{}_0D_t^{\alpha}u(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\tag{2}$$

中的闭包.

引理 1[17]　令 $\alpha\in(0,1]$，$p\in(1,+\infty)$，则空间 $E^{\alpha,p}$ 关于范数 $\|u\|_{\alpha,p}$ 是一个可分自反 Banach 空间.

引理 2　令 $0<\alpha\leqslant1$ 且 $1\leqslant p<\infty$，则对任意的 $f\in L^p([0,T],\mathbb{R}^N)$，有

$$\|{}_{\xi}D_T^{-\alpha}f\|_{L^p([t,T])}\leqslant\frac{(T-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{L^p([t,T])},\quad\xi\in[t,T],\quad t\in[0,T].\tag{3}$$

证明：如果 $p=1$，则有

$$\begin{aligned}\|{}_{\xi}D_T^{-\alpha}f\|_{L^1([t,T])}&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^T\int_{\xi}^T|(s-\xi)^{\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s|\,\mathrm{d}\xi\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^T\int_{\xi}^T(s-\xi)^{\alpha-1}|f(s)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\xi=\\&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^T\int_t^s(s-\xi)^{\alpha-1}\mathrm{d}\xi|f(s)|\,\mathrm{d}s=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^T\frac{(s-t)^{\alpha}}{\alpha}|f(s)|\,\mathrm{d}s\leqslant\\&\frac{(T-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{L^1([t,T])}.\end{aligned}\tag{4}$$

如果 $1<p<+\infty$，令 $g\in L^q([0,T],\mathbb{R}^N)$，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则有

$$\begin{aligned}\left|\int_t^Tg(\xi)\left(\int_{\xi}^T(s-\xi)^{\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\xi\right|&=\left|\int_t^Tg(\xi)\left(\int_{\xi}^T(T-\tau)^{\alpha-1}f(T-\tau+\xi)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\xi\right|=\\&\left|\int_t^T(T-\tau)^{\alpha-1}\left(\int_t^{\tau}g(\xi)f(T-\tau+\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\\&\int_t^T(T-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau\left(\int_t^{\tau}|g(\xi)|^q\mathrm{d}\xi\right)^{1/q}\left(\int_t^{\tau}|f(T-\tau+\xi)|^p\mathrm{d}\xi\right)^{1/p}\leqslant\\&\frac{(T-t)^{\alpha}}{\alpha}\|f\|_{L^p([t,T])}\|g\|_{L^q([t,T])}.\end{aligned}\tag{5}$$

对任意固定的 $t\in[0,T]$，考虑函数 $H_{\xi*f}:L^q([0,T],\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R}$，定义为

$$H_{\xi*f}(g)=\int_t^Tg(\xi)\left(\int_{\xi}^T(s-\xi)^{\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\xi,\tag{6}$$

因此由式(5)，(6)和 Rieze 表示定理知，存在 $h\in L^p([0,T],\mathbb{R}^N)$ 以及所有的 $g\in L^q([0,T],\mathbb{R}^N)$，使得

$$\int_t^Tg(\xi)h(\xi)\mathrm{d}\xi=H_{\xi*f}(g)=\int_t^Tg(\xi)\left(\int_{\xi}^T(s-\xi)^{\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\xi,\tag{7}$$

$$\|h\|_{L^p([t,T])}\leqslant\frac{(T-t)^{\alpha}}{\alpha}\|f\|_{L^p([t,T])}.$$

由式(7)得

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}h(\xi)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\xi}^T(s-\xi)^{\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s={}_{\xi}D_T^{-\alpha}f(\xi),\qquad\xi\in[t,T],$$

即

$$\|{}_{\xi}D_T^{-\alpha}f\|_{L^p([t,T])}=\frac{\|h\|_{L^p([t,T])}}{\Gamma(\alpha)}\leqslant\frac{(T-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{L^p[t,T]}.\tag{8}$$

结合式(4)和式(8)即得不等式(3).

引理 3[17]　令 $0<\alpha\leqslant1$ 且 $1\leqslant p<\infty$，则对所有的 $u\in E_0^{\alpha,p}$，有

$$\| u \|_{L^p} \leqslant \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \| {}_0D_t^\alpha u \|_{L^p}.$$

此外，如果 $\alpha > \frac{1}{p}$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$\| u \|_\infty \leqslant \frac{T^{\alpha-1/p}}{\Gamma(\alpha)((\alpha-1)q+1)^{1/q}} \| {}_0D_t^\alpha u \|_{L^p}.$$

引理 4 如果 $\alpha \in (1/2,1]$，则对任意的 $u \in E^\alpha$，有

$$|\cos(\pi\alpha)| \int_0^T |{}_0D_t^\alpha u(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant -\int_0^T ({}_0D_t^\alpha u(t), {}_tD_T^\alpha u(t)) \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{|\cos(\pi\alpha)|} \int_0^T |{}_0D_t^\alpha u(t)|^2 \mathrm{d}t. \tag{9}$$

证明：设 $u \in E^\alpha$ 且 $\tilde{u}$ 是 u 在 $\mathbb{R}\backslash[0,T]$ 上的零延拓，则 $\sup p(\tilde{u}) \subseteq [0,T]$. 而左、右分数阶导数是非局部的：

$$\sup p({}_{-\infty}D_t^\alpha \tilde{u}(t)) \subseteq [0,+\infty), \qquad \sup p({}_tD_\infty^\alpha \tilde{u}(t)) \subseteq (-\infty, T],$$

但 $({}_{-\infty}D_t^\alpha \tilde{u}, {}_tD_\infty^\alpha \tilde{u})$ 在 $[0,T]$ 上也成立.

一方面，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ({}_{-\infty}D_t^\alpha \tilde{u}(t), {}_tD_\infty^\alpha \tilde{u}(t)) \mathrm{d}t = \cos(\pi\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} |{}_{-\infty}D_t^\alpha \tilde{u}(t)|^2 \mathrm{d}t = \cos(\pi\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} |{}_tD_\infty^\alpha \tilde{u}(t)|^2 \mathrm{d}t, \tag{10}$$

其中 ${}_{-\infty}D_t^\alpha$ 和 ${}_tD_\infty^\alpha$ 为实线上的 Riemann-Liouville 分数阶导数. 又因为 $\alpha \in (1/2,1]$，所以 $\cos(\pi\alpha) \in [-1,0)$，从而有

$$-\int_0^T ({}_0D_t^\alpha u(t), {}_tD_T^\alpha u(t)) \mathrm{d}t = -\int_0^T ({}_0D_t^\alpha \tilde{u}(t), {}_tD_T^\alpha \tilde{u}(t)) \mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{+\infty} ({}_{-\infty}D_t^\alpha \tilde{u}(t), {}_tD_\infty^\alpha \tilde{u}(t)) \mathrm{d}t =$$

$$-\cos(\pi\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} |{}_{-\infty}D_t^\alpha \tilde{u}(t)|^2 \mathrm{d}t \geqslant -\cos(\pi\alpha) \int_0^T |{}_0D_t^\alpha u(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

另一方面，利用 Young 不等式，有

$$\left| \int_0^T ({}_0D_t^\alpha u(t), {}_tD_T^\alpha u(t)) \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2}} |{}_0D_t^\alpha u(t)| \sqrt{2} |{}_tD_T^\alpha u(t)| \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\frac{1}{4\varepsilon} \int_0^T |{}_0D_t^\alpha u(t)|^2 \mathrm{d}t + \varepsilon \int_0^T |{}_tD_T^\alpha u(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\frac{1}{4\varepsilon} \int_0^T |{}_0D_t^\alpha u(t)|^2 \mathrm{d}t + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} |{}_tD_\infty^\alpha u(t)|^2 \mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{4\varepsilon} \int_0^T |{}_0D_t^\alpha u(t)|^2 \mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{|\cos(\pi\alpha)|} \left| \int_0^T ({}_0D_t^\alpha u(t), {}_tD_T^\alpha u(t)) \mathrm{d}t \right|.$$

通过取 $\varepsilon = |\cos(\pi\alpha)|/2$，得

$$\left| \int_0^T ({}_0D_t^\alpha u(t), {}_tD_T^\alpha u(t)) \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{|\cos(\pi\alpha)|} \int_0^T |{}_0D_t^\alpha u(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

证毕.

3 变分结构

令 $\alpha = -1+\beta/2$，则 $\alpha \in (1/2,1]$，从而问题(1)转化为以下形式：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2} {}_0^C D_t^{\alpha+1} ({}_0D_t^\alpha u(t)) - \dfrac{1}{2} {}_t^C D_T^{\alpha+1} ({}_tD_T^\alpha u(t))\right) + f(u(t)) = 0, \quad \text{a.e. } t \in [0,T], \\ au(0) - b\left(\dfrac{1}{2} {}_0^C D_t^{\alpha+1} ({}_0D_t^\alpha u(0)) - \dfrac{1}{2} {}_t^C D_T^{\alpha+1} ({}_tD_T^\alpha u(0))\right) = 0, \\ cu(T) + d\left(\dfrac{1}{2} {}_0^C D_t^{\alpha+1} ({}_0D_t^\alpha u(T)) - \dfrac{1}{2} {}_t^C D_T^{\alpha+1} ({}_tD_T^\alpha u(T))\right) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

因此，求 BVP(11)的解 u 即对应于求 BVP(1)的解 u.

记

$$D^\alpha(u(t)) = \frac{1}{2} {}_0^C D_t^{\alpha+1} ({}_0D_t^\alpha u(t)) - \frac{1}{2} {}_t^C D_T^{\alpha+1} ({}_tD_T^\alpha (u(t))). \tag{12}$$

定义 $D_f:=\{z\in\mathbb{R}\mid f\text{在}z\text{处不连续}\}$，如果 D_f 是(Lebesgue)可测的且 $m(D_f)=0$，则称 f 是几乎处处连续的. 此外，如果 f 在局部本质上是有界的，则对每个 $t\in\mathbb{R}$，记

$$f^-(z)=\lim_{\delta\to 0^-}\operatorname*{ess\,inf}_{|t-z|<\delta}f(z),\qquad f^+(z)=\lim_{\delta\to 0^+}\operatorname*{ess\,sup}_{|t-z|<\delta}f(z).$$

观察到 f^-，f^+ 分别是下半连续和上半连续的.

注 2　如果 f 是一个连续函数，则 $({}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}u^2(t))'$，$({}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}u^2(t))'\in C[0,T]$，$u$ 是问题(11)的经典解. 对每个 $u\in E^{\alpha}$，$\varphi\colon E^{\alpha}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\varphi(u)=-\frac{1}{2}\int_0^T({}_0D_t^{\alpha}u,{}_tD_T^{\alpha}u)\mathrm{d}t+\frac{c}{2d}(u(T))^2+\frac{a}{2b}(u(0))^2=\frac{1}{2}\|u\|^2,\tag{13}$$

$$\Upsilon(u)=\int_0^T F(u(t))\mathrm{d}t,$$

其中 $F(u):=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$，$l(u)=0$，$\Psi(u)=\Upsilon(u)-l(u)=\Upsilon(u)$，$I(u)=\varphi(u)-\Psi(u)=\varphi(u)-\Upsilon(u)$.

对任意的 $u,v\in E^{\alpha}$，有

$$\langle\varphi'(u),v\rangle=-\frac{1}{2}\int_0^T[({}_0D_t^{\alpha}u(t),{}_tD_T^{\alpha}v(t))+({}_tD_T^{\alpha}u(t),{}_0D_t^{\alpha}v(t))]\mathrm{d}t+$$

$$\frac{c}{d}u(T)\cdot v(t)+\frac{a}{b}u(0)\cdot v(t).\tag{14}$$

引理 5　令 $\alpha\in(1/2,1]$ 且 $u\in E^{\alpha}$，则 $\|u\|_{\alpha,2}$ 的范数等价于

$$\|u\|=\left[-\int_0^T({}_0D_t^{\alpha}u(t),{}_tD_T^{\alpha}u(t))\mathrm{d}t+\frac{c}{d}(u(T))^2+\frac{a}{b}(u(0))^2\right]^{1/2}.\tag{15}$$

证明：由定义 3 和引理 4 可得

$$\|u\|_{\alpha,2}=\left(\int_0^T(|u(t)|^2+|{}_0D_t^{\alpha}u(t)|^2)\mathrm{d}t\right)^{1/2}\leqslant\left(\int_0^T|u(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}+\left(\int_0^T|{}_0D_t^{\alpha}u(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\|u\|+\left(\frac{1}{\cos(\pi\alpha)}\int_0^T({}_0D_t^{\alpha}u(t),{}_tD_T^{\alpha}u(t))\mathrm{d}t\right)^{1/2}\leqslant\left(1+\frac{1}{\cos(\pi\alpha)}\right)\|u\|.\tag{16}$$

下面令 $\{u_k\}\subset E^{\alpha}$ 且 $2<\mu_1<\mu$，$\{\varphi(u_n)\}$ 有界，$\varphi'(u_n)\to 0$，结合式(14)，(15)可得

$$\mu_1\varphi(u_n)-(\varphi'(u_n),u_n)=\left(1-\frac{\mu_1}{2}\right)\int_0^T({}_0D_t^{\alpha}u_n(t),{}_tD_T^{\alpha}u_n(t))\mathrm{d}t+\frac{c\mu_1}{2d}(u_n(T))^2+\frac{a\mu_1}{2b}(u_n(0))^2-$$

$$\frac{c}{d}u_n(T)\cdot u_n(t)-\frac{a}{b}u_n(0)\cdot u_n(t)\leqslant\left(\frac{\mu_1}{2}-1\right)\frac{1}{|\cos(\pi\alpha)|}\|u_n\|_{\alpha}^2+$$

$$\left(\frac{c\mu_1}{2d}+\frac{a\mu_1}{2b}\right)\|u_n(0)\|^2-\left(\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\right)\|u_n(T)\|^2.\tag{17}$$

由式(13)可得

$$\mu_1\varphi(u_n)-(\varphi'(u_n),u_n)=\frac{\mu_1}{2}\|u_n\|^2-\|u_n\|^2.\tag{18}$$

根据式(17)和式(18)得到不等式：

$$\left(\frac{\mu_1}{2}-1\right)\|u_n\|^2\leqslant\left(\frac{\mu_1}{2}-1\right)\|u_n\|_{\alpha}^2+\left(\frac{c\mu_1}{2d}+\frac{a\mu_1}{2b}\right)\|u_n(0)\|^2-\left(\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\right)\|u_n(T)\|^2.$$

因为

$$\left(\frac{c\mu_1}{2d}+\frac{a\mu_1}{2b}\right)\|u_n(0)\|^2-\left(\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\right)\|u_n(T)\|^2>0,$$

故

$$\|u_n\|^2\leqslant\|u_n\|_{\alpha}^2+c_1,$$

其中 c_1 为常数，$c_1=\left(\frac{c\mu_1}{2d}+\frac{a\mu_1}{2b}\right)\|u_n(0)\|^2-\left(\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\right)\|u_n(T)\|^2$. 从而可得

$$\|u\|\leqslant\|u\|_{\alpha}+c_2,\tag{19}$$

其中 c_2 为大于 0 的常数.

而 $\|u\|_{\alpha}=\|u\|_{\alpha,2}$，再结合式(16)和式(19)得到不等式：

$$\left(\frac{\cos(\pi\alpha)}{1+\cos(\pi\alpha)}\right)\|u\|_{\alpha,2}\leqslant\|u\|\leqslant\|u\|_{\alpha,2}+c_2,$$

因此 $\|u\|_{\alpha,2}$ 等价于 $\|u\|$.

引理 6 泛函 $\varphi:E^{\alpha}\to\mathbb{R}$ 是弱下半连续的.

证明：显然 φ 是弱下半连续的. 为证明 φ 在 E^{α} 上是弱下半连续的，只需证明 φ 在 E^{α} 上是凸的. 令 $\lambda\in(0,1)$，$u,v\in E^{\alpha}$ 和 $\tilde{u},\tilde{v}$ 分别是 u 和 v 在 $\mathbb{R}/[0,T]$ 上的零扩展. 因为

$$\begin{aligned}
\varphi_1((1-\lambda)u+\lambda v)=&-\frac{1}{2}\int_0^T[{}_0D_t^{\alpha}((1-\lambda)u(t)+\lambda v(t)),{}_tD_T^{\alpha}((1-\lambda)u(t)+\lambda v(t))]\mathrm{d}t=\\
&-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[{}_{-\infty}D_t^{\alpha}((1-\lambda)\tilde{u}(t)+\lambda\tilde{v}(t)),{}_tD_{\infty}^{\alpha}((1-\lambda)\tilde{u}(t)+\lambda\tilde{v}(t))]\mathrm{d}t=\\
&\frac{|\cos(\pi\alpha)|}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|{}_{-\infty}D_t^{\alpha}((1-\lambda)\tilde{u}(t)+\lambda\tilde{v}(t))|^2\mathrm{d}t=\\
&\frac{|\cos(\pi\alpha)|}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[(1-\lambda)|{}_{-\infty}D_t^{\alpha}\tilde{u}(t)|^2+\lambda|{}_{-\infty}D_t^{\alpha}\tilde{v}(t)|^2]\mathrm{d}t=\\
&\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-\frac{1-\lambda}{2}({}_{-\infty}D_t^{\alpha}\tilde{u}(t),{}_tD_{\infty}^{\alpha}\tilde{u}(t))-\frac{\lambda}{2}({}_{-\infty}D_t^{\alpha}\tilde{v}(t),{}_tD_{\infty}^{\alpha}\tilde{v}(t))\right]\mathrm{d}t=\\
&\int_0^T\left[-\frac{1-\lambda}{2}({}_0D_t^{\alpha}u(t),{}_tD_T^{\alpha}u(t))-\frac{\lambda}{2}({}_0D_t^{\alpha}v(t),{}_tD_T^{\alpha}v(t))\right]\mathrm{d}t=\\
&(1-\lambda)\varphi_1(u)+\lambda\varphi_1(v),
\end{aligned}$$

所以 φ_1 是 E^{α} 上的凸泛函. 显然 $\varphi_2=\frac{c}{2d}|u(T)|^2+\frac{a}{2b}|u(0)|^2$ 在 E^{α} 上也是凸的，所以 $\varphi(u)=\varphi_1(u)+\varphi_2(u)$ 是一个定义在 E^{α} 上的凸泛函.

引理 7 令 $u,v\in L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$，如果对每个 $\varphi\in C_0^{\infty}[0,T]$，均有

$$\int_0^T(u(t),\varphi'(t))\mathrm{d}t=-\int_0^T(v(t),\varphi(t))\mathrm{d}t,$$

则 u 是 v 的原函数. 即对几乎每个 $t\in[0,T]$，都有 $u(t)=\int_0^t v(s)\mathrm{d}s+c$，其中 $c\in\mathbb{R}^n$.

证明：用 $w(t)=\int_0^t v(s)\mathrm{d}s$ 定义 $w\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$，使得

$$\int_0^T(w(t),\varphi'(t))\mathrm{d}t=\int_0^T\left(\int_0^t v(s)\mathrm{d}s,\varphi(t)\right)\mathrm{d}t.$$

由 Fubini 定理，得

$$\int_0^T(w(t),\varphi'(t))\mathrm{d}t=\int_0^T\left[\int_s^T(v(s),\varphi(t))\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s=\int_0^T(u(s),\varphi(s))\mathrm{d}s,$$

所以 $\int_0^T(u(s)-w(s),\varphi(s))\mathrm{d}s=0$. 根据变分演算的基本引理，有 $u(t)-w(t)=c$，其中 $c\in\mathbb{R}$，证毕.

引理 8 考虑问题

$$\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}\,{}^{\mathrm{C}}_0D_t^{\beta}(u^2(t))+\dfrac{1}{2}\,{}^{\mathrm{C}}_tD_T^{\beta}(u^2(t))\right)+h(t)=0,\quad \text{a.e. } t\in[0,T],\\
au(0)-b\left(\dfrac{1}{2}\,{}^{\mathrm{C}}_0D_t^{\beta}u^2(0)+\dfrac{1}{2}\,{}^{\mathrm{C}}_tD_T^{\beta}u^2(0)\right)=0,\\
cu(T)+d\left(\dfrac{1}{2}\,{}^{\mathrm{C}}_0D_t^{\beta}u^2(T)+\dfrac{1}{2}\,{}^{\mathrm{C}}_tD_T^{\beta}u^2(T)\right)=0,
\end{cases}\tag{20}$$

其中 $h\in L^2([0,T])$. 问题(20)有唯一解 $u\in E^{\alpha}$ 使得 $({}^{\mathrm{C}}_0D_t^{\beta}(\overline{u}^2))'$，$({}^{\mathrm{C}}_tD_T^{\beta}(\overline{u}^2))'$ 是几乎处处连续的，且 $\overline{u}$ 是通过 $\min\limits_{v\in E^{\alpha}}\left\{-\int_0^T({}_0D_t^{\alpha}v'',{}_tD_T^{\alpha}v'')\mathrm{d}t+\frac{c}{d}v^2(T)+\frac{a}{b}v^2(0)\right\}$ 得到的.

证明：如果 u 是问题(20)的一个经典解，则对所有的 $v\in E^{\alpha}$，通过分部积分有

$$\frac{1}{2}\int_0^T [{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}(u^2(t))+{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}(u^2(t))]'v(t)\mathrm{d}t+\int_0^T h(t)v(t)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T [({}_0D_t^{\alpha}u(t),{}_tD_T^{\alpha}v''(t))+({}_tD_T^{\alpha}u(t),{}_0D_t^{\alpha}v''(t))]\mathrm{d}t-$$

$$\frac{c}{d}u(T)v(T)-\frac{a}{b}u(0)v(0)+\int_0^T h(t)v(t)\mathrm{d}t.$$

令

$$a(u,v)=-\frac{1}{2}\int_0^T [({}_0D_t^{\alpha}u,{}_tD_T^{\alpha}v'')+({}_tD_T^{\alpha}u,{}_0D_t^{\alpha}v'')]\mathrm{d}t+\frac{c}{d}u(T)v(T)+\frac{a}{b}u(0)v(0).$$

显然，$a(u,v)$是 E^{α} 上的连续强制双线性形式. 由 Lax-Milgram 定理与双线性形式 $a(u,v)$、线性函数 $\varphi: v\to\int_0^T h(t)v(t)\mathrm{d}t$ 可知，存在一个唯一的元素 $\overline{u}\in E^{\alpha}$，使对所有的 $v\in E^{\alpha}$，有

$$a(\overline{u},v)=\int_0^T h(t)v(t)\mathrm{d}t. \tag{21}$$

此外 $\overline{u}$ 是由 $\min\limits_{v\in E^{\alpha}}\left\{\frac{1}{2}a(v,v)-\int_0^T h(t)v(t)\mathrm{d}t\right\}$ 得到的，因此对所有的 $v\in E^{\alpha}$，都有

$$0=-\frac{1}{2}\int_0^T [({}_0D_t^{\alpha}\overline{u},{}_tD_T^{\alpha}v'')+({}_tD_T^{\alpha}\overline{u},{}_0D_t^{\alpha}v'')]\mathrm{d}t+\frac{c}{d}\overline{u}(T)v(T)+\frac{a}{b}\overline{u}(0)v(0)-\int_0^T h(t)v(t)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T ({}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}\overline{u}^2+{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}\overline{u}^2,v')\mathrm{d}t+\frac{c}{d}\overline{u}(T)v(T)+\frac{a}{b}\overline{u}(0)v(0)-\int_0^T h(t)v(t)\mathrm{d}t. \tag{22}$$

不失一般性，式(22)适用于所有的 $v\in C_0^{\infty}\subset E^{\alpha}$，其中 $C_0^{\infty}=\{u\in C^{\infty}[0,T]: u(0)=u(T)=0\}$. 对所有的 $v\in C_0^{\infty}$，式(22)就等于

$$0=\frac{1}{2}\int_0^T ({}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha+1}({}_0D_t^{\alpha}u(t))-{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\alpha+1}({}_tD_T^{\alpha}u(t)),v'(t))\mathrm{d}t-\int_0^T h(t)v(t)\mathrm{d}t.$$

由引理 7 有

$$\frac{1}{2}({}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha+1}({}_0D_t^{\alpha}u(t)))-\frac{1}{2}({}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\alpha+1}({}_tD_T^{\alpha}u(t)))=-\int_0^t h(s)\mathrm{d}s+c,\quad \text{a.e. } t\in[0,T],\quad c\in\mathbb{R}.$$

所以

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(D^{\alpha}(u(t)))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha+1}({}_0D_t^{\alpha}u(t))-\frac{1}{2}{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\alpha+1}({}_tD_T^{\alpha}u(t))\right)+h(t)=0,\quad t\in[0,T]. \tag{23}$$

因为 h 在$[0,T]$上几乎处处连续，故有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(D^{\alpha}(u(t)))$在$[0,T]$上几乎处处连续.

将式(23)代入式(22)，对所有的 $v\in E^{\alpha}$，通过分部积分得

$$0=\frac{1}{2}\int_0^T ({}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}\overline{u}^2+{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}\overline{u}^2,v')\mathrm{d}t+\frac{c}{d}\overline{u}(T)v(T)+\frac{a}{b}\overline{u}(0)v(0)+$$

$$\int_0^T\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}\overline{u}^2+\frac{1}{2}{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}\overline{u}^2\right),v\right)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{c}{d}\overline{u}(T)v(T)+\frac{a}{b}\overline{u}(0)v(0)+\frac{1}{2}({}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}\overline{u}^2+{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}\overline{u}^2,v)\Big|_0^T=$$

$$\frac{c}{d}\overline{u}(T)v(T)+\frac{a}{b}\overline{u}(0)v(0)+\frac{1}{2}{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}\overline{u}^2(T)v(T)+\frac{1}{2}{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}\overline{u}^2(T)v(T)-$$

$$\frac{1}{2}{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}\overline{u}^2(0)v(0)-\frac{1}{2}{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}\overline{u}^2(0)v(0)=$$

$$\left[\frac{c}{d}\overline{u}(T)+\frac{1}{2}{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}\overline{u}^2(T)+\frac{1}{2}{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}\overline{u}^2(T)\right]v(T)+$$

$$\left[\frac{a}{b}\overline{u}(0)-\frac{1}{2}{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}\overline{u}^2(0)-\frac{1}{2}{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}\overline{u}^2(0)\right]v(0).$$

令 $v(0)=0$，$v(T)\neq 0$，则

$$\frac{c}{d}\overline{u}(T)+\frac{1}{2}{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}\overline{u}^2(T)+\frac{1}{2}{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}\overline{u}^2(T)=0.$$

同理可得

$$\frac{a}{b}\overline{u}(0)-\frac{1}{2}\,{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}\overline{u}^2(0)-\frac{1}{2}\,{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}\overline{u}^2(0)=0.$$

故边值条件成立. 由式(21)可见${}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}\overline{u}^2\in L^2[0,T]$, 因此${}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}\overline{u}^2\in L^2[0,T]$. 如果 $h\in C[0,T]$, 则${}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}u^2\in C[0,T]$, $({}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}u^2)'\in C[0,T]$.

引理 9 令 $u\in E^{\alpha}$, 如果对所有的 $v\in L^2[0,T]$有 $a(u,v)=0$, 则对 $t\in[0,T]$有 $u=0$.

证明: 如果对所有的 $v\in L^2[0,T]$有 $a(u,v)=0$, 则不失一般性, 有 $a(u,u)=0$. 由于 $a(u,u)=\|u\|^2$, 因此对 $t\in[0,T]$有 $u(t)=0$.

假设:

(H_1) 对几乎每个 $t\in[0,T]$及每个 $u\in D_f$, $f^-(u)\leqslant 0\leqslant f^+(u)$即表明 $f(u)=0$.

引理 10 令 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是局部本质有界的几乎处处连续函数, 假设($\mathrm{H}_1$)成立且 $u\in E^{\alpha}$ 是 I 的广义临界点, 则 u 是 BVP(11)的一个广义解.

证明: 令 $u_0\in E^{\alpha}$ 是 I 的一个广义解, 即对所有的 $v\in E^{\alpha}$, $I^0(u_0,v)\geqslant 0$. 从而对所有的 $v\in E^{\alpha}$, 有

$$\varphi'(u_0)(v)+(-\Upsilon)^0(u_0;v)\geqslant 0.$$

即对所有的 $v\in E^{\alpha}$, 有

$$\frac{1}{2}\int_0^T({}_0D_t^{\alpha}u_0,{}_tD_T^{\alpha}v)+({}_tD_T^{\alpha}u_0,{}_0D_t^{\alpha}v)\mathrm{d}t-\frac{c}{d}u_0(T)v(T)-\frac{a}{b}u_0(0)v(0)\leqslant(-\Upsilon)^0(u_0;v).\quad(24)$$

显然, 对所有的 $v\in E^{\alpha}$, 令

$$L_{u_0}(v)=\frac{1}{2}\int_0^T[({}_0D_t^{\alpha}u_0,{}_tD_T^{\alpha}v)+({}_tD_T^{\alpha}u_0,{}_0D_t^{\alpha}v)]\mathrm{d}t-\frac{c}{d}u_0(T)v(T)-\frac{a}{b}u_0(0)v(0),$$

L_{u_0} 是 E^{α} 上的一个连续线性泛函, 其中式(24)表示 $L_{u_0}\in\partial(-\Upsilon)|_{E^{\alpha}}(u_0)$. 由于 E^{α} 在 $L^2[0,T]$密集, 由文献[18]知$\partial(-\Upsilon)|_{E^{\alpha}}(u_0)\subseteq\partial(-\Upsilon)|_{L^2[0,T]}(u_0)$, 所以 $L_{u_0}\in\partial(-\Upsilon)|_{L^2[0,T]}(u_0)$, L 在 $L^2[0,T]$上是连续并且线性的. 因此对所有的 $v\in L^2[0,T]$, 存在一个 $\overline{h}\in L^2[0,T]$满足 $L_{u_0}(v)=\int_0^T\overline{h}(x)v(x)\mathrm{d}x$. 由引理 7 知, 有唯一的 $\overline{u}\in E^{\alpha}$, 满足$({}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}(\overline{u}^2))'$,$({}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}(\overline{u}^2))'$几乎处处连续, 使得式(21)成立.

特别地, 对所有的 $v\in E^{\alpha}$, 有

$$\int_0^T\overline{h}(x)v(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^T[({}_0D_t^{\alpha}\overline{u},{}_tD_T^{\alpha}v)+({}_tD_T^{\alpha}\overline{u},{}_0D_t^{\alpha}v)]\mathrm{d}t-\frac{c}{d}\overline{u}(T)v(T)-\frac{a}{b}\overline{u}(0)v(0).$$

因此,

$$\frac{1}{2}\int_0^T[({}_0D_t^{\alpha}\overline{u},{}_tD_T^{\alpha}v)+({}_tD_T^{\alpha}\overline{u},{}_0D_t^{\alpha}v)]\mathrm{d}t-\frac{c}{d}\overline{u}(T)v(T)-\frac{a}{b}\overline{u}(0)v(0)=L_{u_0}(v)=\int_0^T\overline{h}(x)v(x)\mathrm{d}x,$$

即对所有的 $v\in L^2[0,T]$有 $a(u_0-\overline{u},v)=0$. 引理 9 表明 $u_0=\overline{u}$, 所以$({}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}(u_0^2))'\in C[0,T]$, $({}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}(u_0^2))'\in C[0,T]$, 并且

$$\frac{1}{2}\int_0^T[({}_0D_t^{\alpha}u_0,{}_tD_T^{\alpha}v)+({}_tD_T^{\alpha}u_0,{}_0D_t^{\alpha}v)]\mathrm{d}t-\frac{c}{d}u_0(T)v(T)-\frac{a}{b}u_0(0)v(0)=$$

$$\int_0^T\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}u_0^2+\frac{1}{2}\,{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}u_0^2\right),v(t)\right)\mathrm{d}t$$

对所有的 $v\in E^{\alpha}$ 都成立. 从而对所有的 $v\in E^{\alpha}$, 有

$$\int_0^T\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}u_0^2+\frac{1}{2}\,{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}u_0^2\right),v(t)\right)\mathrm{d}t\leqslant(-\Upsilon)^0(u_0;v).$$

文献[18]确保了对几乎每个 $t\in[0,T]$, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}u_0^2+\frac{1}{2}\,{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}u_0^2\right)\in[(-f)^-(u_0(x)),(-f)^+(u_0(x))].\quad(25)$$

由于 $m(D_f)=0$, 因此

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}u_0^2+\frac{1}{2}\,{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}u_0^2\right)=0,\qquad\text{a.e. } t\in u_0^{-1}(D_f).$$

由假设(H_1)，对 a.e. $t\in u_0^{-1}(D_f)$，$f(u_0(t))=0$. 所以

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}u_0^2+\frac{1}{2}\,{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}u_0^2\right)=f(u_0(t)),\qquad \text{a.e. } t\in u_0^{-1}(D_f).$$

另一方面，对 a.e. $t\in[0,T]\backslash u_0^{-1}(D_f)$，式(25)即为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\beta}u_0^2+\frac{1}{2}\,{}_t^{\mathrm{C}}D_T^{\beta}u_0^2\right)=f(u_0(t)).$$

从而证明该边值问题存在一个解.

4　BVP(1)解的存在性

引理 11[19]　假设 X 是一个自反实 Banach 空间，φ 和 Ψ 是局部的 Lipschitz 泛函，则下列结论成立.

1) 对每个 $r>\inf\limits_X\varphi$，函数 $I=\varphi-\Psi$ 对 $\varphi^{-1}((-\infty,r))$的限制允许有一个全局最小值，它是 I 在 X 中的一个临界点(局部最小值).

2) 如果 $r<+\infty$，则以下条件之一成立：

① I 具有一个全局最小值；

② I 有一个临界点(局部最小值)序列$\{u_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(u_n)=+\infty$.

3) 如果 $\delta<+\infty$，则下列条件之一成立：

① φ 的全局最小值是 I 的局部最小值；

② I 有一个成对不同的临界点(局部最小值)的序列$\{u_n\}$，其中 $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(u_n)=\inf\limits_X\varphi$，它弱收敛到 φ 的全局最小值.

下面令

$$A=\liminf_{\xi\to+\infty}\frac{\max\limits_{|t|\leqslant\xi}F(t)}{\xi^2},\qquad B=\limsup_{\xi\to+\infty}\frac{F(\xi)}{\xi^2},$$

$$M_1=\frac{T^{\alpha-1/p}}{\Gamma(\alpha)((\alpha-1)q+1)^{1/q}},\qquad M_2=\frac{1}{(\Gamma(1-\alpha))^2}\,\frac{(-1)^{\alpha}2}{T}+\frac{c}{d}.$$

对每个 $\xi\in\mathbb{R}$，令 $F(\xi):=\int_0^{\xi}f(s)\mathrm{d}s$，并假设：

(H_2) 对每个 $\xi\geqslant0$ 有 $\int_0^{\xi}F(t)\mathrm{d}t\geqslant0$；

(H_3) $\liminf\limits_{\xi\to+\infty}\dfrac{\max\limits_{|t|\leqslant\xi}F(t)}{\xi^2}<k\limsup\limits_{\xi\to+\infty}\dfrac{F(\xi)}{\xi^2}$，其中 $k=\dfrac{1}{2M_1^2M_2}$.

定理 1　令 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个局部本质有界的几乎处处连续函数. 如果假设条件(H_1)～(H_3)成立，则问题(11)在 E^{α} 中有一系列无界的广义解.

证明：用引理 11 证明. 由假设(H_3)知，存在一个实序列$\{c_n\}$，满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=+\infty$，且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\max\limits_{|t|<c_n}}{c_n^2}=A<+\infty.\tag{26}$$

对所有的 $n\in\mathbb{N}$，令 $r_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c_n^2}{M_1^2}\right)$.

由引理 3 知，对所有的 $v\in E^{\alpha}$ 满足 $\|v\|^2\leqslant2r_n$，从而可得 $\|v\|_{\infty}\leqslant M_1\|v\|\leqslant M_1\sqrt{2r_n}=c_n$. 于是，

$$\varphi(r_n)=\inf_{u\in\varphi^{-1}([-\infty,r_n])}\frac{\left(\sup\limits_{u\in\varphi^{-1}([-\infty,r_n])}\Psi(u)\right)-\Psi(u)}{r_n-\varphi(u)}\leqslant\frac{\sup\limits_{\|u\|^2<2r_n}\Psi(u)-\Psi(0)}{r_n}=$$

$$\frac{\sup\limits_{\|v\|^2<2r_n}\int_0^T F(v(x))\mathrm{d}x}{r_n}\leqslant\frac{T\max\limits_{|t|<c_n}F(t)}{r_n}=2\frac{M_1^2T}{c_n^2}\max_{|t|\leqslant c_n}F(t),$$

由式(26)知，$\varphi(r_n)\leqslant 2M_1^2TA$. 所以 $\Upsilon:=\lim\limits_{r\to+\infty}\inf\varphi(r)\leqslant\lim\limits_{n\to+\infty}\inf\varphi(r_n)\leqslant 2M_1TA<+\infty$.

下面称 I 是无界的. 由假设(H_3)，令(d_n)是一个实序列，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=+\infty$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(d_n)}{d_n^2}=B. \tag{27}$$

对所有的 $n\in\mathbb{R}$，定义

$$\omega_n(t)=\begin{cases}\dfrac{2d_n(t-s)^\alpha}{T}, & t\in\left[0,\dfrac{T}{2}\right],\\ d_n, & t\in\left[\dfrac{T}{2},T\right].\end{cases}$$

显然，$\omega_n\in X$，且

$$\|\omega_n\|^2=-\int_0^T({}_0D_t^\alpha\omega_n,{}_tD_T^\alpha\omega_n)\mathrm{d}t+\frac{c}{d}(\omega_n(T))^2+\frac{a}{b}(\omega_n(0))^2=$$

$$\int_0^T\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\omega_n(s)\mathrm{d}s,\frac{1}{(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^T(s-t)^{-\alpha}\omega_n(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t+\frac{c}{d}d_n^2=$$

$$\frac{1}{(\Gamma(1-\alpha))^2}\left\{\int_0^{T/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\frac{2d_n(t-s)^\alpha}{T}\mathrm{d}s,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^{T/2}(s-t)^{-\alpha}\frac{2d_n(t-s)^\alpha}{T}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\right\}+\frac{c}{d}d_n^2=$$

$$\frac{1}{(\Gamma(1-\alpha))^2}\int_0^{T/2}\left(\frac{2d_n}{T},\frac{(-1)^\alpha 2d_n}{T}\right)\mathrm{d}t+\frac{c}{d}d_n^2\leqslant\frac{1}{(\Gamma(1-\alpha))^2}\frac{(-1)^\alpha 2d_n^2}{T}+\frac{c}{d}d_n^2:=M_2d_n^2.$$

因此，

$$\varphi(\omega_n)-\Psi(\omega_n)=\frac{\|\omega_n\|^2}{2}-\int_0^T F(\omega_n(t))\mathrm{d}t\leqslant\frac{M_2d_n^2}{2}-\int_0^T F(\omega_n(t))\mathrm{d}t.$$

由假设(H_2)，有

$$\int_0^T F(\omega_n(t))\mathrm{d}t\geqslant\int_{T/2}^T F(d_n)\mathrm{d}t=F(d_n)\left(\frac{1}{2}T\right).$$

因此，对所有的 $n\in\mathbb{N}$，有

$$\varphi(\omega_n)-(\omega_n)\leqslant\frac{M_2d_n^2}{2}-\frac{T}{2}F(d_n).$$

如果 $B<+\infty$，则由式(27)知，对任意的 $\varepsilon\leqslant B-M_2\backslash T$，存在 $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$，使得对所有的 $n>N_\varepsilon$，有

$$F(d_n)>(B-\varepsilon)d_n^2.$$

所以随着 $n\to+\infty$，有

$$\varphi(\omega_n)-\Psi(\omega_n)\leqslant\frac{M_2d_n^2}{2}-\frac{T}{2}(B-\varepsilon)d_n^2=\frac{d_n^2}{2}(M_2-T(B-\varepsilon))\to-\infty.$$

如果 $B=+\infty$，固定 $M_3>M_2\backslash T$，并且由式(27)知，对所有的 $n>N_M$，存在 $N_M\in\mathbb{N}$，使得

$$F(d_n)>M_3d_n^2.$$

因此随着 $n\to+\infty$，有

$$\varphi(\omega_n)-\Psi(\omega_n)\leqslant\frac{M_2d_n^2}{2}-\frac{T}{2}M_3d_n^2=\frac{d_n^2}{2}(M_2-TM_3)\to-\infty.$$

综上，引理 11 中 2)的所有假设得到了验证，函数 I 有一个广义临界点的序列$\{u_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|u_n\|=+\infty$，即$\{u_n\}$在 E^α 上是无界的. 由引理 10 知，$\{u_n\}$是 BVP(11)的一个广义解序列，证毕.

参 考 文 献

[1] HILFER R. Applications of Fractional Calculus in Physics [M]. [S.l.]: Word Scientific, 2000: 1-472.

[2] KIRCHNER J W, FENG X H, NEAL C. Fractal Stream Chemistry and Its Implications for Contaminant Transport in Catchments [J]. Nature, 2000, 403: 524-527.

[3] LUNSTROM B N, HIGGS M H, SPAIN W J, et al. Fractional Differentiation by Neocortical Pyramidal Neurons [J]. Nature Neuroscience, 2008, 11: 1335-1342.

[4] MAINARDI F. Fractional Calculus: Some Basic Problems in Continuum and Statistical Mechanics [M]. [S. l.]: Springer Vienna, 1997: 291-348.

[5] CHANG Y K, NIETO J J. Some New Existence Results for Fractional Differential Inclusions with Boundary Conditions [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2009, 49(3/4): 605-609.

[6] OUAHAB A. Some Results for Fractional Boundary Value Problem of Differential Inclusions [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2008, 69(11): 3877-3896.

[7] ZHANG Y H, BAI Z B. Existence of Solutions for Nonlinear Fractional Three-Point Boundary Value Problem at Resonance [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2011, 36: 417-440.

[8] BAI C Z. Infinitely Many Solutions for a Perturbed Nonlinear Fractional Boundary-Value Problem [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2013, 2013: 136-1-136-12.

[9] RICCERI B. A General Variational Principle and Some of Its Applications [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000, 113(1/2): 401-410.

[10] GLÖCKLE W G, NONNENMACHER T F. A Fractional Calculus Approach to Self-similar Protein Dynamics [J]. Biophysical Journal, 1995, 68(1): 46-53.

[11] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations [M]. North-Holland Mathematics Studies, 204. Amsterdam: Elsevier Science, 2006: 1-523.

[12] MILLER K S, ROSS B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations [M]. New York: Wiley, 1993: 357-360.

[13] 吴亚斌，周文学，宋学瑶. 带 p-Laplacian 算子的半线性分数阶脉冲微分方程解的存在性与唯一性 [J]. 云南大学学报(自然科学版)，2023，45(1)：9-17.（WU Y B, ZHOU W X, SONG X Y. Existence and Uniqueness of Solutions for Semilinear Fractional Impulse Differential Equations with p-Laplacian Operators [J]. Journal of Yunnan University (Natural Science Edition), 2023, 45(1): 9-17.）

[14] ZHAO Y L, CHEN H B, ZHANG Q M. Infinitely Many Solutions for Fractional Differential System via Variational Method [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2016, 50: 589-609.

[15] JIAO F, ZHOU Y. Existence of Solutions for a Class of Fractional Boundary Value Problems via Critical Point Theory [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2011, 62(3): 1181-1199.

[16] TENG K M, JIA H E, ZHANG H F. Existence and Multiplicity Results for Fractional Differential Inclusions with Dirichlet Boundary Conditions [J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 220: 792-801.

[17] 白占兵. 分数阶微分方程边值问题理论及应用 [M]. 北京：中国科学技术出版社，2012：1-211.（BAI Z B. Theory and Application of Fractional Differential Equation Boundary Value Problem [M]. Beijing: China Science and Technology Press, 2012: 1-211.）

[18] CHANG K C. Variational Methos for Non-differentiable Functionals and Their Applications to Partial Differential Equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1981, 80(1): 102-129.

[19] BONANNO G, BISCI G M. Infinitely Many Solutions for a Boundary Value Problem with Discontinuous Nonlinearities [J/OL]. Boundary Value Problems, (2009-02-23)[2023-08-15]. https://doi.org/10.1155/2009/670675.

（责任编辑：赵立芹）