doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024031

非紧致度量空间上的持久性

柳佳慧，董美花
（延边大学 理学院，吉林 延吉 133002）

摘要：考虑非紧致度量空间上同胚的持久性问题，利用同胚的持久性、等度连续性、强拓扑稳定性、持久跟踪性等定义，证明：等度连续且拓扑稳定的同胚是持久的；同胚有持久跟踪性当且仅当该同胚是持久的且有伪轨跟踪性；有持久跟踪性的可扩同胚是强拓扑稳定的.

关键词：持久性；等度连续性；强拓扑稳定性；持久跟踪性；非紧致度量空间
中图分类号：O189.11 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2024)05-1022-05

Persistence on Noncompact Metric Spaces

LIU Jiahui, DONG Meihua
(*College of Science, Yanbian University, Yanji* 133002, *Jilin Province, China*)

Abstract: We considered the persistence problem of homeomorphism on noncompact metric spaces. By using the definitions of persistence, equicontinuity, strongly topological stability, and persistent shadowing property of homeomorphisms, we prove that homeomorphisms that are equicontinuity and topologically stable are persistent, homeomorphisms have persistent shadowing properties if and only if they are persistent and have pseudoorbital shadowing properties, and an expansive homeomorphism with persistent shadowing property is strongly topologically stable.

Keywords: persistence; equicontinuity; strongly topological stability; persistent shadowing property; noncompact metric space

如果一个动力系统的同胚的每个轨道都可以被该系统中其他同胚经过足够小扰动的一些真轨跟踪，则该同胚就是持久的. 目前，关于持久性的研究已得到了很多结果[1-12]. Lewowicz[1]首次提出了持久性动力系统的概念，并证明了每个具有稠密双曲周期点(包括伪 Anosov 映射)的二维或三维可扩同胚都是持久的. 持久性包括 β-持久性和 α-持久性[8-9]，本文主要讨论 β-持久性. Sakai 等[2]研究表明，紧致度量空间上的移位映射是拓扑稳定的，但不是持久的，而紧致流形上的每个拓扑稳定同胚是持久的. 表明相比于拓扑稳定性，它是一种更弱的稳定性. 但持久性不能推出拓扑稳定性，因为伪 Anosov 映射是持久的但不是拓扑稳定的. 而在螺线群的群自同构中二者是等价的. Dong 等[3]证明了在紧致度量空间上，每个等度连续且逐点拓扑稳定[11]的同胚都是持久的. Khan 等[7]给出了上述性质的另一种证明方法，并且验证了紧致度量空间上关于等度连续同胚且逐点强拓扑稳定的 Borel 概率测度是强持久的. Kawaguchi[4]提出了强拓扑稳定性的概念. Jung 等[5]引入了持久跟踪性的概念，证明了紧致度量空间上每个同胚具有持久跟踪性当且仅当它具有伪轨跟踪性且是持久的，并证明了紧致度量空间的每个强拓扑稳定同胚都是持久的. Lee 等[6]提出了非紧致度量空间上同胚的可扩性、伪轨跟踪

收稿日期：2024-01-25.

第一作者简介：柳佳慧(1998—)，女，汉族，硕士研究生，从事拓扑动力系统的研究，E-mail：jiahuiliu0815@163.com. **通信作者简介**：董美花(1982—)，女，朝鲜族，博士，副教授，从事拓扑动力系统的研究，E-mail：sxdmh@ybu.edu.cn.

基金项目：国家自然科学基金(批准号：12201541).

性和拓扑稳定性等概念，并将紧致度量空间中的 Walters 稳定性定理和 Smale 的谱分解定理延伸到了非紧致度量空间中. 受上述研究的启发，本文将上述在紧致度量空间中的相关结论扩展到非紧致度量空间中.

1　预备知识

设 X 是紧致度量空间，f 是 X 上的自同胚，d 是 X 上的一个度量，对任意的 $z\in X$，定义任意两个映射之间的 C_0 距离为这两个映射在 $z\in X$ 处函数值的距离的上确界，即 $d_{C_0}(f,g)=\sup\limits_{z\in X}d(f(z),g(z))$. 如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对 X 上满足 $d_{C_0}(f,g)<\delta$ 的任意自同胚 g，有对任意的 $x\in X$，存在 $y\in X$，使得 $d(f^n(x),g^n(y))<\varepsilon$ 对任意的 $n\in\mathbb{Z}$ 成立，则称 f 是持久的[1-2]. 如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意的 $x,y\in X$，当 $d(x,y)\leqslant\delta$ 时，有对任意的 $n\in\mathbb{Z}$，使得 $d(f^n(x),f^n(y))\leqslant\varepsilon$，则称 f 是等度连续的[3]. 如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意的同胚 g：$X\to X$，满足 $d_{C_0}(f,g)<\delta$，并且存在 X 上的一个连续满射 h，有 $f\circ h=h\circ g$ 且 $d(h(z),\mathrm{Id}(z))<\varepsilon$($\mathrm{Id}$ 表示恒等映射)，则称 f 是强拓扑稳定的[4]. 如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意满足 $d_{C_0}(f,g)<\delta$ 的自同胚 g 的任意 δ-伪轨 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$（其中 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 X 中的任意序列，且满足 $d(g(x_n),x_{n+1})<\delta$）能被 (g,ε) 跟踪，即对任意 g 的 δ-伪轨 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，存在 $y\in X$，使得 $d(g^n(y),x_n)<\varepsilon$，则称 f 具有持久跟踪性[5].

注意到上述定义在紧致度量空间中不依赖于度量的选择，但如果将研究的范围拓展到非紧致度量空间上将会受度量选取的影响. 文献[6]中的例 2.2 和例 2.3 表明，经典度量空间中的可扩性、伪轨跟踪性以及拓扑稳定性的定义，如果使用到非紧致度量空间中将与度量的选取有关. 为使上述定义不依赖于度量的选取，下面引入非紧致度量空间上相对应的概念. 用 $C_+(X)$ 表示从 X 到 $(0,\infty)$ 上的连续函数集合. 设 X 表示非紧致度量空间，f 是 X 上的自同胚，d 是非紧致度量空间 X 上的一个度量，$\mathbb{Z}$ 表示整数集，$\mathbb{N}$ 表示自然数集，$\mathbb{R}$ 表示实数集.

定义 1　如果对任意的 $\varepsilon\in C_+(X)$，存在 $\delta\in C_+(X)$，使得对任意的 $x\in X$ 和满足 $d(f(x),g(x))<\delta(f(x))$ 的任意自同胚 g：$X\to X$，有对任意的 $n\in\mathbb{Z}$，存在 $y\in X$，使得 $d(f^n(x),g^n(y))<\varepsilon(f^n(x))$ 成立，则称 f 是持久的.

定义 2　如果对任意的 $\varepsilon\in C_+(X)$，存在 $\delta\in C_+(X)$，使得对任意的 $x,y\in X$，当 $d(x,y)\leqslant\delta(x)$ 时，对任意的 $n\in\mathbb{Z}$，有 $d(f^n(x),f^n(y))\leqslant\varepsilon(f^n(x))$，则称 f 是等度连续的.

注 1　非紧致度量空间上同胚 f 的持久性和等度连续性都是动力学性质，并且不依赖于度量的选取.

定义 3　如果对任意的 $\varepsilon\in C_+(X)$，存在 $\delta\in C_+(X)$，使得对 X 上的任意的自同胚 g，满足对任意的 $x\in X$，有 $d(f(x),g(x))<\delta(f(x))$，并且存在 X 上的一个连续满射 h，使得对任意的 $z\in X$，有 $d(h(z),\mathrm{Id}(z))<\varepsilon(h(z))$ 且 $f\circ h=h\circ g$，则称 f 是强拓扑稳定的.

定义 4　如果对任意的 $\varepsilon\in C_+(X)$，存在 $\delta\in C_+(X)$，使得对任意的 $z\in X$，满足 $d(f(z),g(z))<\delta(f(z))$ 的任意同胚 g：$X\to X$，其任意的 δ-伪轨能被 (g,ε) 跟踪，即对任意 g 的 δ-伪轨 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，当 $d(g(x_n),x_{n+1})<\delta(g(x_n))$ 时，存在 $y\in X$，使得 $d(g^n(y),x_n)<\varepsilon(g^n(y))$ 成立，则称 f 具有持久跟踪性.

下面介绍非紧致度量空间同胚的可扩性、拓扑稳定性和伪轨跟踪性的概念. 对于非紧致度量空间 X，其度量为 d，f 是 X 上的自同胚，存在一个可扩函数 $e\in C_+(X)$ 及一个整数 n，使得对任意的 $x\neq y\in X$，有 $d(f^n(x),f^n(y))>e(f^n(x))$，即当 $d(f^n(x),f^n(y))\leqslant e(f^n(x))$ 时，对任意的 $n\in\mathbb{Z}$，有 $x=y$，则称 f 是可扩的. 如果对任意的 $\varepsilon\in C_+(X)$，存在 $\delta\in C_+(X)$，使得对 X 上的任意的自同胚 g，满足对任意的 $x\in X$，有 $d(f(x),g(x))<\delta(f(x))$，并且存在 X 上的一个连续映射 h：$X\to X$，满足 $d(h(z),\mathrm{Id}(z))<\varepsilon(h(z))$，$\forall z\in X$ 且 $f\circ h=h\circ g$，则称 f 是拓扑稳定的. 如果对任意的 $\varepsilon\in C_+(X)$，存在 $\delta\in C_+(X)$，使得对同胚 f 的任意 δ-伪轨，存在一个点 $x\in X$，使得该点 ε 跟踪 δ-伪轨，则称 f 具有伪轨跟踪性[6].

注 2 显然由定义易知，非紧致度量空间上同胚具有强拓扑稳定性可推出拓扑稳定性；持久跟踪性可推出伪轨跟踪性(只需在定义 4 中取 $g=f$ 即可).

下面根据文献[6]的例 2.3 说明上述持久跟踪性定义的合理性(如果直接沿用紧致度量空间的相关定义到非紧致度量空间上，会发现定义存在不合理之处).

例 1 设 $T:\mathbb{R}\to S^1\setminus\{(0,1)\}$是一个映射，对任意的 $x\in\mathbb{R}$，满足 $T(x)=\left(\frac{2x}{1+x^2},\frac{x^2}{1+x^2}\right)$，并且 $X=T(\mathbb{Z})$. 假设 d 是 X 上的离散度量，d'是 X 上由 S^1 所诱导的 Riemann 度量. 易知 d 和d'在 X 上诱导出相同的拓扑. 考虑 X 上的自同胚 f，满足 $f(a_i)=a_{i+1}$，其中 $a_i=T(i)$，$i\in\mathbb{Z}$. 由于度量 d 是离散的，易证同胚 f 关于 d 具有持久跟踪性，但同胚 f 关于 d'不具有持久跟踪性.

下面利用反证法进行证明. 即假设同胚 f 关于d'具有持久跟踪性，则同胚 f 关于d'具有伪轨跟踪性. 由同胚 f 的伪轨跟踪性知，对 $\varepsilon=1/2$，存在 $\delta>0$，使得 $d'(a_k,a_{-k})<\delta/2$，其中 $k\in\mathbb{N}$. 再考虑一个同胚 $g:X\to X$，

$$g(a_i)=\begin{cases}a_{i+1}, & i=-k,\cdots,k-1,\\ a_{-k}, & i=k,\\ a_i, & \text{其他},\end{cases}\tag{1}$$

所以对任意的 $x\in X$，有 $d'(f(x),g(x))<\delta$，从而存在 $z\in X$，使得 $d'(f^n(z),g^n(x))<\varepsilon$. 由于 $\{g^n(y),\ n\in\mathbb{Z},\ y\in X\}=X$，所以可找到一个整数 $n\in\mathbb{Z}$，使得 $d'(f^n(z),g^n(y))\geqslant\varepsilon$，矛盾. 因此，同胚$f$ 关于 d 具有持久跟踪性，但关于 d'不具有持久跟踪性.

2 主要结果

引理 1[6] 对任意的连续函数 $\alpha\in C_+(X)$，存在 $\beta\in C_+(X)$，使得对任意的 $x\in X$，总有 $\beta(x)<\inf\{\alpha(y)\mid y\in B(x,\beta(x))\}$(其中 $B(x,\beta(x))$表示以为 x 中心、$\beta(x)$为半径的邻域). 则对任意的 $x,y\in X$，当 $d(x,y)<\max\{\beta(x),\beta(y)\}$时，有 $d(x,y)<\alpha(x)$.

文献[3]和文献[7]证明了紧致度量空间上，每个等度连续且逐点拓扑稳定的同胚都是持久的. 文献[8]讨论了持久跟踪性在有限生成群作用下的有关性质. 本文考虑在非紧致度量空间上上述结论是否仍成立.

定理 1 非紧致度量空间上等度连续且拓扑稳定的同胚是持久的.

证明：设 $f:X\to X$ 是非紧致度量空间上的等度连续且拓扑稳定的同胚，对任意的$\varepsilon\in C_+(X)$及任意的 $x\in X$，存在 $\gamma\in C_+(X)$，使得 $\gamma(x)<\inf\{\varepsilon(z)\mid z\in B(x,\gamma(x))\}$. 根据 f 的等度连续性知，对$\gamma/4$，存在 $\varepsilon'\in C_+(X)$，使得 $\varepsilon'(x)<\inf\left\{\frac{\gamma}{4}(z)\mid z\in B(x,\gamma(x))\right\}$. 再由 f 的拓扑稳定性知，对上述$\varepsilon'\in C_+(X)$，存在 $\delta'\in C_+(X)$，使得对非紧致度量空间 X 上任意的自同胚 g，满足 $d(f(x),g(x))<\delta'(f(x))$，则存在一个连续映射 $h:X\to X$，使得 $d(h(x),\mathrm{Id}(x))<\varepsilon'(h(x))$且 $f\circ h=h\circ g$，于是由 f 的等度连续性，有 $d(f^n(h(x)),f^n(x))<\frac{\gamma}{4}(f^n(h(x)))$，所以 $d(f^n(h(x)),f^n(x))<\gamma(f^n(x))$. 因此，对任意的 $x\in X$，存在 $y=x\in X$，使得对任意的 $n\in\mathbb{Z}$，有

$$\begin{aligned}d(f^n(x),g^n(y))=d(f^n(x),g^n(x))&\leqslant d(f^n(x),f^n(h(x)))+d(f^n(h(x)),g^n(x))<\\ &\frac{\gamma(f^n(x))}{4}+d(h(g^n(x)),g^n(x))<\frac{\gamma(f^n(x))}{4}+\varepsilon'(h(g^n(x)))<\\ &\frac{\gamma(f^n(x))}{4}+\frac{\gamma(g^n(x))}{4}<\max\{\gamma(f^n(x)),\gamma(g^n(x))\}<\varepsilon(f^n(x)).\end{aligned}\tag{2}$$

故 f 是持久的.

文献[2]中的例 1 表明，紧致度量空间上的移位映射是拓扑稳定但不是持久的. 所以定理 1 的逆命题并不成立.

引理 2 非紧致度量空间上具有持久跟踪性的同胚都是持久的.

证明：设 X 是非紧致度量空间，同胚 $f: X\to X$ 具有持久跟踪性. 对任意的 $\varepsilon\in C_+(X)$，由 f 的持久跟踪性，设 $\varepsilon'\in C_+(X)$，满足 $\varepsilon'(u)<\inf\{\varepsilon(v)\mid v\in B(u,\varepsilon'(u))\}$，则存在 $\delta\in C_+(X)$. 固定 $x\in X$，任取同胚 $h: X\to X$，则对任意的 $z\in X$，满足 $d(f(z),g(z))<\delta(f(z))$. 由于对任意的 $n\in\mathbb{Z}$，

$$d(g(f^n(x)),f^{n+1}(x))=d(g(f^n(x)),f(f^n(x)))<\delta(g(f^n(x))),$$

可知 $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是过点 x 的 g 的一个 δ-伪轨. 根据 f 的持久跟踪性知，存在 $y\in X$，使得 $d(g^n(y),f^n(x))<\varepsilon'(g^n(y))$. 所以 $\forall n\in\mathbb{Z}$，$d(f^n(x),g^n(y))<\varepsilon(f^n(x))$. 因此，$f$ 是持久的.

下面讨论在伪轨跟踪性的条件下，非紧致度量空间上的持久同胚具有持久跟踪性.

定理 2　非紧致度量空间上具有伪轨跟踪性的持久性同胚具有持久跟踪性.

证明：设 X 是非紧致度量空间，同胚 $f: X\to X$ 是具有伪轨跟踪性的持久性同胚. 对任意的 $\varepsilon\in C_+(X)$，存在 $\delta\in C_+(X)$. 由 f 的伪轨跟踪性，对 $\varepsilon/2$，存在 $\delta'\in C_+(X)$. 设 $\gamma\in C_+(X)$，使得对任意的 $x\in X$，有 $\gamma(x)<\inf\{\delta'(m)\mid m\in B(x,\gamma(x))\}$，并令 $\delta<\gamma/4$. 根据 f 的持久性，对上述 $\delta'\in C_+(X)$，取任意的 $\varepsilon'<\frac{\varepsilon}{2}$，并设 $\alpha\in C_+(X)$，使得对任意的 $x\in X$，有 $\alpha(x)<\inf\{\varepsilon(l)\mid l\in B(x,\alpha(x))\}$，且满足 $\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\alpha}{4}$. 对非紧致度量空间 X 上任意的自同胚 g，满足 $d(f(x),g(x))<\delta(f(x))$，并且 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是通过点 x 的 g 的一个 δ-伪轨. 由于

$$\begin{aligned}d(f(x_n),x_{n+1})&\leqslant d(f(x_n),g(x_n))+d(g(x_n),x_{n+1})<\delta(f(x_n))+\delta(g(x_n))<\\&\frac{\gamma(f(x_n))}{4}+\frac{\gamma(g(x_n))}{4}<\\&\max\{\gamma(f(x_n)),\gamma(g(x_n))\}<\delta'(f(x_n)),\quad\forall n\in\mathbb{Z},\end{aligned}\tag{3}$$

即 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 f 的一个 δ'-伪轨，所以存在 $x'\in X$，使得

$$d(f^n(x'),x_n)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}(f^n(x')),\qquad\forall n\in\mathbb{Z}.\tag{4}$$

由 f 的持久性可知，存在 $y\in X$，使得 $\forall n\in\mathbb{Z}$，$d(f^n(x'),g^n(y))\leqslant\varepsilon'(f^n(x'))$，所以

$$d(g^n(y),f^n(x'))\leqslant\frac{\varepsilon}{2}(g^n(y)),\qquad\forall n\in\mathbb{Z}.\tag{5}$$

从而

$$\begin{aligned}d(g^n(y),x_n)&\leqslant d(g^n(y),f^n(x'))+d(f^n(x'),x_n)<\frac{\varepsilon}{2}(g^n(y))+\frac{\varepsilon}{2}(f^n(x'))<\\&\frac{\alpha(g^n(y))}{4}+\frac{\alpha(f^n(x'))}{4}<\\&\max\{\alpha(g^n(y)),\alpha(f^n(x'))\}<\varepsilon(g^n(y)),\quad\forall n\in\mathbb{Z}.\end{aligned}\tag{6}$$

因此，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 能被 (g,ε) 跟踪. 故 f 具有持久跟踪性.

推论 1　非紧致度量空间上的同胚有持久跟踪性当且仅当该同胚有伪轨跟踪性并且是持久的.

证明：根据引理 2 和注 2 可证必要性；根据定理 2 可证充分性.

引理 3　非紧致度量空间上的强拓扑稳定同胚是持久的.

证明：设 X 是非紧致度量空间，d 为 X 上的度量，对任意的 $\varepsilon\in C_+(X)$，令 $\varepsilon'\in C_+(X)$，使得对任意的 $x,y\in X$，有 $d(x,y)<\varepsilon'(x)$，则 $d(x,y)<\varepsilon(y)$. 对 ε'，存在 $\varepsilon''\in C_+(X)$，使得 $d(x,y)<\varepsilon''(x)$，则 $d(x,y)<\varepsilon'(y)$. 由 f 的强拓扑稳定性知，对 ε''，存在 $\delta\in C_+(X)$，使得在非紧致度量空间 X 上满足对任意的 $z\in X$，有 $d(f(z),g(z))<\delta(f(z))$的任意的自同胚 g，并且存在一个连续满射 $h: X\to X$，满足 $d(h(z),\mathrm{Id}(z))<\varepsilon''(h(z))$且 $f\circ h=h\circ g$. 对于 $x\in X$，选择 $y\in h^{-1}(x)$，则对任意的 $n\in\mathbb{Z}$，有

$$d(f^n(x),g^n(y))=d(f^n(h(y)),g^n(y))=d(h(g^n(y)),g^n(y))<\varepsilon''(h(g^n(y))),\tag{7}$$

因此 $d(f^n(x),g^n(y))<\varepsilon'(g^n(y))$. 所以 $d(f^n(x),g^n(y))<\varepsilon(f^n(x))$，即 f 是持久的.

显然，引理 3 的等价命题为若非紧致度量空间 X 上同胚 f 不是持久的，则 f 不是强拓扑稳定的，即仅有持久性的同胚不能推出强拓扑稳定的. 此外，一方面，Walters[10] 的拓扑稳定性定理表明，紧致度量空间中每个有伪轨跟踪性的可扩同胚都是拓扑稳定的，文献[6]也证明了该定理在非紧致度量空间上

仍然成立. 另一方面，并不是紧致度量空间上的每个有伪轨跟踪性的可扩同胚都是强拓扑稳定的.

定理3 非紧致度量空间上有持久跟踪性的可扩同胚是强拓扑稳定的.

证明：设 X 是非紧致度量空间，其度量为 d，$f: X\to X$ 是有持久跟踪性的可扩同胚，则 f 是有伪轨跟踪性的可扩同胚，所以是拓扑稳定的. 由 f 的可扩性，设 $e\in C_+(X)$ 是 f 的可扩函数，令 $\gamma\in C_+(X)$，使得 $\forall x\in X$，$\gamma(x)<\inf\{e(t)\mid t\in B(x,\gamma(x))\}$. 由 f 的持久跟踪性，对任意的 $\varepsilon_1<\gamma/4$，存在 $\delta_1\in C_+(X)$，对 δ_1，根据 f 的拓扑稳定性，存在 $\delta_2\in C_+(X)$，任取同胚 $g: X\to X$，满足 $\forall z\in X$，$d(f(z),g(z))<\delta_2(f(z))$，则 $d(f(z),g(z))<\delta_1(f(z))$. 并且存在一个连续映射 $h: X\to X$，使得 $d(h(z),\mathrm{Id}(z))<\varepsilon_2(h(z))$ 且 $f\circ h=h\circ g$. 因此只要证明 h 是满射的即可.

固定 $x\in X$，根据 δ_2 的定义，可得 $d(f(z),g(z))<\delta_1(f(z))$，$\forall z\in X$，所以可证明双无限序列 $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 g 的一个 δ_1-伪轨. 再根据 f 的持久跟踪性知，存在 $y\in X$，使得对任意的 $n\in\mathbb{Z}$，有 $d(f^n(x),g^n(y))<\varepsilon_1(f^n(x))$，则 $d(f^n(x),g^n(y))<\dfrac{\gamma}{4}(g^n(y))$. 但由于 $f\circ h=h\circ g$，所以对任意的 $n\in\mathbb{Z}$，有 $d(f^n(h(y)),g^n(y))=d(h(g^n(y)),g^n(y))<\varepsilon_2(h(g^n(y)))$，进而有

$$d(f^n(h(y)),g^n(y))<\frac{\gamma(f^n(h(y)))}{4}. \tag{8}$$

因此，

$$\begin{aligned} d(f^n(x),f^n(h(y)))&\leqslant d(f^n(x),g^n(y))+d(g^n(y),f^n(h(y)))<\\ &\varepsilon_1(f^n(x))+d(g^n(y),h(g^n(y)))<\varepsilon_1(f^n(x))+\varepsilon_1(g^n(y))<\\ &\frac{\gamma(f^n(x))}{4}+\frac{\gamma(f^n(h(y)))}{4}<\\ &\max\{\gamma(f^n(x)),\gamma(f^n(h(y)))\}<e(f^n(x)),\quad \forall n\in\mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{9}$$

因为 e 是同胚 f 的可扩函数，所以 $h(y)=x$，即 h 是满射.

参 考 文 献

[1] LEWOWICZ J. Persistence in Expansive Systems [J]. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 1983, 3(4): 567-578.

[2] SAKAI K, KOBAYASHI H. On Persistent Homeomorphisms [J]. Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku, 1985, 574: 114-125.

[3] DONG M H, LEE K, MORALES C. Pointwise Topological Stability and Persistence [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 480(2): 123334-1-123334-12.

[4] KAWAGUCHI N. Topological Stability and Shadowing of Zero-Dimensional Dynamical Spaces [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2019, 39(5): 2743-2761.

[5] JUNG W, LEE K, MORALES C A. Pointwise Persistence and Shadowing [J]. Monatshefte für Mathematik, 2020, 192(7): 111-123.

[6] LEE K, NGUYEN N T, YANG Y N. Topological Stability and Spectral Decomposition for Homeomorphisms on Noncompact Spaces [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems: Series A, 2018, 38(5): 2487-2503.

[7] KHAN A G, DAS T. Persistence and Expansivity Through Pointwise Dynamics [J]. Dynamical Systems, 2021, 36(1): 79-87.

[8] BARZANOUNI A. Persistent Shadowing for Actions of Some Finitely Generated Groups and Related Measures [Z/OL]. (2023-01-29)[2023-11-10]. https://doi.org/10.48550/arxiv.2301.12384.

[9] CHOI S K, CHU C, LEE K H. Recurrence in Persistent Dynamical Systems [J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1991, 43(3): 509-517.

[10] WALTERS P. On the Pseudo Orbit Tracing Property and Its Relationship to Stability [Z/OL]. (2006-12-21)[2023-10-20]. https://doi.org/10.1007/BFb01.

[11] KOO N, LEE K, MORALES C A. Pointwise Topological Stability [J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 2018, 61(4): 1179-1191.

[12] AOKI N, HIRAIDE K. Topological Theory of Dynamical Systems: Recent Advances: Vol. 52 [M]. Amsterdam: [s. n.], 1994: 667-680.

(责任编辑：赵立芹)