

具有边界约束条件的张拉整体结构找形研究

冯晓东^{1*}, 郭宥延², 胡执标³, 徐忠立⁴, 张晓楠⁴

(1. 河海大学 未来技术学院, 江苏 常州 213200; 2. 绍兴大学 土木工程学院, 浙江 绍兴 312000;
3. 施朗龙山工程设计有限公司, 杭州 311200; 4. 同创工程设计有限公司, 浙江 绍兴 312099)

摘要: 为完善张拉整体结构在实际工程中的应用, 提出了一种适用于具有边界约束条件的张拉整体结构找形方法。该方法引入了虚拟杆件单元以消除固定节点约束, 将带边界约束的结构转化为无支撑自应力体系; 结合几何拓扑关系、空间维数与单元类型构建力密度矩阵与平衡矩阵, 采用奇异值分解法对矩阵开展循环迭代计算, 求解得到满足自平衡构型的节点坐标与力密度分布。依托实际工程案例对七杆与五杆张拉整体结构开展性能对比分析。结果表明: 五杆结构的最大可透光面积率较七杆结构的最大可透光面积率提高了190.74%, 预应力分布均匀性也得到显著改善。验证了利用该方法求解带边界约束条件的张拉整体结构自平衡状态的准确性与可行性, 可为张拉整体结构的工程应用提供理论支持。

关键词: 张拉整体结构; 找形; 边界约束; 虚拟杆件单元; 奇异值分解; 最大可透光面积率; 预应力分布均匀性

中图分类号: TU399

文献标志码: A

文章编号: 1671-9379(2026)09-0100-09

DOI: 10.13969/j.jzgjgz.20250214001

Form-Finding Method for Tensegrity Structures with Boundary Constraints

FENG Xiaodong^{1*}, GUO Youyan², HU Zhibiao³, XU Zhongli⁴, ZHANG Xiaonan⁴

(1. College of Future Technologies, Hohai University, Changzhou 213200, China; 2. School of Civil Engineering, Shaoxing University, Shaoxing 312000, China; 3. Shilang Longshan Engineering Design Co., Ltd., Hangzhou 311200, China; 4. Tongchuang Engineering Design Co., Ltd., Shaoxing 312099, China)

*Corresponding author: xiaodong.feng@hhu.edu.cn

Abstract: In order to optimize the application of tensegrity structures in practical engineering, a novel form-finding method was proposed for tensegrity structures subjected to boundary constraints. Dummy members were introduced to release the fixed node constraints and transform the tensegrity structure with boundary constraints into a free-standing self-stressed system without supports. The three basic conditions of the structure were determined, including the geometric topology, the dimension of the structure, and the element type. The force density matrix and the equilibrium matrix were then obtained, and the singular value decomposition method was used to iteratively solve them to ensure a correct self-equilibrium configuration. The nodal coordinates and force density distribution were subsequently calculated. Based on a practical engineering case, the maximum light-transmitting area ratio and prestress distribution uniformity of a seven-strut and a five-strut tensegrity structure were compared and analyzed. The results showed that the maximum light-transmitting area ratio of the five-strut structure was 190.74% higher than that of the seven-strut structure, and the five-strut structure had a more uniform prestress distribution. These results

收稿日期: 2025-02-14

基金项目: 国家自然科学基金(52478189)

作者简介:

冯晓东(1987—), 男, 博士, 教授, 主要从事智能材料制造及智能结构方面的研究。E-mail: xiaodong.feng@hhu.edu.cn。(通信作者)

demonstrated the feasibility and accuracy of the proposed method for determining self-equilibrium configurations of tensegrity structures subjected to boundary constraints, providing theoretical support for the practical engineering application of tensegrity structures.

Keywords: tensegrity structure; form-finding; boundary constraint; dummy member; singular value decomposition; maximum light-transmitting area ratio; uniform prestress distribution

近半个世纪以来,张拉整体结构兼具轻质高强、网状布置、可智能化调控等特点,作为一类先进空间结构体系^[1],已在土木工程、人工智能、生物医学等诸多领域的工程建筑中得到应用。该结构通常由承受压力的杆件与承受拉力的索件构成,在外荷载作用下,杆件与索件分别呈现压缩与拉伸状态,二者协同工作。值得注意的是,张拉整体的拉索元件具备自应力特性,这意味着在无外力作用(含重力影响)时,构件间的平衡预应力为结构提供刚度,保障整体稳定性^[2]。当结构承受外部作用时,杆件与索件内力会随之发生调整,使结构拥有良好的灵活性与可控性。但实际工程应用中,张拉整体结构往往受边界约束条件限制;现有多数研究主要针对无边界约束条件下的找形问题,复杂边界约束下的张拉整体结构找形仍有待进一步深入研究。

目前该领域已取得较多研究成果^[3]。SCHEK等^[4]提出的方法是张拉整体找形领域高效便捷的经典方法;ZHANG等^[5]结合构件内力、几何拓扑关系等条件,提出了基于平衡矩阵分析的自适应力密度法;KOOHESTANI等^[6]提出以单元长度笛卡尔分量为核心变量的数值找形方法,拓展了找形的研究思路;LEE等^[7]融合力密度法与遗传算法,对张拉整体结构的自平衡与稳定性开展研究。随着人工智能技术的兴起,LEE等^[8]将经过优化的差分进化算法得到的力密度集合输入至构建完成的神经网络框架内进行训练与测试,极大提升了找形计算效率;SUN等^[9]提出结合力密度法与归零神经网络的张拉整体找形新策略;在此基础上,ZHAO等^[10]引入抗噪归零神经网络并联合动力松弛法,在保证结构稳定性的同时降低噪声对找形过程的干扰,推动智能找形方向的发展。

现有主流找形方法通常需要设置较多前置条件:例如将力密度系数作为符号变量^[11]、假定结构具有全局对称性^[12]、预先明确动力松弛法中若干单元的长度^[11]。但实际工程存在各类复杂干扰,上述预设条件往往难以确定,因此这类方法在工程应用中存在一定局限。

相较于仅适用于无边界约束的找形算法,本文提出的方法更加贴合工程实际,实用性更强。找形计算仅需要输入几何拓扑关系、空间维数、单元类型三项基础条件。为实现结构的找形,本文提出的方法引入了虚拟杆件单元,将带边界约束的张拉整体结构转化为无外部支撑的自平衡系统;根据结构的几何拓扑关系建立拓扑矩阵与关联矩阵,对力密度矩阵与平衡矩阵做奇异值分解

并循环迭代,直至满足矩阵最小秩亏条件,求解得到节点坐标与力密度分布,进而明确结构最终形态^[13]。同时结合实际工程案例,采用该方法对比七杆、五杆张拉整体结构的预应力分布状态,可为复杂张拉整体结构的工程设计提供参考。

1 力密度找形法及相应的秩亏条件

1.1 基本假定

本文计算采用如下基本假定:(1) 结构几何拓扑关系已知,几何形状通过对应节点坐标确定;(2) 所有杆件单元均以铰接方式连接;(3) 忽略结构自重及外部荷载的影响;(4) 无耗散力作用于结构体系^[14]。

1.2 张拉整体结构的自平衡方程

对于具有 b 个单元、 n 个固定节点、 n_f 个自由节点的 $d(d=2$ 或 $3)$ 维张拉整体结构,采用关联矩阵 $C_S \in R^{b \times (n+n_f)}$ 描述其几何拓扑关系^[15]。

假定连接单元 k 两端节点编号分别为 $i, j(i < j)$, 定义关联矩阵 C_S 第 k 行的第 i, j 个元素分别为 1 和 -1, 计算公式如式(1)所示:

$$C_{S(k,p)} = \begin{cases} 1 & \text{当 } p=i \\ -1 & \text{当 } p=j \\ 0 & \text{其余情况} \end{cases} \quad (1)$$

如表 1 所示,按照节点编号规则,固定节点编号置于自由节点之前,关联矩阵 C_S 如式(2)所示:

$$C_S = [C, C_f] \quad (2)$$

式中: $C \in R^{b \times n}$ 为自由节点与单元之间的关联矩阵; $C_f \in R^{b \times n_f}$ 为固定节点与单元之间的关联矩阵。

表 1 二维预应力张拉整体结构的关联矩阵

Table 1 Connectivity matrix of the two-dimensional pre-stressed tensegrity structure

单元/节点	关联矩阵 C_S			
	C		C_f	
	1	2	3	4
1	1	0	-1	0
2	1	0	0	-1
3	0	1	0	-1
4	0	1	-1	0
5	1	-1	0	0

定义力密度矩阵 $Q = \text{diag}(q)$, 其中力密度系数矩阵为 $q = \{q_1, q_2, \dots, q_b\}^T \in R^b$, 建立结构各方向上的平衡方程组, 如式(3)所示:

$$\begin{aligned} C^T Q C x + C^T Q C_i x_i &= p_x \\ C^T Q C y + C^T Q C_i y_i &= p_y \\ C^T Q C z + C^T Q C_i z_i &= p_z \end{aligned} \quad (3)$$

式中: $x, y, z (\in R^n)$ 和 $x_i, y_i, z_i (\in R^{n_i})$ 分别代表自由节点和固定节点在 x, y, z 负方向的节点坐标向量; $p_x, p_y, p_z (\in R^n)$ 分别代表 x, y, z 负方向作用在自由节点上的外力向量。

为消除边界约束对平衡矩阵构建的影响, 本文引入虚拟杆件单元。虚拟杆件单元的作用是把带边界约束的张拉整体结构等效转化为无外部支撑的自平衡体系。通过虚拟杆件, 原边界支座约束力替换为虚拟杆件的内部自应力, 从而实现等效转化, 即将边界约束条件转化为内部自应力条件。这一过程使得固定节点转化为可参与计算的自由节点, 并保持了整体结构的拓扑完整性。如图1所示, 细线1~4、粗线5与虚线6分别代表受拉索元、受压杆元和虚拟杆件。

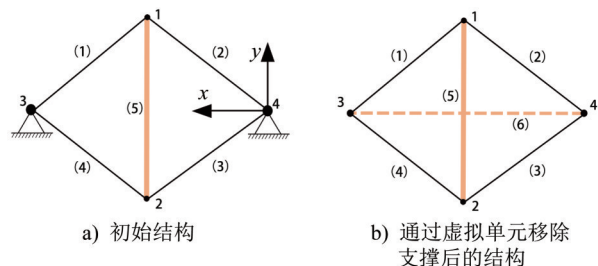


图1 去掉边界约束后加入虚拟杆件单元的张拉整体结构
Fig. 1 Tensegrity structure with dummy member after removing boundary constraints

本例中虚拟杆件单元6用于代替固定节点3和4。图1b)中等效的自应力张拉整体结构的关联矩阵如表2所示。此时张拉整体处于自平衡状态, 定义节点坐标矩阵 $E \in R^{n \times n}$, 计算公式如式(4)所示:

$$E[x, y, z] = C^T Q C [x, y, z] = [0, 0, 0] \quad (4)$$

式中: $[x, y, z]$ 为 d ($d=2$ 或 3) 维张拉整体结构的节点坐标矩阵。

为了简化, 定义矩阵 $D_x, D_y, D_z (\in R^{b \times b})$ 如式(5)所示:

$$\begin{aligned} D_x &= \text{diag}(C_x) \\ D_y &= \text{diag}(C_y) \\ D_z &= \text{diag}(C_z) \end{aligned} \quad (5)$$

由此可得张拉整体结构的自平衡方程如式(6)所示:

$$Aq = \begin{pmatrix} C^T D_x \\ C^T D_y \\ C^T D_z \end{pmatrix} q = 0 \quad (6)$$

式中: $A \in R^{dn \times b}$ 为张拉整体结构的平衡矩阵^[16]。

表2 用虚拟杆件单元消除边界约束的等效自应力张拉整体结构的关联矩阵

Table 2 The connective matrix of equivalent self-stressed tensegrity structure with dummy member to remove boundary constraints

单元/节点	关联矩阵 C_s			
	1	2	3	4
1	1	0	-1	0
2	1	0	0	-1
3	0	1	0	-1
4	0	1	-1	0
5	1	-1	0	0
6	0	0	1	-1

1.3 两个必要的秩亏条件

张拉整体结构找形需满足如下两项必要的秩亏条件。

条件一, 如式(7)所示:

$$n_E = n - r_E = n - \text{rank}(E) \geq d + 1 \quad (7)$$

式中: n_E 为矩阵 E 的秩亏。

条件二, 如式(8)所示:

$$s = r_A = \text{rank}(A) < b \quad (8)$$

该秩亏条件决定结构的自应力模态数量 $s = b - r_A \geq 1$ 与独立机构位移模态数量 $m = dn - r_A$ 。

此时张拉整体结构已经转化为自平衡体系, 结构独立机构位移模态数由刚体位移模态与无穷小机构位移模态两部分组成:

$$m_{im} = m - r_b \quad (9)$$

$$r_b = \frac{d(d+1)}{2} \quad (10)$$

式中: m 为独立机构位移模态数; r_b 为刚体位移模态数; d 为张拉整体结构的空间维数。

2 基于矩阵分析的找形步骤

2.1 结构找形过程

与传统找形方法相比, 本文提出的张拉整体结构找形方法显著不同。为了确定各单元的力密度系数, 用+1或-1分别代表处于拉伸或压缩状态的杆件, 定义向量 q_0 如式(11)所示:

$$q_0 = \left\{ \underbrace{+1 \ +1 \ \dots \ +1}_{\text{受拉索元}} \ \underbrace{-1 \ -1 \ \dots \ -1}_{\text{受压杆元}} \right\}^T \quad (11)$$

具体计算流程如图2所示。具体找形思路如下:

(1) 输入关联矩阵 C 、维数 d 及初始力密度系数 q_0 ;

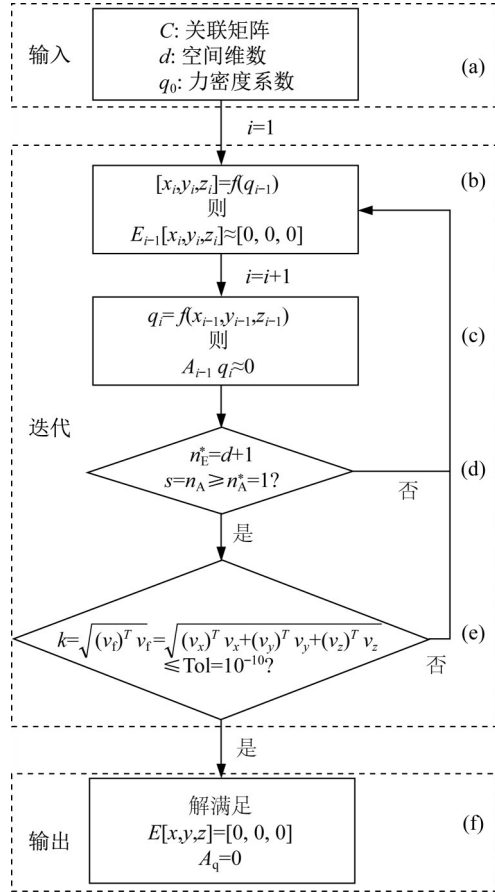


图2 等效自应力张拉整体结构找形流程图

Fig. 2 Form-finding flowchart of equivalent self-stressed tensegrity structures

(2) 获得力密度矩阵 E 与平衡矩阵 A 并进行奇异值分解, 得出节点坐标矩阵 $[x, y, z]$ 和力密度系数矩阵 q ;

(3) 判断所得构型是否满足式(12)和式(13), 若满足则继续执行, 若不满足则返回步骤(b);

$$n_E^* = d + 1 \quad (12)$$

$$s = n_A \geq n_A^* = 1 \quad (13)$$

(4) 判断所得构型是否满足精确度要求, 若满足则继续输出结果, 若不满足则返回步骤(b)。引入欧几里得范数, 设计误差 κ 如式(14)所示, 设计误差 κ 必须在 10^{-10} 以内^[17]。

$$\kappa = \sqrt{(v_i)^T v_i} \leq T_{ol} = 10^{-10} \quad (14)$$

2.2 力密度矩阵 E 的奇异值分解

将力密度矩阵 E 进行奇异值分解:

$$E = G \Sigma H^T \quad (15)$$

$$G = [g_1, g_2, \dots, g_n] \quad (16)$$

$$H = [h_1, h_2, \dots, h_n] \quad (17)$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0 \quad (18)$$

式中: $G \in R^{n \times n}$ 和 $H \in R^{n \times n}$ 为正交矩阵; $\Sigma \in R^{n \times n}$ 为具

有非负奇异值的对角矩阵, 其奇异值 λ 按降序排列。

E 的零奇异值数量等于其零空间维度, 因此将正交矩阵 H 的前 n_E^* 个正交奇异向量作为备选节点坐标, 如式(19)所示^[17]:

$$\{x, y, z\} \in \bar{H} = \{h_{n-n_E^*+1}, h_{n-n_E^*+2}, \dots, h_n\} \quad (19)$$

力密度系数矢量 q 由平衡矩阵 A 的奇异值分解求得。逐步迭代并改变 q , 使矩阵 E 的前 n_E^* 个奇异向量值无限接近于 0, 如(20)所示^[17]:

$$\lambda_i = 0 (i = n - n_E^* + 1, n - n_E^* + 2, \dots, n) \quad (20)$$

需要注意, 需要剔除符合式(21)和式(22)的矢量 h_i (h_i 为矩阵 $\bar{H}$ 的前 n_E^* 奇异向量基中的一个或几个)

$$Ch_i = 0 \quad (21)$$

$$\det |L_d(L_d)^T| = 0 \quad (22)$$

式中: $L_d = \sqrt{(Ch_i)^2 + (Ch_j)^2 + (Ch_k)^2}$, 表示 d 维空间(假定 d 为 3) d 个奇异向量任意组合而成的 b 个单元的长度向量。

如果任意奇异向量 h_i 均不符合式(21)和式(22), 则直接选取矩阵 $\bar{H}$ 的前三个奇异向量作为三维张拉整体结构的节点坐标 $[x, y, z]$ 。算法选用奇异值分解而非特征值分解, 是因为奇异值恒为非负, 可避免特征值出现负值从而干扰解的选取。

综上所述, 在空间三维张拉整体结构的找形过程中, 最有效的方案即从前四组奇异向量基中筛选三组可能的奇异向量, 采用本文方法迭代该奇异值逐步降为零, 最终求出相应的节点坐标矩阵, 计算公式如式(23)所示:

$$E[x, y, z] \approx [0, 0, 0] \quad (23)$$

2.3 平衡矩阵 A 的奇异值分解

得到节点坐标之后, 为求解式(6), 将平衡矩阵 A 进行奇异值分解, 如式(24)~(27)所示:

$$A = UVW^T \quad (24)$$

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_{dn}] \quad (25)$$

$$W = [w_1, w_2, \dots, w_b] \quad (26)$$

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_b \geq 0 \quad (27)$$

式中: $U \in R^{dn \times dn}$ 和 $W \in R^{b \times b}$ 均为正交矩阵; $V \in R^{dn \times b}$ 为具有非负奇异值 A 组成的对角矩阵, 奇异值按降序排列。

依据上述 s 计算结果, 迭代找形分为三种情形^[18]:

(1) 当 $s \geq 2$ 时, 结构处于多自应力模态状态, 不能直接由平衡矩阵 A 的零空间求解, 需要借助几何对称性获取自应力模态;

(2) 当 $s = 1$ 时, 结构处于自平衡状态, 求解平衡矩阵 A 的零空间得到力密度与机构矢量, 拉压符号满足约束时, 则存在满足式(28)的唯一自应力模态;

(3) 当 $s = 0$ 时, 结构内不存在自应力模态, 可以找到

合适的 q ,使得满足式(28)。

$$Aq = \begin{pmatrix} C^T D_x \\ C^T D_y \\ C^T D_z \end{pmatrix} q \approx 0 \quad (28)$$

综上所述,本文所提出的找形方法核心是满足式(7)与式(8)所定义的两项秩亏条件。此迭代过程中,通过两次奇异值分解选取合适的奇异向量,从而确保至少存在一种自应力解,使得力密度矩阵 Q 与平衡矩阵 A 均处于秩亏状态。需特别指出的是,对于任意给定的张拉整体结构,利用本方法最终得到的力密度系数矢量 q 并非唯一解,其余解存在于相同的关联矩阵和初始力密度系数中。

2.4 结构的稳定性计算

找形过程在求解得到自应力模态后停止,此时易于验证 $[x, y, z]$ 和 q 在运动过程中不定杆件是否创建了稳定的自平衡结构。因此,能否抑制全部无穷小机制,此时还需计算结构的切线刚度矩阵 K^T ,如式(29)所示^[19]。

$$K^T = K^E + K^G = A \text{diag} \left(\frac{ea}{l^0} - q \right) A^T + I \otimes E \quad (29)$$

式中: K^E 为张拉整体结构的线性刚度矩阵; K^G 为与自应力模态有关的几何刚度矩阵; e 为结构各单元材料的杨氏模量; a 为结构各单元材料的横截面积; l^0 为结构

各单元的初始长度; $I \in R^{3 \times 3}$ 为单位矩阵; $\otimes$ 为张量积。

刚体位移被约束后,若切线刚度矩阵正定,则结构体系稳定^[19]。因此,通过 K^G 相对于任何非平凡变动的二次形式 M ,可在 d 维张拉整体结构中确定铰接结构的稳定性,通过式(30)或式(31)确定:

$$\Gamma = M^T (K^G) M = M^T (I \otimes E) M \quad (30)$$

$$\text{eig}(K^T) = \text{eig}(K^G) =$$

$$\left[\underbrace{\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{r_b} = 0}_{\text{刚体运动}} \quad \underbrace{\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{dn-r_b}}_{\text{正刚度}} \right], \quad (31)$$

式中: r_b 为根据式(10)定义的独立刚体机构数量^[17]。

3 实例分析

张拉整体结构在建筑领域多用于体育馆、展览馆等建筑中的大跨度屋盖。该类结构具备较好的抗风抗震性能,同时自重轻、稳定性与耐久性优良,也大量应用于景观建筑中。设计人员需要结合工程需求选用合适找形算法得到目标构型^[20]。但张拉整体结构也存在不足,如承载能力有限、对形态精度敏感、对缺陷较为敏感等,设计与施工阶段需要充分考虑上述因素,保障结构安全稳定。

某工程将建筑屋盖工程原有的七杆张拉整体结构(图3a))优化为五杆张拉整体结构(图3c))。为验证优化方案的合理性,本文分别将这两类具有边界约束的张拉

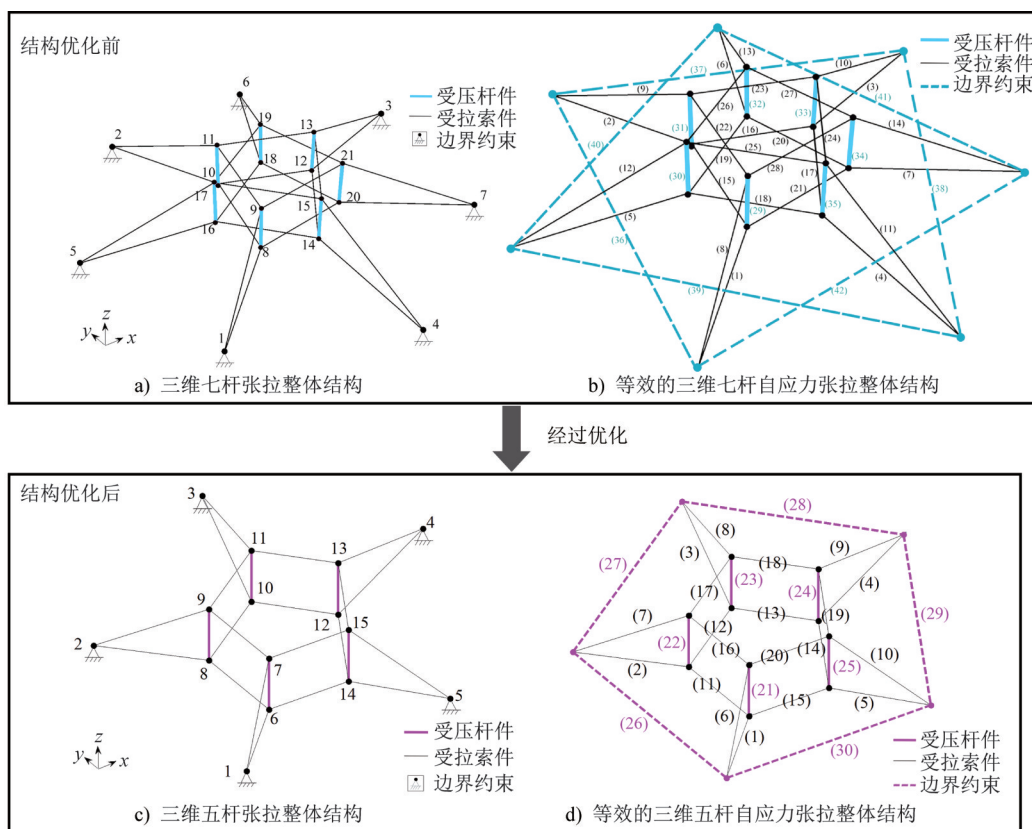


图3 将七杆张拉整体结构优化为五杆张拉整体结构

Fig. 3 Convert a 7-strut tensegrity structure into a 5-strut tensegrity structure

整体结构等效转化为自应力张拉整体结构,通过分析结构的最大可透光面积率与结构预应力均布状况,比较优化前和优化后的结构。

消除张拉整体结构的边界约束条件需引入虚拟杆件单元;由于结构优化前后初始杆件数量存在差异,故虚拟杆件的引入方式也有所不同。七杆结构虚拟杆件连接不相邻边界约束点,杆件相互交错,见图3b);五杆结构虚拟杆件连接相邻边界约束点,杆件互不交叉,见图3d)。因此在实际工程中需要根据边界条件选用对应的等效转化策略,提升计算准确性。

3.1 找形方法的选择与计算效率对比

在张拉整体结构找形研究中,各类方法呈现出显著的性能差异与适用边界。动力松弛法^[15]适合强非线性边界条件问题;而遗传算法^[21]则为多目标优化问题提供了有效的全局搜索策略。本文方法基于力密度矩阵理论,通过建立平衡矩阵的奇异值分解与秩亏分析体系,构建了高效的自平衡方程求解体系。以五杆张拉整体结构为研究对象开展对比研究。如表3所示,在相同运行次数下,本文方法较动力松弛法与遗传算法具有更优的计算效率,更符合工程找形的效率需求,因此本算例采用本文提出的找形方法。

3.2 结构最大可透光面积率

结构最大可透光面积率是指结构中最大可透光部分面积与结构总面积(按正投影面积计算)的比值。该指标

表3 不同方法的平均运行时间对比

Table 3 Comparison of average run times of different methods

方法类别	本文方法	动力松弛法 ^[15]	遗传算法 ^[21]
运行次数/次	500	500	500
平均运行时间/s	0.393 8	0.812 7	1.355 6

注:使用CPU型号为AMD Ryzen 7 5800H 带Radeon显卡的电脑以运行表中方法。

是评价建筑物采光性能的重要指标。本研究案例中的建筑工程位于北方地区,该地区具有显著的季节性光照差异;提高可透光面积率能够充分利用自然光,降低人工照明能耗,改善室内热环境。最大可透光面积率计算公式如式(32)所示:

$$\tau=(A/S)\times 100\%$$
 (32)

式中: τ 为结构最大可透光面积率; A 为结构最大可透光面积; S 为结构总面积(按正投影面积计算)。

结合图4与表5、表6中的节点坐标(图3a)、c)),可计算出两种结构的最大可透光面积率,结果如表4所示。相同的结构总面积前提下,五杆张拉整体结构的最大可透光面积率提高了190.74%,显著优于七杆张拉整体结构的最大可透光面积率。自然光进入室内的程度更高,提高了室内亮度与视觉舒适度,可改善室内光环境;同时减少了建筑室内对照明设备的需求,降低了照明能耗及部分供暖能耗。

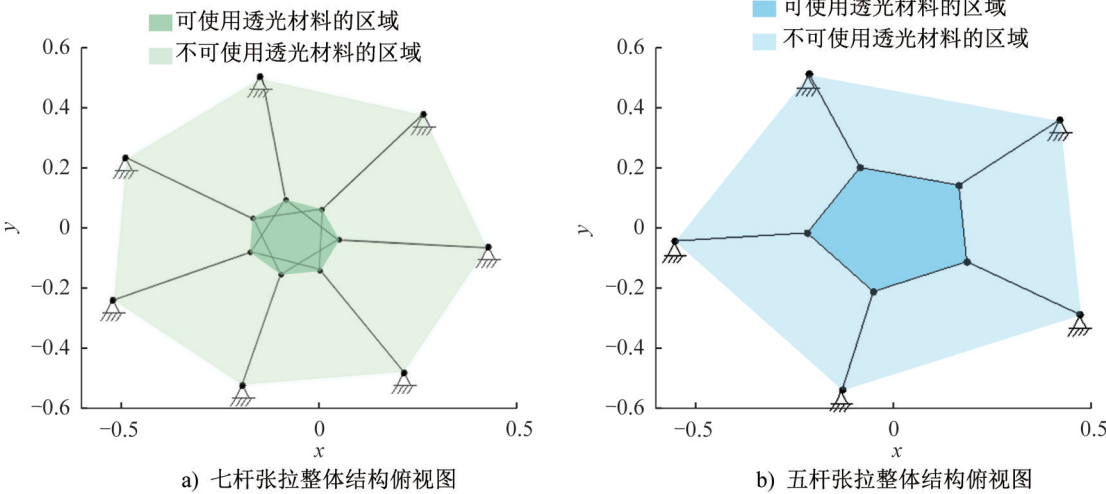


图4 张拉整体结构优化前后可使用透光材料的区域

Fig. 4 The area where transparent material can be used before and after the optimization of tensegrity structure

3.3 结构预应力均布状况

在实际工程中,预应力分布不均会造成局部应力集

中,增大结构失稳风险;长期高应力区域容易产生疲劳损伤,缩短结构服役寿命;同时还会提升施工阶段预应力调

表4 七杆和五杆张拉整体结构的最大可透光面积率
Table 4 The maximum transparent area ratio of a 7-strut and a 5-strut tensegrity structure

结构类型	$\tau/\%$
七杆(优化前)	5.29
五杆(优化后)	15.38

控难度。因此设计阶段需要评估预应力分布均匀程度。

本文通过所提找形算法求解杆件、索件的力密度系数与节点坐标,分析数据的方差,对比优化前后结构预应力分布状况。

分别建立五杆-二十索、七杆-二十八索-张拉整体初始拓扑模型,引入虚拟杆件得到对应的等效自应力模型,如图3所示。在程序中需要输入关联矩阵、空间维数和单元类型,给定初始力密度矢量,如表7和表8所示。

表5 三维七杆张拉整体结构的节点坐标
Table 5 Node coordinates of the 3-dimensional 7-strut tensegrity structure

节点	x	y	z	节点	x	y	z
节点1	-0.082 2	0.501 6	0.000 0	节点12	0.067 1	-0.095 7	
节点2	-0.470 8	-0.191 8	0.000 0	节点13	0.067 1	-0.095 7	
节点3	0.291 7	-0.416 3	0.000 0	节点14	0.078 4	0.086 7	
节点4	0.340 9	0.377 0	0.000 0	节点15	0.078 4	0.086 7	
节点5	-0.443 5	0.248 5	0.000 0	节点16	-0.101 9	0.057 1	0.267 3
节点6	-0.143 6	-0.487 6	0.000 0	节点17	-0.101 9	0.057 1	
节点7	0.507 4	-0.031 5	0.000 0	节点18	-0.033 0	-0.112 1	
节点8	-0.018 9	0.115 3	-0.267 3	节点19	-0.033 0	-0.112 1	
节点9	-0.018 9	0.115 3	0.267 3	节点20	0.116 6	-0.007 2	
节点10	-0.108 2	-0.044 1	-0.267 3	节点21	0.116 6	-0.007 2	
节点11	-0.108 2	-0.044 1	0.267 3				

表6 三维五杆张拉整体结构的节点坐标
Table 6 Node coordinates of the 3-dimensional 5-strut tensegrity structure

节点	x	y	z	节点	x	y	z
节点1	-0.552 0	-0.033 9	0.000 0	节点9	-0.054 3	-0.210 1	
节点2	-0.138 4	-0.535 4	0.000 0	节点10	0.183 0	-0.116 6	
节点3	0.466 5	-0.297 1	0.000 0	节点11	0.183 0	-0.116 6	
节点4	0.426 7	0.351 8	0.000 0	节点12	0.167 4	0.138 0	0.316 2
节点5	-0.202 8	0.514 5	0.000 0	节点13	0.167 4	0.138 0	
节点6	-0.216 6	-0.013 3	-0.316 2	节点14	-0.079 6	0.201 9	
节点7	-0.216 6	-0.013 3	0.316 2	节点15	-0.079 6	0.201 9	
节点8	-0.054 3	-0.210 1	-0.316 2				

表7 五杆张拉整体结构初始力密度系数矢量
Table 7 Initial force density coefficient vector of the 5-strut tensegrity structure

单元类型	单元	力密度系数矢量
索单元	$q_1 \sim q_{20}$	1.000 0
杆单元	$q_{21} \sim q_{30}$	-1.000 0

表8 七杆张拉整体结构初始力密度系数矢量
Table 8 Initial force density coefficient vector of the 7-strut tensegrity structure

单元类型	单元	力密度系数矢量
索单元	$q_1 \sim q_{28}$	1.000 0
杆单元	$q_{29} \sim q_{42}$	-1.000 0

经过 MATLAB 程序计算得到节点坐标如表 5、表 6 所示,七杆张拉整体结构与五杆张拉整体结构归一化力密度系数矢量(相对于杆 1)如表 9、表 10 所示。

表 9 七杆张拉整体结构归一化力密度系数矢量
(相对于杆 1)
Table 9 Normalized force density coefficient vector
of the 7-strut tensegrity structure (relative to rod 1)

单元类型	单元	力密度系数矢量
索单元	$q_1 \sim q_{14}$	1.000 0
索单元	$q_{15} \sim q_{28}$	1.370 1
杆单元	$q_{29} \sim q_{35}$	-0.500 0
杆单元	$q_{36} \sim q_{42}$	-0.629 9

表 10 五杆张拉整体结构归一化力密度系数矢量
(相对于杆 1)
Table 10 Normalized force density coefficient vector
of the 5-strut tensegrity structure (relative to rod 1)

单元类型	单元	力密度系数矢量
索单元	$q_1 \sim q_{10}$	1.000 0
索单元	$q_{11} \sim q_{20}$	1.120 5
杆单元	$q_{21} \sim q_{25}$	-0.500 0
杆单元	$q_{26} \sim q_{30}$	-0.879 5

两种算例在存在一定设计误差条件下,均仅迭代一次后即可收敛。约束 6 个刚体位移模态($r_b=6$)后,七杆张拉整体结构最终的结构形态存在 1 个自应力模态($s=1$)、16 个无穷小机构位移模态($m_{im}=16$);五杆张拉整体结构最终的结构形态存在 1 个自应力模态($s=1$)、10 个无穷小机构位移模态($m_{im}=10$);两种构型均属于静不定且动不定体系。

计算两类结构的力密度系数矢量绝对值的方差,如表 11 所示。由此可知,五杆张拉整体结构方差更小,预应力分布更均匀;对于相同的施工材料,五杆张拉整体结构的刚度和强度更优,有助于施工过程中的质量控制,减少因应力分布不均导致的施工问题和返工情况,从而提高施工效率。

综上所述,该优化方案合理可行,具备良好的工程应用价值;同时通过本文算例分析,验证了所提方法在复杂边界条件下张拉整体结构找形的可行性与准确性,可为张拉整体结构的实际工程应用提供技术支撑。

4 结论

本文提出面向带边界约束张拉整体结构的找形方

表 11 七杆和五杆张拉整体结构力密度系数矢量绝对值的方差

Table 11 Variance of the absolute value of the force density coefficient vector of the 7-strut and 5-strut tensegrity structure

结构类型	力密度系数矢量绝对值的方差
七杆(优化前)	0.109 7
五杆(优化后)	0.045 0

法:采用虚拟杆件单元等效替换固定支座约束,将原结构转化为无外部约束的自应力体系;输入几何拓扑、空间维数、初始力密度系数,迭代求解自平衡状态下节点坐标与单元力密度,完成找形;进一步通过切线刚度特征值判别结构稳定性能。

依托工程算例,采用本文方法求解七杆、五杆张拉整体结构,对比最大可透光面积率与预应力分布,得到以下主要结论:

- (1) 在结构总面积(按正投影面积计算)相同条件下,五杆张拉整体结构最大可透光面积率较七杆张拉整体结构最大可透光面积率提高了 190.74%。
- (2) 五杆张拉整体结构力密度系数矢量绝对值的方差小于七杆张拉整体结构的相应值,可知五杆张拉整体结构预应力均布性更优。
- (3) 算例对比表明五杆张拉整体结构综合性能优于七杆张拉整体结构综合性能;验证了本文找形方法的可行性与准确性,可用于解决带边界约束张拉整体结构的工程找形问题。

参考文献:

[1] FERKISS V, FULLER R B, APPLEWHITE E J. Synergetics: Explorations in the geometry of thinking [J]. Technology and Culture, 1976, 17(1): 104. DOI: 10.2307/3103256.

[2] 冯晓东, 王晓煜, 郑亦汶, 等. 基于动态滑模的张拉整体结构振动控制研究[J]. 振动与冲击, 2024, 43(14): 293-300. DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2024.14.034.

FENG Xiaodong, WANG Xiaoyu, ZHENG Yiwen, et al. Vibration control of tensegrity structures based on dynamic sliding mode control [J]. Journal of Vibration and Shock, 2024, 43(14): 293-300. DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2024.14.034. (in Chinese)

[3] 郭茂祖, 李卓璇, 李阳, 等. 张拉整体结构的智能化找形研究进展[J]. 科学技术与工程, 2024, 24(12): 4824-4833. DOI: 10.12404/j.issn.1671-1815.2304420.

GUO Maozu, LI Zhuoxuan, LI Yang, et al. Review of intelligent form-finding methods for tensegrity structure [J]. Science Technology and Engineering, 2024, 24(12): 4824-4833. DOI: 10.12404/j.issn.1671-1815.2304420. (in Chinese)

- [4] SCHEK H J. The force density method for form finding and computation of general networks [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1974, 3 (1) : 115-134. DOI: 10.1016/0045-7825(74)90045-0.
- [5] ZHANG J Y, OHSAKI M. Adaptive force density method for form-finding problem of tensegrity structures [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43 (18/19) : 5658-5673. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.10.011.
- [6] KOOHESTANI K, GUEST S D. A new approach to the analytical and numerical form-finding of tensegrity structures [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, 50 (19) : 2995-3007. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.05.014.
- [7] LEE S, LEE J. Form-finding of tensegrity structures with arbitrary strut and cable members [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2014, 85 : 55-62. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.04.027.
- [8] LEE S, LIEU Q X, VO T P, et al. Deep neural networks for form-finding of tensegrity structures [J]. *Mathematics*, 2022, 10 (11) : 1-27. DOI: 10.3390/math10111822.
- [9] SUN Z B, ZHAO L M, LIU K P, et al. An advanced form-finding of tensegrity structures aided with noise-tolerant zeroing neural network [J]. *Neural Computing and Applications*, 2022, 34 (8) : 6053-6066. DOI: 10.1007/s00521-021-06745-6.
- [10] ZHAO L M, SUN Z B, LIU K P, et al. The dynamic relaxation form finding method aided with advanced recurrent neural network [J]. *CAAI Transactions on Intelligence Technology*, 2023, 8 (3) : 635-644. DOI: 10.1049/cit2.12177.
- [11] ZHANG L Y, LI Y, CAO Y P, et al. Stiffness matrix based form-finding method of tensegrity structures [J]. *Engineering Structures*, 2014, 58 : 36-48. DOI: 10.1016/j.engstruct.2013.10.014.
- [12] TIBERT A G, PELLEGRINO S. Review of form-finding methods for tensegrity structures [J]. *International Journal of Space Structures*, 2003, 18 (4) : 209-223. DOI: 10.1260/026635103322987940.
- [13] 冯晓东, 章万鹏, 罗尧尧, 等. 基于方案矩阵编制策略的张拉整体结构拓扑形态研究 [J]. *土木工程学报*, 2021, 54 (8) : 75-86. DOI: 10.15951/j.tmgcxb.2021.08.008.
- FENG Xiaodong, ZHANG Wanpeng, LUO Yaozhi, et al. Investigation on topological morphology of tensegrity structure based on scheme matrix strategy [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2021, 54 (8) : 75-86. DOI: 10.15951/j.tmgcxb.2021.08.008. (in Chinese)
- [14] 冯晓东, 杨伟家, 李锋, 等. 基于二次奇异值分解法的张拉整体结构找形分析 [J]. *西安建筑科技大学学报 (自然科学版)*, 2021, 53 (4) : 502-509. DOI: 10.15986/j.1006-7930.2021.04.006.
- FENG Xiaodong, YANG Weijia, LI Feng, et al. Form-finding analysis of tensegrity structure based on quadratic singular value decomposition method [J]. *Journal of Xi'an University of Architecture & Technology (Natural Science Edition)*, 2021, 53 (4) : 502-509. DOI: 10.15986/j.1006-7930.2021.04.006. (in Chinese)
- [15] 郑亦汶, 杨伟家, 王贵祥, 等. 改进的动力松弛法及其在张拉整体结构找形中的应用 [J]. *结构工程师*, 2023, 39 (5) : 44-52. DOI: 10.3969/j.issn.1005-0159.2023.05.006.
- ZHENG Yiwen, YANG Weijia, WANG Guixiang, et al. Modified dynamic relaxation method and its application in form-finding of tensegrity structures [J]. *Structural Engineers*, 2023, 39 (5) : 44-52. DOI: 10.3969/j.issn.1005-0159.2023.05.006. (in Chinese)
- [16] 冯晓东, 撒剑波, 郑亦汶, 等. 基于量子天牛须搜索的张拉整体结构预应力优化研究 [J]. *西安建筑科技大学学报 (自然科学版)*, 2023, 55 (3) : 350-358. DOI: 10.15986/j.1006-7930.2023.03.005.
- FENG Xiaodong, SA Jianbo, ZHENG Yiwen, et al. Research on prestress optimization of tensegrity structures based on quantum beetle antennae search algorithm [J]. *Journal of Xi'an University of Architecture & Technology (Natural Science Edition)*, 2023, 55 (3) : 350-358. DOI: 10.15986/j.1006-7930.2023.03.005. (in Chinese)
- [17] 冯晓东, 赵容舟, 黄世荣, 等. 具有约束支撑的张拉整体结构初始找形方法 [J]. *绍兴文理学院学报*, 2018, 38 (8) : 72-81. DOI: 10.16169/j.issn.1008-293x.k.2018.08.012.
- FENG Xiaodong, ZHAO Rongzhou, HUANG Shirong, et al. Form-finding method of tensegrity structures with constrained supports [J]. *Journal of Shaoxing University*, 2018, 38 (8) : 72-81. DOI: 10.16169/j.issn.1008-293x.k.2018.08.012. (in Chinese)
- [18] ZHOU J Y, CHEN W J, HU J H, et al. Force finding of cable-strut structures using a symmetry-based method [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2019, 89 (8) : 1473-1484. DOI: 10.1007/s00419-019-01517-0.
- [19] 冯晓东, 周倩倩, 章万鹏, 等. 一种空间六杆张拉整体结构找形分析与设计 [J]. *西安建筑科技大学学报 (自然科学版)*, 2020, 52 (3) : 343-350. DOI: 10.15986/j.1006-7930.2020.03.006.
- FENG Xiaodong, ZHOU Qianqian, ZHANG Wanpeng, et al. A form finding analysis and design of a spatial six-bar tensegrity structure [J]. *Journal of Xi'an University of Architecture & Technology (Natural Science Edition)*, 2020, 52 (3) : 343-350. DOI: 10.15986/j.1006-7930.2020.03.006. (in Chinese)
- [20] 郭纹君, 阿衣尼格尔·艾尼瓦尔, 肖静楠, 等. 张拉整体结构找形方法在产品中的应用研究 [J]. *工业设计*, 2024 (1) : 40-43. DOI: 10.3969/j.issn.1672-7053.2024.01.022.
- GUO Wenjun, Ayinigeer·Ainiwaer, XIAO Jingnan, et al. Research on the application of tensegrity structures form-finding method in product design [J]. *Industrial Design*, 2024 (1) : 40-43. DOI: 10.3969/j.issn.1672-7053.2024.01.022. (in Chinese)
- [21] FENG X D, SHEN J, ZHAO W Y, et al. A novel method for optimizing energy absorption of tensegrities with multi-self-stress modes [J]. *Structures*, 2024, 64 : 106500. DOI: 10.1016/j.istruc.2024.106500.