

一种基于自适应阶插值法的 WCNS-AO 格式

胡迎港, 蒋艳群, 黄晓倩

(西南科技大学数理学院, 621010 绵阳)

摘 要: Euler 方程为一类典型的非线性双曲型守恒律方程, 这类方程的解可能存在间断。这使得高阶精度数值格式求解 Euler 方程时在间断附近容易产生非物理振荡。基于自适应阶插值思想设计了求解 Euler 方程的一种新的加权紧致非线性格式 (WCNS-AO)。该格式在经典的五点 WCNS 格式的基础上, 采用子模板上低阶插值和全局模板上高阶插值混合的具有自适应阶的非线性加权插值技术, 以改善原有格式的性能。在 WCNS-AO 格式中, 单元节点处通量空间导数采用节点和半节点混合型六阶中心差分格式计算; 单元界面通量采用特征形式的具有自适应阶的非线性插值方法计算。高阶 TVD Runge-Kutta 方法用于求解 Euler 方程空间离散化后得到的半离散方程。数值结果表明, WCNS-AO 格式在光滑区能达到五阶设计精度, 同时相比经典的五阶 WCNS-Z 格式和五阶 WENO-AO 格式, 具有更好的分辨率和激波捕捉能力。

关键词: Euler 方程; 自适应阶; WCNS-AO 格式; 非线性插值; 激波捕捉能力

中图分类号: O354; O241

文献标志码: A

文章编号: 1000-4939(2025)05-1155-10

A WCNS-AO scheme based on an interpolation method of adaptive order

HU Yinggang, JIANG Yanqun, HUANG Xiaoqian

(School of Mathematics and Physics, Southwest University of Science and Technology, 621010 Mianyang, China)

Abstract: The system of Euler equations is typically formulated as the form of nonlinear hyperbolic conservation law equations. The solutions of this type of equations may have discontinuities, which may lead to the emergence of non-physical oscillations near the discontinuities using high-order numerical schemes for solving Euler equations. This paper designs a new weighted compact nonlinear scheme based on an interpolation method of adaptive order (WCNS-AO) to solve Euler equations. Following the classical five-point WCNS scheme, this scheme uses a nonlinear weighted interpolation technique that combines the low-order interpolations on the substencils and the high-order interpolation on the global stencil to improve the performance of the classical scheme. The WCNS-AO scheme combines the sixth-order hybrid cell-edge and cell-node center differencing for flux derivatives at cell-nodes and the nonlinear interpolation technique of adaptive order at cell-edges. The high-order TVD Runge-Kutta method is applied to solve the semi-discrete

收稿日期: 2023-02-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 11872323); 国家数值风洞工程资助项目 (No. NNW2018-ZT4A08)

通信作者: 蒋艳群, 研究员。E-mail: jyq2005@mail.ustc.edu.cn

引用格式: 胡迎港, 蒋艳群, 黄晓倩. 一种基于自适应阶插值法的 WCNS-AO 格式[J]. 应用力学学报, 2025, 42(5): 1155-1164.

HU Yinggang, JIANG Yanqun, HUANG Xiaoqian. A WCNS-AO scheme based on an interpolation method of adaptive order[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2025, 42(5): 1155-1164.

equations generated by spatial discretization of Euler equations. Numerical results show that the WCNS-AO scheme can achieve fifth-order accuracy in smooth domains and has better resolution and shock-capturing capability compared with the classical fifth-order WCNS-Z and WENO-AO schemes.

Key words: Euler equation; adaptive order; WCNS-AO; nonlinear interpolation; discontinuity-capturing capability

Euler 方程在流体力学中扮演着重要的角色,其二维形式描述如下

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = 0 \quad (1)$$

式中: $U = [\rho, \rho u, \rho v, E]^T$ 为守恒变量; $F(U) = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, u(E + p)]^T$ 和 $G(U) = [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, v(E + p)]^T$ 为无黏通量; ρ 为流体密度; u 和 v 分别为流体在 x 和 y 方向的速度; E 为单位体积总能量; p 为压力,满足 $p = (\lambda - 1) \left[E - \frac{1}{2} \rho(u^2 + v^2) \right]$; 比

热比 $\gamma = 1.4$ 。由于 Euler 方程的解可能出现激波、接触间断等,这就导致方程的精确求解和数值模拟均存在很大的困难。

在众多高阶精度格式中,加权本质无振荡 (weighted essentially non-oscillatory, WENO) 格式^[1]在间断附近保持本质无振荡特性,并在光滑区域可达高阶精度,因此成为求解 Euler 方程的理想选择。相比使用最优模板信息重构数值通量的本质无振荡 (essentially non-oscillatory, ENO) 格式^[2], WENO 格式引入了非线性加权技术,采用全部候选模板信息重构数值通量,在光滑区精度更高,在间断附近稳定性更好。JIANG 等^[3]构造了子模板光滑因子,提出了五阶 WENO-JS 格式。针对 WENO-JS 格式在极值点附近会出现精度降低问题,文献[4-12]提出了诸多改进方法。如 HENRICK 等^[4]引入映射权函数对非线性权重进行修正,提出了 WENO-M 格式,该格式在极值点附近可以达到最佳精度,但是使用映射权函数极大地增加了计算消耗。BORGES 等^[5]通过定义全局光滑因子设计了一种新的 Z 型权重,提出了 WENO-Z 格式。该格式在极值点附近保持最佳精度且计算效率和 WENO-JS 相当。徐维铮等^[6]使用三阶 WENO 格式和二阶中心格式进行加权平均,设计了守恒型中心 WENO 混合格式。骆信等^[7]通过调整欠光滑子模板上的权重,进一步提高了格式的分辨率。HU 等^[8]基于自适应选择中心或迎风模板的策略,提出了自适应中心迎风 WENO-CU6 格式,该格式在光滑区域使用中心模板获得低耗散特性,在间断区域使用迎风格式保持数值稳定性。

HUANG 等^[9]改进了 WENO-CU6 格式,使用 1 个六点模板和 3 个三点模板进行重构,其中线性权重选取灵活 (为满足和为 1 的任意正数),同时还提出了一种新的光滑因子。ZHU 等^[10-11]利用 1 个五点模板和 2 个两点模板构造了 WENO-ZQ 格式和具有嵌套模板的多分辨率 WENO-ZS 格式。BALSARA 等^[12]基于 WENO-ZQ 格式的插值思想,设计了 WENO-AO 格式,其中光滑因子为完全平方和形式。

加权紧致非线性格式 (weighted compact nonlinear scheme, WCNS) 是求解 Euler 方程的另一种高精度高分辨率格式^[13-29]。邓小刚等^[13-15]在紧致非线性格式中引入非线性 WENO 插值思想,提出了 WCNS 格式,该格式具有高分辨率和强间断捕捉能力等特性。ZHANG 等^[16]和 NONOMURA 等^[17-18]对 WCNS 格式进行了拓展,将其精度推广到更高阶,并通过数值试验证明了格式的良好性能。NONOMURA 等^[17-18]证实了 WCNS 格式不仅很好地继承了 WENO 模式的优点,而且相比同阶经典的 WENO 格式具有 3 个优点:有更高的分辨率;适合各种形式的通量分裂格式;在曲线网格上具有出色的自由流和涡保持特性。DENG 等^[19]构造了混合节点和半节点的 WCNS 格式,并验证了该格式比同阶经典的 WCNS 格式模板更紧致,且在间断区域有更高的分辨率。涂国华等^[20]基于近似色散关系验证了 WCNS 格式与 WENO 格式具有更好的频谱特性。WONG 等^[21]提出了局部耗散型加权紧致格式 (WCNS-LD)。KAMIYA 等^[22-23]基于 WENO-CU 格式的自适应迎风思想,构造了具有自适应中心迎风特性的 WCNS-CU6-Z 格式和 EWCNS-CU4 格式。YAN 等^[24]提出了 WCNS 格式的 Y 型非线性权重,改善了格式的激波捕捉能力。SUBRAMANIAM 等^[25]对 WCNS 格式作了改进,设计了具有低色散的高阶格式。HIEJIMA^[26]借鉴 TENO 的思想设计了 WCNS-T 格式,该格式能够很好的捕捉到高频波和强激波。樊荣等^[27]设计了求解含源项浅水波方程的 WCNS 格式。JIANG 等^[28]提出了高阶精度半隐式 WCNS 格式,以避免显式 WCNS 格式严格的 CFL 稳定性限制,改善

了格式的计算效率。

本研究借鉴文献[12]中 WENO-AO 型插值思想,构造了混合三节点模板上低阶插值和全局五点模板上高阶插值的 WCNS-AO 格式,并用于求解 Euler 方程。WCNS-AO 空间离散格式结合了节点和半节点混合型六阶中心差分格式和基于特征投影方法的自适应阶非线性加权插值方法。为验证 WCNS-AO 格式的良好性能,结合高阶 TVD Runge-Kutta 时间离散方法^[3],将其用于求解一维和二维数值算例,并与经典的五阶 WCNS-Z 格式和五阶 WENO-AO 格式作对比。

1 数值方法

本节以一维 Euler 方程为例,给出五阶 WCNS-AO 格式的推导过程。对于高维情况,采用逐维方法可类似推导。一维 Euler 方程描述如下

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

式(2)采用均匀网格,即 $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N$, 其中 h 为网格尺寸, N 为网格数。方程的半离散形式为

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = -\mathbf{F}'_i \quad (3)$$

式中, $\mathbf{U}_i$ 和 $\mathbf{F}'_i$ 分别为节点 x_i 处未知量 $\mathbf{U}$ 和通量导数 $\partial \mathbf{F} / \partial x$ 的逼近。

1.1 六阶中心差分格式

基于经典的五阶 WCNS 格式,通量导数 $\mathbf{F}'_i$ 采用节点和半节点混合型中心差分格式计算^[20]。

$$\begin{aligned} & \alpha \mathbf{F}'_{i-1} + \mathbf{F}'_i + \alpha \mathbf{F}'_{i+1} \\ &= \frac{a}{h} (\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2} - \tilde{\mathbf{F}}_{i-1/2}) + \frac{b}{h} (\mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_{i-1}) + \\ & \quad \frac{c}{h} (\mathbf{F}_{i+2} - \mathbf{F}_{i-2}) \end{aligned} \quad (4)$$

式中,当参数 $\alpha \neq 0$ 时,格式被称为隐格式;反之被称为显格式。通过对式(4)进行 Taylor 展开,得到格式精度阶与 4 个系数 α, a, b, c 的关系式。通常情况下,隐格式和显格式对数值结果不会产生明显影响^[17]。显然,显格式不需要通过求解三对角线性方程得到通量导数逼近,比隐格式计算效率高,因此,本研究采用如下六阶显格式计算通量导数。

$$\mathbf{F}'_i = \frac{64}{45h} (\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2} - \tilde{\mathbf{F}}_{i-1/2}) - \frac{2}{9h} (\mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_{i-1}) +$$

$$\frac{1}{180h} (\mathbf{F}_{i+2} - \mathbf{F}_{i-2}) \quad (5)$$

式中, $\tilde{\mathbf{F}}_{i\pm 1/2}$ 表示半节点 $x_{i\pm 1/2}$ 处通量的数值逼近,通过特征投影处理的非线性加权插值方法得到。

1.2 特征投影方法

定义通量 $\mathbf{F}$ 的雅可比矩阵 $\mathbf{A}$ 为

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3-\gamma}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ \frac{\gamma-2}{2}u^3 & \frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{3-2\gamma}{2}u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中, $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ 表示声速。将雅可比矩阵 $\mathbf{A}$ 进行特征分解得到 $\mathbf{A} = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{L}$, 其中 $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[u-c, u, u+c]$ 为特征矩阵, $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{R}$ 分别是左、右特征向量矩阵,且

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{(\gamma-1)u^2 + 2cu}{4c^2} & \frac{-(\gamma-1)u-c}{2c^2} & \frac{\gamma-1}{2c^2} \\ \frac{2c^2 - (\gamma-1)u^2}{2c^2} & \frac{(\gamma-1)u}{c} & \frac{-(\gamma-1)}{c^2} \\ \frac{(\gamma-1)u^2 - 2cu}{4c^2} & \frac{-(\gamma-1)u+c}{2c^2} & \frac{\gamma-1}{2c^2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u-c & u & u+c \\ \frac{c^2}{\gamma-1} - \frac{u^2}{2} - uc & \frac{u^2}{2} & \frac{c^2}{\gamma-1} - \frac{u^2}{2} + uc \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中, $\lambda = \max_i \{|u+c|, |u-c|\}$ 为雅可比矩阵 $\mathbf{A}$ 的最大特征速度。

为了能够提高格式稳定性,采用 Lax-Friedrichs 分裂技术将各节点处通量 $\mathbf{F}_i$ 分裂为正通量 $\mathbf{F}_i^+$ 和负通量 $\mathbf{F}_i^-$ 。

$$\mathbf{F}_i^+ = (\mathbf{F}_i + \lambda \mathbf{U}_i) / 2,$$

$$\mathbf{F}_i^- = (\mathbf{F}_i - \lambda \mathbf{U}_i) / 2$$

式中, λ 为通量 $\mathbf{F}$ 的雅可比矩阵最大特征速度。以下仅给出由 $\mathbf{F}_i^+$ 推出 $\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}^+$ 的计算过程,而 $\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}^-$ 与之关于半节点 $x_{i+1/2}$ 镜像对称,计算过程类似,故不再赘述。同时为了推导更加简洁,省略上标“+”。半节点数值通量计算公式为 $\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}^+ + \tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}^-$ 。

为了能够很好地消除间断附近的非物理振荡,本研究采用特征投影处理的非线性加权插值。首先,将各节点处通量 $\mathbf{F}_i$ 投影到特征空间,得到特征

通量 $\mathbf{W}_i = \mathbf{L}_{i+1/2} \mathbf{F}_i$ 。在特征空间采用非线性加权插值方法求解数值特征通量 $\tilde{\mathbf{W}}_{i+1/2}$, 最后将其投影回原空间得到 $\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2} = \mathbf{R}_{i+1/2} \tilde{\mathbf{W}}_{i+1/2}$ 。半节点 $x_{i+1/2}$ 处左、右特征向量矩阵 $\mathbf{L}_{i+1/2}$ 和 $\mathbf{R}_{i+1/2}$ 由相邻两节点值的算术平均得到。

1.3 WCNS-AO 格式

为得到五阶精度 WCNS-AO 格式, 采用五点模板 $\mathbf{S} = [x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ 计算半节点 $x_{i+1/2}$ 处数值特征通量 $\tilde{\mathbf{W}}_{i+1/2}$ 。这里, 以 $\mathbf{W}$ 其中一个分量 w 为例给出 $\tilde{w}_{i+1/2}$ 的非线性加权插值过程, 其他分量类似计算。

基于模板 $\mathbf{S}$ 构造四次 Lagrange 插值多项式函数 $p(x)$, 计算得到五阶数值通量, 即

$$w_{i+1/2}^5 = \frac{1}{128} (3w_{i-2} - 20w_{i-1} + 90w_i + 60w_{i+1} - 5w_{i+2}) \quad (9)$$

上式也可以通过模板 $\mathbf{S}$ 的 3 个子模板上三阶数值通量通过线性加权得到。这里, 子模板定义为 $\mathbf{S}_k = [x_{i+k-2}, x_{i+k-1}, x_{i+k}]$, $k = 0, 1, 2$ 。基于 $\mathbf{S}_k$ 构造二次 Lagrange 插值多项式函数 $p_k(x)$, 计算得到三阶数值通量, 即

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{i+1/2,0}^3 &= \frac{1}{8} (3w_{i-2} + 10w_{i-1} + 15w_i), \\ \tilde{w}_{i+1/2,1}^3 &= \frac{1}{8} (-w_{i-1} + 6w_i + 3w_{i+1}), \\ \tilde{w}_{i+1/2,2}^3 &= \frac{1}{8} (3w_i + 6w_{i+1} - w_{i+2}) \end{aligned} \quad (10)$$

高阶数值通量 $\tilde{w}_{i+1/2}^5$ 可以表示为低阶数值通量 $\tilde{w}_{i+1/2,k}^3$ 的线性组合, 即

$$\tilde{w}_{i+1/2}^5 = d_0 \tilde{w}_{i+1/2,0}^3 + d_1 \tilde{w}_{i+1/2,1}^3 + d_2 \tilde{w}_{i+1/2,2}^3 \quad (11)$$

式中, 线性权重为 $d_0 = 1/16, d_1 = 10/16, d_2 = 5/16$ 。

为改善原有五阶 WCNS-Z 型格式在分辨率和激波捕捉方面的性能, 本研究基于 WENO-AO 型非线性插值思想^[12], 采用子模板上低阶插值和全局模板上高阶插值混合的非线性加权插值技术计算 $\tilde{w}_{i+1/2}$ 。将(9)式中数值通量 $\tilde{w}_{i+1/2}$ 的计算格式改写为

$$\tilde{w}_{i+1/2} = d_3 \left(\frac{1}{d_3} \tilde{w}_{i+1/2}^5 - \sum_{k=0}^2 \frac{d_k}{d_3} \tilde{w}_{i+1/2,k}^3 \right) + \sum_{k=0}^2 d_k \tilde{w}_{i+1/2,k}^3 \quad (12)$$

式中, d_k 为任意正数, 需要满足 $\sum_{k=0}^3 d_k = 1$ 。本研究

中取值, $d_0 = d_2 = (1 - \alpha)(1 - d_3)/2$, $d_1 = \alpha(1 - d_3)$, 其中 $\alpha = 0.95, d_3 = 0.95$ 。

使用线性权重虽然可以得到高阶格式, 但是在间断附近会产生数值振荡现象。为了解决这个问题, 引入 WENO 非线性插值思想, 即使用非线性权重代替线性权重, 使得在光滑区域达到高阶精度, 同时避免跨间断插值。文献[4-7]中给出了非线性权重的多种定义, 其中 Z 型权重 (即 WENO-Z 格式^[5]) 较受欢迎。为得到式(12)的非线性加权形式, 首先定义各模板的光滑因子。WCNS 格式采用插值型数值通量, 各模板光滑因子可以通过插值多项式各阶导数的完全平方和来定义^[14]。模板 $\mathbf{S}_k$ 的光滑因子 β_k 定义为 $\beta_k = (hp_k^{(')})^2 + (h^2 p_k^{('')})^2, k = 0, 1, 2$, 模板 $\mathbf{S}$ 的光滑因子 β_3 定义为

$$\beta_3 = (hp^{(')})^2 + (h^2 p^{('')})^2 + (h^3 p^{(3)})^2 + (h^4 p^{(4)})^2 \quad (13)$$

具体表达式为

$$\beta_0 = \frac{1}{4} (w_{i-2} - 4w_{i-1} + 3w_i)^2 + (w_{i-2} - 2w_{i-1} + w_i)^2,$$

$$\beta_1 = \frac{1}{4} (w_{i-1} - w_{i+1})^2 + (w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1})^2,$$

$$\beta_2 = \frac{1}{4} (3w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2})^2 + (w_i - 2w_{i+1} + w_{i+2})^2,$$

$$\beta_3 = \frac{1}{144} (w_{i-2} - 8w_{i-1} + 8w_{i+1} - w_{i+2}) +$$

$$\frac{1}{144} (-w_{i-2} + 16w_{i-1} - 20w_i + 16w_{i+1} - w_{i+2}) +$$

$$\frac{1}{4} (-w_{i-2} + 2w_{i-1} - 2w_{i+1} + w_{i+2}) +$$

$$(w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2})$$

全局光滑因子 τ 定义为

$$\tau = \frac{1}{3} (|\beta_3 - \beta_0| + |\beta_3 - \beta_1| + |\beta_3 - \beta_2|) \quad (14)$$

采用文献[5]中 Z 型权重计算非线性权重 ω_k , 则得到

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, \alpha_k = d_k \left[1 + \left(\frac{\tau}{\varepsilon + \beta_k} \right)^2 \right] \quad (15)$$

将式(12)中线性权重 d_k 修改为非线性权重 ω_k , 并结合式(12), 得到 WCNS-AO 格式, 其中数值通量 $\tilde{w}_{i+1/2}$ 的非线性插值格式为

$$\tilde{w}_{i+1/2} = \omega_3 \left(\frac{1}{d_3} \tilde{w}_{i+1/2}^5 - \sum_{k=0}^2 \frac{d_k}{d_3} \tilde{w}_{i+1/2,k}^3 \right) + \sum_{k=0}^2 \omega_k \tilde{w}_{i+1/2,k}^3 \quad (16)$$

将各光滑因子在点 x_i 处进行 Taylor 展开, 得到

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= h^2 w_i^{(')2} + h^4 (w_i^{(')2} - \frac{2}{3} w_i^{(')} w_i^{(3)}) + \\
&\quad h^5 \left(\frac{1}{2} w_i^{(')} w_i^{(4)} - 2 w_i^{(')} w_i^{(3)} \right) + O(h^6), \\
\beta_1 &= h^2 w_i^{(')2} + h^4 \left(w_i^{(')2} + \frac{1}{3} w_i^{(')} w_i^{(3)} \right) O(h^6), \\
\beta_2 &= h^2 w_i^{(')2} + h^4 \left(w_i^{(')2} - \frac{2}{3} w_i^{(')} w_i^{(3)} \right) - \\
&\quad h^5 \left(\frac{1}{2} w_i^{(')} w_i^{(4)} - 2 w_i^{(')} w_i^{(3)} \right) + O(h^6), \\
\beta_3 &= h^2 w_i^{(')2} + h^4 w_i^{(')2} + O(h^6)
\end{aligned} \quad (17)$$

当 $w_i' \neq 0$ 时,可以得到

$$\begin{aligned}
\beta_k &= h^2 w_i^{(')2} [1 + O(h^2)], \\
\tau &= O(h^4)
\end{aligned} \quad (18)$$

当 $w_i' = 0$ 时,可以得到

$$\begin{aligned}
\beta_k &= h^4 w_i^{(')2} [1 + O(h^2)], \\
\tau &= O(h^4)
\end{aligned} \quad (19)$$

将式(18)和式(19)式分别代入式(15)得到

$$\omega_k = d_k + O(h^4) \quad (20)$$

将非线性插值格式(16)改写为

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_{i+1/2} &= \tilde{w}_{i+1/2}^5 + \omega_3 \left(\frac{1}{d_3} \tilde{w}_{i+1/2}^5 - \sum_{k=0}^2 \frac{d_k}{d_3} \tilde{w}_{i+1/2,k}^3 \right) - \\
&\quad d_3 \left(\frac{1}{d_3} \tilde{w}_{i+1/2}^5 - \sum_{k=0}^2 \frac{d_k}{d_3} \tilde{w}_{i+1/2,k}^3 \right) + \\
&\quad \sum_{k=0}^2 \omega_k \tilde{w}_{i+1/2,k}^3 - \sum_{k=0}^2 d_k \tilde{w}_{i+1/2,k}^3 \\
&= w_{i+1/2} + A(h^5) + O(h^6) + \\
&\quad \frac{1}{d_3} (\omega_3 - d_3) [A(h^5) + O(h^6)] - \\
&\quad (\omega_3 - d_3) \sum_{k=0}^2 \frac{d_k}{d_3} [B_k(h^3) + O(h^4)] + \\
&\quad \sum_{k=0}^2 (\omega_k - d_k) [B_k(h^3) + O(h^4)]
\end{aligned} \quad (21)$$

式中, A, B_k 为常数。结合式(20)和式(21),可证明数值通量的非线性插值格式能达到五阶精度。

1.4 时间离散

采用 WCNS-AO 格式对 Euler 方程进行空间离散后,得到关于时间 t 的常微分方程

$$\frac{dU}{dt} = L(U) \quad (22)$$

式中, L 为方程空间离散化得到的算子。采用三阶显式 TVD Runge-Kutta 方法计算式(22),即

$$\begin{cases} U(1) = U^n + \Delta t L(U^n) \\ U(2) = \frac{3}{4} U^n + \frac{1}{4} U(1) + \frac{1}{4} \Delta t L[U(1)] \\ U(n+1) = \frac{1}{3} U^n + \frac{2}{3} U(2) + \frac{2}{3} \Delta t L[U(2)] \end{cases} \quad (23)$$

式中, Δt 为时间步长。

2 数值实验

本节通过几个数值实验验证五阶 WCNS-AO 格式的性能,并与五阶 WCNS 格式^[28]和五阶 WENO-AO 格式^[12]进行比较。

2.1 精度测试算例

考虑一维 Euler 方程,其初值条件设定为 $\rho(x, 0) = 2 + \sin[x - \sin(x)]$, $u = P = 1$ 。精确解为 $\rho(x, t) = 2 + \sin[(x - t) - \sin(x - t)]$ 。计算区域为 $[0, 2\pi]$, 终止计算时间为 $t = 2.0$ s。设置周期边界条件,同时为消除时间离散对空间精度阶的影响,时间步长设置为 $\Delta t = (\Delta x)^{5/3}$ 。表 1 给出了 WCNS-AO 格式和 WENO-AO 格式的 L_1 和 L_∞ 数值误差、精度阶和 CPU 运行时间 T_{CPU} 。由表 1 可知,对于该算例 WCNS-AO 格式比 WENO-AO 格式具有更好的收敛性,且在光滑区域能够达到五阶精度。

表 1 基于一维问题的数值误差、精度阶和 CPU 运行时间

Tab. 1 Numerical errors, convergence rates and CPU time for the 1D case

方法	N	L_1 范数	精度阶	L_∞ 范数	精度阶	T_{CPU}/s
WCNS-AO	20	2.32×10^{-2}	—	6.62×10^{-2}	—	0.156 250
	40	1.14×10^{-3}	4.35	4.21×10^{-3}	3.97	0.859 375
	60	1.60×10^{-4}	4.85	6.12×10^{-4}	4.76	2.203 125
	80	3.86×10^{-5}	4.93	1.48×10^{-4}	4.93	5.140 625
	100	1.28×10^{-5}	4.96	4.91×10^{-5}	4.95	9.781 250
WENO-AO	20	2.23×10^{-2}	—	6.66×10^{-2}	—	0.171 875
	40	1.21×10^{-3}	4.20	4.22×10^{-3}	3.98	0.750 000
	60	1.78×10^{-4}	4.73	6.12×10^{-4}	4.76	2.109 375
	80	4.53×10^{-5}	4.76	1.48×10^{-4}	4.92	5.109 375
	100	1.60×10^{-5}	4.68	5.91×10^{-5}	4.13	9.250 000

同时考虑二维 Euler 方程, 设定初值条件为 $\rho(x, y, 0) = 1 + 0.2 \sin(x + y)$, $u = v = P = 1$ 。精确解为 $\rho(x, y, 0) = 1 + 0.2 \sin(x + y - 2t)$ 。含周期边界的计算区域为 $[0, 2\pi]^2$, 终止计算时间为 $t = 2.0$ s。表 2 给出了 WCNS-AO 格式和 WENO-AO 格式的 L_1 和 L_∞ 数值误差、精度阶和 CPU 运行时间。由表 2 可

知, 2 种格式在光滑区域均达到了五阶精度, 同时 WCNS-AO 格式的数值误差比 WENO-AO 格式小。图 1 给出了 2 种格式的 L_1 误差与 CPU 时间关系图。由图可知, 基于一维问题时 2 种格式计算效率相当, 基于二维问题时 WCNS-AO 格式比 WENO-AO 格式计算效率略高。

表 2 基于二维问题的数值误差、精度阶和 CPU 运行时间

Tab. 2 Numerical errors, convergence rates and CPU time for the 2D case

方法	$M \times N$	L_1 范数	精度阶	L_∞ 范数	精度阶	T_{CPU}/s
WCNS-AO	40×40	6.02×10^{-6}	—	9.47×10^{-6}	—	40.937 500
	50×50	1.98×10^{-6}	5.10	3.11×10^{-6}	5.10	89.390 625
	60×60	7.96×10^{-7}	5.08	1.25×10^{-6}	5.08	177.640 625
	70×70	3.69×10^{-7}	5.07	5.79×10^{-7}	5.07	306.953 125
	80×80	1.89×10^{-7}	5.06	2.97×10^{-7}	5.06	486.968 750
WENO-AO	40×40	4.16×10^{-5}	—	6.98×10^{-5}	—	33.515 625
	50×50	1.36×10^{-5}	5.12	2.36×10^{-5}	4.69	73.859 375
	60×60	5.49×10^{-6}	5.08	9.78×10^{-6}	4.93	140.078 125
	70×70	2.54×10^{-6}	5.08	4.56×10^{-6}	5.02	236.703 125
	80×80	1.30×10^{-6}	5.07	2.34×10^{-6}	5.08	383.171 875

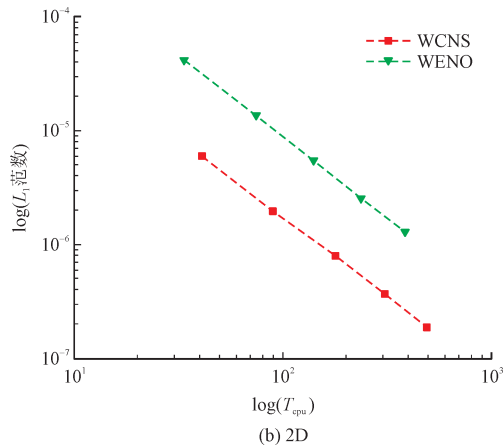
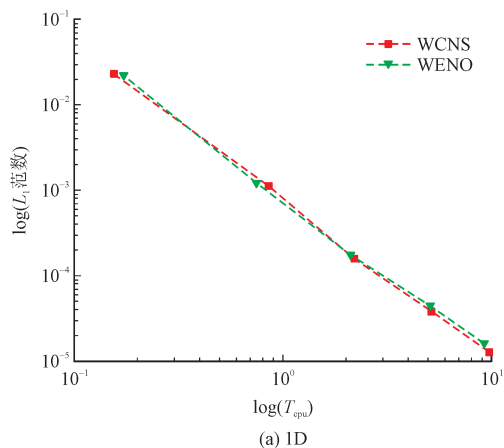


图 1 2 种格式的数值误差与 CPU 时间关系曲线图

Fig. 1 CPU time against numerical errors obtained with two schemes

2.2 Lax 问题

该问题为经典的一维 Riemann 问题, 初值含稀疏波和激波, 常用于检验所构造格式的激波捕捉能力。初始条件为

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (0.445, 0.698, 3.528), & -0.5 < x \leq 0 \\ (0.5, 0.0, 0.571), & 0 < x < 0.5 \end{cases} \quad (24)$$

计算区域为 $[-0.5, 0.5]$, 设置紧支边界条件。网格数量为 $N = 201$, 计算终止时间为 $t = 0.13$ s。图 2 给出了五阶 WCNS、WENO-AO、WCNS-AO 这 3 种格式的数值结果, 并与细网格 ($N = 5000$) 上得到的 WENO 数值结果 (参考解) 进行对比。

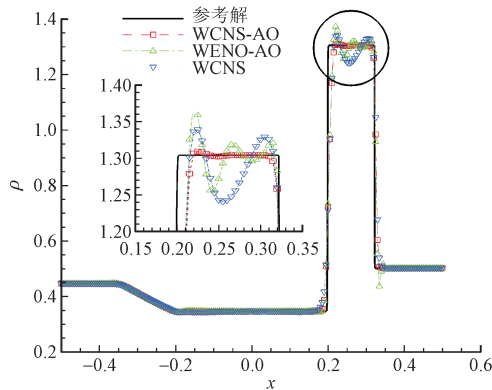


图 2 Lax 问题: 不同格式的数值解对比

Fig. 2 Lax problem: comparison of numerical solutions of different schemes

由图可知,WCNS 格式和 WENO-AO 格式在激波附近均产生了明显的数值振荡,而 WCNS-AO 格式表现最佳,能够很好地抑制振荡,具有更强的激波捕捉能力。

2.3 Sod 问题

该问题同样为经典的一维 Riemann 问题,常用于检验所构造格式的稳定性,其初始条件为

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1.0, 0.0, 1.0), & -0.5 < x \leq 0 \\ (0.125, 0.0, 0.1), & 0 < x < 0.5 \end{cases} \quad (25)$$

式中,计算区域为 $[-0.5, 0.5]$,设置紧支边界条件。网格数量为 $N=201$,计算终止时间为 $t=0.13$ s。图 3 给出了 3 种格式(WCNS, WENO-AO, WCNS-AO)的数值结果,并与参考解进行对比。数值结果表明 3 种格式都具有很好的稳定性,其中 WCNS-AO 格式激波捕捉能力表现最优,稳定性更好。

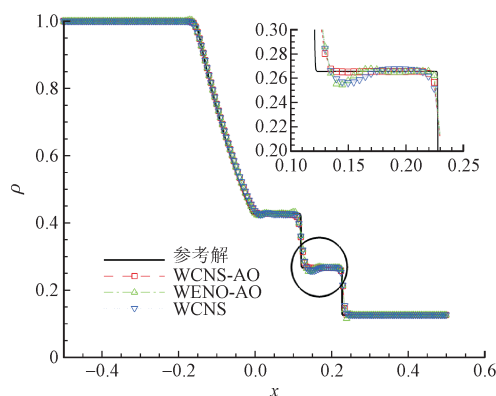


图 3 Sod 问题:不同格式的数值解对比

Fig. 3 Sod problem: comparison of numerical solutions of different schemes

2.4 Osher-Shu 问题

该问题的解具有高频振荡性质,常用于检验所构造格式的精度和耗散误差等,其初始条件为

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857143, 2.699369, 10.33333), & -5 < x \leq -4 \\ (1 + 0.2 \sin(5x), 0.0, 1.0), & -4 < x < 5 \end{cases} \quad (26)$$

式中,计算区域为 $[-0.5, 0.5]$,设置紧支边界条

件。网格数量为 201×201 ,计算终止时间为 $t=1.8$ s。图 4 给出了 3 种格式的数值结果,并与参考解进行对比。数值结果表明,相比同阶 WCNS 和 WENO-AO 格式,WCNS-AO 格式在声波和熵波交界处表现更好,对高频波捕捉能力更强,分辨率更高。

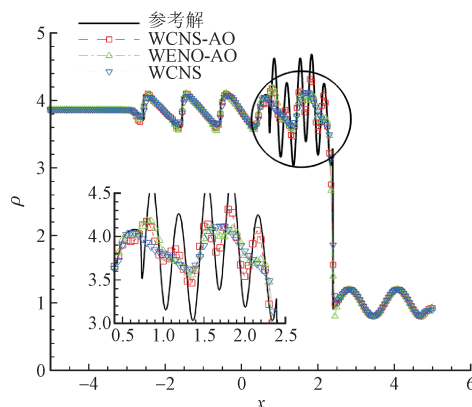


图 4 Osher-Shu 问题:不同格式的数值解对比

Fig. 4 Osher-Shu problem: comparison of numerical solutions of different schemes

2.5 二维 Riemann 问题

该问题包含了很多流场结构,能够更好地检验所构造格式的稳定性、耗散性、分辨率和激波捕捉能力等。在计算区域 $[0, 1]^2$ 上,考虑初值条件如下^[7]

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1.5, 0.0, 0.0, 1.5), & x \geq 0.8, y \geq 0.8 \\ (0.5323, 1.203, 0.0, 0.3), & x < 0.8, y \geq 0.8 \\ (0.138, 1.206, 1.206, 0.029), & x < 0.8, y < 0.8 \\ (0.5323, 0.0, 1.206, 0.3), & x \geq 0.8, y < 0.8 \end{cases} \quad (27)$$

式中,选择 Dirichlet 边界条件,网格数量为 401×401 ,计算终止时间为 $t=0.8$ s。

图 5 给出了 3 种格式的密度分布结果,其中 30 条密度等值线从 0.1 至 1.8。由图可知,3 种格式均能捕捉到大部分的旋涡结构。同时,相比 WCNS 格式和 WENO-AO 格式,WCNS-AO 格式表现更好,可以捕捉到更加细小的旋涡结构,耗散性和分辨率更优。

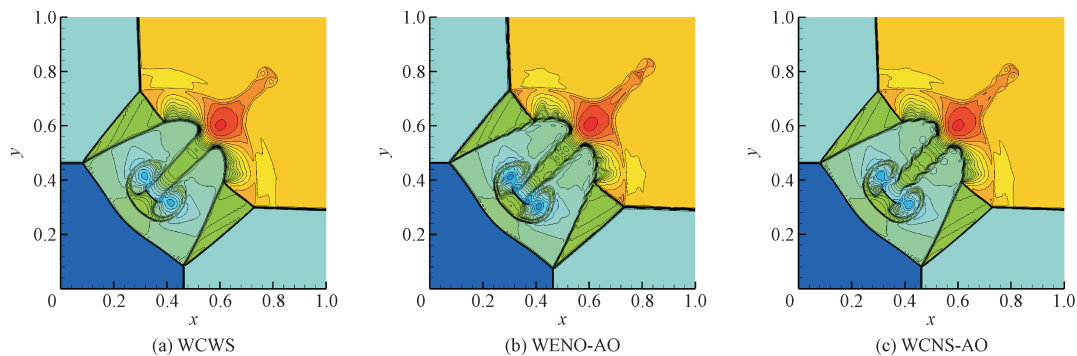


图5 二维 Riemann 问题的数值解对比

Fig. 5 Two-dimensional Riemann problem: comparison of numerical solutions of different schemes

2.6 双 Mach 反射问题

该问题描述了一道 Mach 数 10 的斜激波以 60° 角撞击无黏壁面,由此引起含激波反射和旋涡结构的复杂流动现象。该算例常用作检验所构造格式捕捉激波和小尺度结构能力。计算区域为 $[0, 3] \times [0, 1]$, 初始条件如下^[30]

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (8.0, 8.25 \cos(\frac{\pi}{6}), -8.25 \sin(\frac{\pi}{6}), 116.5), \\ 0 < x \leq \frac{1}{6} + \frac{y}{\sqrt{3}} \\ (1.4, 0.0, 0.0, 1.0), & \frac{1}{6} + \frac{y}{\sqrt{3}} < x < 1 \end{cases} \quad (28)$$

左侧和底部部分 ($0 < x \leq 1/6$) 设置入口边界条件;底部部分 ($x > 1/6$) 设置反射边界条件;右侧设置出口边界条件;顶部设置精确解。网格数量为 961×241 , 计算终止时间为 $t = 0.2$ s。

图6给出了3种格式的密度分布结果,30条密度等值线从1.4至21.671 1。由图6可知,3种格式均能捕捉到流场中的激波信息。相比WCNS格式和WENO-AO格式,WCNS-AO格式在涡卷起区域能捕捉到更精细的旋涡结构,具有更小的数值耗散和更好的分辨率。

2.7 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题

该问题是由2种不同密度的流体在界面处引发的不稳定现象。计算区域为 $[0, 0.25] \times [0, 1]$ 。初值条件为^[31]

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (2.0, 0.0, -0.025 \cos(8\pi x), 2y + 1), \\ 0 < y \leq 0.5 \\ (1.0, 0.0, -0.025 \cos(8\pi x), y + 1.5), \\ 0.5 < y < 1 \end{cases} \quad (29)$$

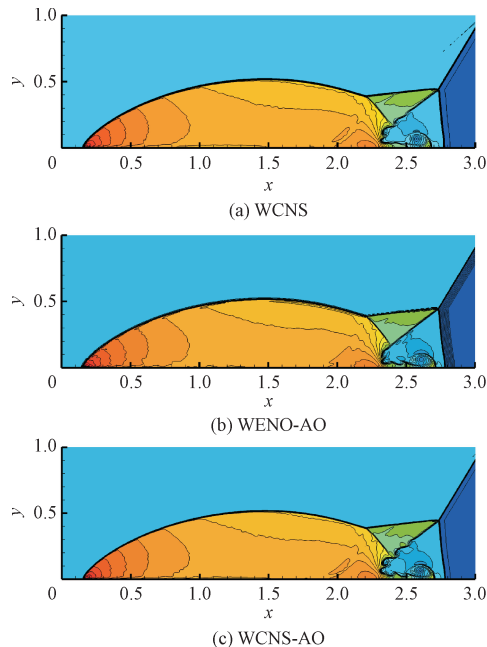


图6 双 Mach 反射问题的数值解对比

Fig. 6 Double Mach reflection problem: comparison of numerical solutions of different schemes

本例中比热比 $\gamma = 5/3$, 左、右边界设置反射边界条件,顶部设置为 $(\rho, u, v, p) = (1.0, 0.0, 0.0, 2.5)$, 底部设置为 $(\rho, u, v, p) = (2.0, 0.0, 0.0, 1.0)$ 。网格数量为 241×961 , 计算终止时间为 $t = 1.95$ s。图7给出了3种格式的密度分布结果。由图7可知,相比于WCNS格式,WCNS-AO格式表现更优,能够捕捉到密度界面由RT不稳定性所诱发的小涡旋。此例中,WENO-AO格式比WCNS-AO格

式计算结果略好,数值耗散最小。

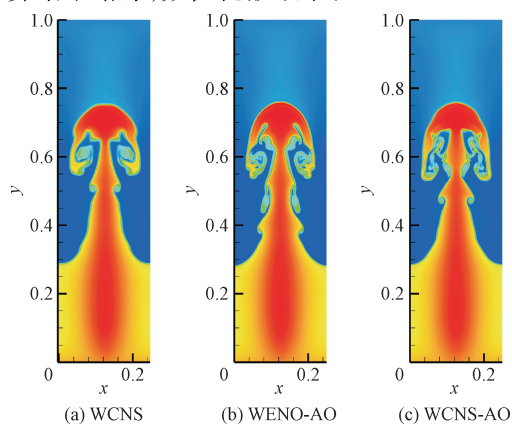


图7 R-T 不稳定性问题的数值解对比

Fig. 7 Rayleigh-Taylor instability problem: comparison of numerical solutions of different schemes

3 结 论

本研究针对 Euler 方程构造了基于自适应阶插值法的 WCNS-AO 格式。该格式结合了计算单元节点处通量空间导数的节点和半节点混合型六阶中心差分格式和计算半节点处数值通量的具有自适应阶的非线性插值方法计算。WCNS-AO 格式中采用通量分裂技术和特征投影处理,以提高格式稳定性和很好地消除间断附近的非物理振荡。结合三阶 TVD 型 Runge-Kutta 时间离散方法,将新设计的五阶 WCNS-AO 格式和经典的五阶 WCNS 格式、五阶 WENO-AO 格式分别用于求解一维和二维 Euler 方程。数值结果表明,WCNS-AO 格式在光滑区域能够达到设计五阶精度,其计算效率比 WENO-AO 格式略高。一维 Lax 等算例验证了 WCNS-AO 格式相比同阶 WCNS 格式和 WENO-AO 格式,激波捕捉能力表现最优,稳定性更好。二维 Riemann 问题和双马赫反射问题验证了 WCNS-AO 格式相比 WCNS 格式和 WENO-AO 格式表现更优,能捕捉到更精细的流场结构,具有更小的数值耗散和更好的分辨率。RT 不稳定性问题中,WENO-AO 格式表现比 WCNS-AO 格式略好,但 WCNS-AO 格式比 WCNS 格式表现更好,因此改善了原来格式的耗散特性。

参考文献:

- [1] LIU X D, OSHER S, CHAN T. Weighted essentially non-oscillatory schemes[J]. Journal of computational physics, 1994, 115(1): 200-212.
- [2] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes[J]. Journal of computational physics, 1988, 77(2): 439-471.
- [3] JIANG G S, SHU C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. Journal of computational physics, 1996, 126(1): 202-228.
- [4] HENRICK A K, ASLAM T D, POWERS J M. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: achieving optimal order near critical points[J]. Journal of computational physics, 2005, 207(2): 542-567.
- [5] BORGES R, CARMONA M, COSTA B, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws[J]. Journal of computational physics, 2008, 227(6): 3191-3211.
- [6] 徐维铮, 孔祥韶, 郑成, 等. 一种改进的中心-WENO 混合格式[J]. 应用力学学报, 2017, 34(6): 1115-1119.
- [7] XU Weizheng, KONG Xiangshao, ZHENG Cheng, et al. An improved hybrid central-WENO scheme[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2017, 34(6): 1115-1119 (in Chinese).
- [8] 骆信, 吴颂平. 改进的五阶 WENO-Z + 格式[J]. 力学学报, 2019, 51(6): 1927-1939.
- [9] LUO Xin, WU Songping. An improved fifth-order WENO-Z + scheme[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics, 2019, 51(6): 1927-1939 (in Chinese).
- [10] HU X Y, WANG Q, ADAMS N A. An adaptive central-upwind weighted essentially non-oscillatory scheme[J]. Journal of computational physics, 2010, 229(23): 8952-8965.
- [11] HUANG C, CHEN L L. A new adaptively central-upwind sixth-order WENO scheme[J]. Journal of computational physics, 2018, 357: 1-15.
- [12] ZHU J, QIU J X. A new fifth order finite difference WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws[J]. Journal of computational physics, 2016, 318: 110-121.
- [13] ZHU J, SHU C W. A new type of multi-resolution WENO schemes with increasingly higher order of accuracy[J]. Journal of computational physics, 2018, 375: 659-683.
- [14] BALSARA D S, GARAIN S, SHU C W. An efficient class of WENO schemes with adaptive order[J]. Journal of computational physics, 2016, 326: 780-804.
- [15] DENG X G, ZHANG H X. Developing high-order weighted compact nonlinear schemes[J]. Journal of computational physics, 2000, 165(1): 22-44.
- [16] 邓小刚. 高阶精度耗散加权紧致非线性格式[J]. 中国科学(A辑), 2001, 31(12): 1104-1117.
- [17] DENG Xiaogang. High-order dissipative weighted compact nonlinear scheme[J]. Science in China (series A), 2001, 31(12): 1104-1117 (in Chinese).
- [18] DENG X G, MAEKAWA H. Compact high-order accurate nonlinear schemes[J]. Journal of computational physics, 1997, 130(1): 77-91.
- [19] ZHANG S H, JIANG S F, SHU C W. Development of nonlinear weighted compact schemes with increasingly higher order accuracy[J]. Journal of computational physics, 2008, 227(15): 7294-

- 7321.
- [17] NONOMURA T, FUJII K. Effects of difference scheme type in high-order weighted compact nonlinear schemes[J]. Journal of computational physics, 2009, 228(10): 3533-3539.
- [18] NONOMURA T, FUJII K. Robust explicit formulation of weighted compact nonlinear scheme[J]. Computers & fluids, 2013, 85: 8-18.
- [19] DENG X G, JIANG Y, MAO M L, et al. A family of hybrid cell-edge and cell-node dissipative compact schemes satisfying geometric conservation law[J]. Computers & fluids, 2015, 116: 29-45.
- [20] 涂国华, 邓小刚, 毛枚良. 5 阶非线性 WCNS 和 WENO 差分格式频谱特性比较[J]. 空气动力学学报, 2012, 30(6): 709-712.
- TU Guohua, DENG Xiaogang, MAO Meiliang. Spectral property comparison of fifth-order nonlinear WCNS and WENO difference schemes[J]. Acta aerodynamica Sinica, 2012, 30(6): 709-712 (in Chinese).
- [21] WONG M L, LELE S K. High-order localized dissipation weighted compact nonlinear scheme for shock- and interface-capturing in compressible flows[J]. Journal of computational physics, 2017, 339: 179-209.
- [22] KAMIYA T, ASAHARA M, NONOMURA T. Application of central differencing and low-dissipation weights in a weighted compact nonlinear scheme[J]. International journal for numerical methods in fluids, 2017, 84(3): 152-180.
- [23] ZHAO G Y, SUN M B, XIE S B, et al. Numerical dissipation control in an adaptive WCNS with a new smoothness indicator[J]. Applied mathematics and computation, 2018, 330: 239-253.
- [24] YAN Z G, LIU H Y, MA Y K, et al. Further improvement of weighted compact nonlinear scheme using compact nonlinear interpolation[J]. Computers & fluids, 2017, 156: 135-145.
- [25] SUBRAMANIAM A, WONG M L, LELE S K. A high-order weighted compact high resolution scheme with boundary closures for compressible turbulent flows with shocks[J]. Journal of computational physics, 2019, 397: 108822.
- [26] HIEJIMA T. A high-order weighted compact nonlinear scheme for compressible flows[J]. Computers & fluids, 2022, 232: 105199.
- [27] 樊荣, 陈勋, 郑克龙, 等. 浅水波方程的高精度隐式 WCNS 格式[J]. 应用力学学报, 2021, 38(4): 1477-1484.
- FAN Rong, CHEN Xun, ZHENG Kelong, et al. High order implicit WCNS scheme for the shallow water equations[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2021, 38(4): 1477-1484 (in Chinese).
- [28] JIANG Y Q, ZHOU S G, ZHANG X, et al. High order all-speed semi-implicit weighted compact nonlinear scheme for the isentropic Navier - Stokes equations[J]. Journal of computational and applied mathematics, 2022, 411: 114272.
- [29] 胡迎港, 蒋艳群, 黄晓倩. 非稳态 Hamilton-Jacobi 方程的 7 阶加权紧致非线性格式[J]. 力学学报, 2022, 54(11): 3203-3214.
- HU Yinggang, JIANG Yanqun, HUANG Xiaolian. High order weight compact nonlinear scheme for time-dependent Hamilton-Jacobi equations[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics, 2022, 54(11): 3203-3214 (in Chinese).
- [30] WOODWARD P, COLELLA P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks[J]. Journal of computational physics, 1984, 54(1): 115-173.
- [31] SHI J, ZHANG Y T, SHU C W. Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures[J]. Journal of computational physics, 2003, 186(2): 690-696.

(编辑 吕茵)