

复辛空间中耗散子空间的充要条件*

苏文汇,姚斯琴

(内蒙古大学数学科学学院,呼和浩特 010021)

摘要:运用辛几何的方法研究了复辛空间中耗散子空间的刻画问题。从低维到高维,先探讨了 $\mathbb{C}^2$ 、 $\mathbb{C}^3$ 、 $\mathbb{C}^4$ 中线性子空间为耗散子空间的充要条件,最后讨论了一般 n 维复辛空间 $\mathbb{C}^n$ 中线性子空间为耗散子空间的充要条件。

关键词:复辛空间;耗散子空间;严格耗散子空间;耗散扩张

中图分类号:O175 **文献标志码:**A

微分算子是一类极具重要性且应用广泛的无界线性算子,对称微分算子各类扩张的刻画,尤其是自共轭扩张与耗散扩张的刻画是众多学者关注的研究方向^[1-7],而辛几何的方法是描述微分算子扩张的有效方法。1999年,Everitt等^[1]首次利用辛几何方法给出了对称微分算子的自伴扩张的完全描述。2014年,Yao等^[8]运用同样的方法研究了对称算子的耗散扩张问题,得到了由耗散扩张构成的集合与耗散子空间构成的集合之间存在一一对应关系的结论。2022年,刘婷等^[9]初步研究了复辛空间中耗散子空间的构造问题,给出了线性子空间为耗散子空间的充分条件。本文进一步探讨复辛空间中耗散子空间的刻画,分别给出了复辛空间 $\mathbb{C}^2$ 、 $\mathbb{C}^3$ 、 $\mathbb{C}^4$ 以及 $\mathbb{C}^n$ 中线性子空间为耗散子空间的充要条件。

1 预备知识

复辛空间是在其乘积空间上的复值函数 $[\cdot]$ 满足半双线性型和反埃尔米特型且为非退化的复线性空间。复值函数 $[\cdot]$ 称为辛形式,也可称为辛内积。下面给出耗散空间的相关定义和定理。

定义1^[10] 复辛空间 S 的线性子空间 D 是耗散的,若 $\Re[u : u] \geq 0$,对于 $\forall u \in D$,称复辛空间 S 的耗散子空间 D 是严格的;若 $\Re[u : u] > 0$,对于 $\forall u \in D, u \neq 0$,将严格耗散子空间记为 D_s 。

定义2^[10] 称耗散子空间 $D \subset S$ 是最大的耗散子空间,若对于任意的耗散子空间 $D^* \subset S$ 满足 $D \subseteq D^*$,都有 $D = D^*$ 。

引理1^[10] 设 S 是有限维复辛空间,正负指数为 (p, q) , $D \subset S$ 是 S 的耗散子空间且 $\dim D = r$,则

- (1) $r \leq p$;
- (2) 存在非奇异耗散子空间当且仅当 $p \neq 0$;
- (3) 当 $p \neq 0$ 时,耗散子空间 D 是最大的耗散子空间当且仅当 $\dim D = p$ 。

引理2^[10] 设 M 是一个一般的对称微分表达式,且 $\tilde{S} = D_{\max}/D_{\min}$ 是复辛空间,则

- (1) 由 M 的所有耗散扩张构成的集合 $\{T_D\}$ 与由复辛空间 $\tilde{S}$ 的所有耗散子空间构成的集合 $\{\tilde{D}\}$ 之

* 收稿日期:2025-10-31; 修回日期:2025-12-18

基金项目:国家自然科学基金项目(11801286);内蒙古自然科学基金项目(2018MS01021)

作者简介:苏文汇(2001—),女,辽宁昌图人,2023级硕士研究生。E-mail:1431250881@qq.com

通信作者:姚斯琴(1982—),女(蒙古族),内蒙古兴安盟人,副教授,博士。主要从事微分算子谱理论研究。

E-mail:siqinyao_math@126.com

间存在一一对应;

(2) 由 M 的所有严格耗散扩张构成的集合 $\{T_{sd}\}$ 与由复辛空间 $\tilde{S}$ 的所有严格耗散子空间构成的集合 $\{\tilde{D}_s\}$ 之间存在一一对应。

定义 3^[11] 令 A 是 n 阶 Hermite 矩阵, 若对于任意复 n 维列向量 $x \neq 0$ 都有 $x^H A x \geq 0$, 其中, x^H 表示 x 的共轭转置, 则称 A 为 Hermite 非负定(半正定)矩阵, 简称 A 为非负定(半正定)矩阵; 若对于任意复 n 维列向量 $x \neq 0$ 都有 $x^H A x > 0$, 则称 A 为 Hermite 正定矩阵, 简称 A 为正定矩阵。

引理 3^[11] Hermite 矩阵 A 是正定矩阵的充分必要条件是 A 的 n 个顺序主子式的值全为正数。

2 线性子空间为耗散子空间的完全刻画

从低维到高维研究复辛空间中线性子空间为耗散子空间和严格耗散子空间的充要条件。为了避免重复, 本章探讨复辛空间 $\mathbb{C}^2$ 、 $\mathbb{C}^3$ 、 $\mathbb{C}^4$ 中最大耗散子空间的刻画, 其他维数耗散子空间的刻画与之相似。

2.1 复辛空间 $S = \mathbb{C}^2$ 中耗散子空间的构造

定理 1 考虑复辛空间 $S = \mathbb{C}^2$, 正负指数为 $p = q = 1$ 。设 $\{u_1, v_1\}$ 是 S 的一组基且满足 $[u_1 : u_1] = i$, $[v_1 : v_1] = -i$, $[u_1 : v_1] = 0$ 。令 $D = \text{span}\{w\}$ 是 S 的线性子空间, 且 $w = au_1 + bv_1 (\forall a, b \in \mathbb{C})$, 则

(1) D 是耗散子空间当且仅当 $a\bar{a} - b\bar{b} \geq 0$;

(2) D 是严格耗散子空间当且仅当 $a\bar{a} - b\bar{b} > 0$ 。

证明 由于 $D = \text{span}\{w\}$ 是 $S = \text{span}\{u, v\}$ 的一维线性子空间, 则对于 $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\Im[\alpha w : \alpha w] = \Im[\alpha(au_1 + bv_1) : \alpha(au_1 + bv_1)] = \Im\alpha\bar{\alpha}(a\bar{a}[u_1 : u_1] + b\bar{b}[v_1 : v_1]) = \Im\alpha\bar{\alpha}[(a\bar{a} - b\bar{b})i] = |\alpha|^2(a\bar{a} - b\bar{b})$ 。

由定义 1 可知, D 是耗散子空间当且仅当对于 $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, 有 $\Im[\alpha w : \alpha w] \geq 0$, 即当且仅当 $a\bar{a} - b\bar{b} \geq 0$ 。同样可知, D 是严格耗散子空间当且仅当 $a\bar{a} - b\bar{b} > 0$ 。

定理 2 考虑复辛空间 $S = \mathbb{C}^2$, 正负指数为 $p = 2, q = 0$ 。设 $\{u_1, u_2\}$ 是 S 的一组基且满足 $[u_1 : u_1] = i$, $[u_2 : u_2] = i$, 其他辛内积都为 0。令 $D = \text{span}\{w_1, w_2\}$ 是 S 的线性子空间, 且 $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $a_{ij} \in \mathbb{C}, i, j = 1, 2$ 。记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 且 $\text{rank}(A) = 2$, 则

(1) D 是耗散子空间当且仅当 AA^* 是半正定矩阵;

(2) D 是严格耗散子空间当且仅当 AA^* 是正定矩阵。

证明 由于 $D = \text{span}\{w_1, w_2\}$ 是 $S = \text{span}\{u_1, u_2\}$ 的二维线性子空间, 则对于 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 令 $w = \alpha w_1 + \beta w_2$, 则有

$$\begin{aligned} \Im[w : w] &= \Im[\alpha w_1 + \beta w_2 : \alpha w_1 + \beta w_2] \\ &= \Im(\alpha\bar{\alpha}[w_1 : w_1] + \alpha\bar{\beta}[w_1 : w_2] + \beta\bar{\alpha}[w_2 : w_1] + \beta\bar{\beta}[w_2 : w_2]) \\ &= \alpha\bar{\alpha}(a_{11}\bar{a}_{11} + a_{12}\bar{a}_{12}) + \alpha\bar{\beta}(a_{11}\bar{a}_{21} + a_{12}\bar{a}_{22}) + \beta\bar{\alpha}(a_{21}\bar{a}_{11} + a_{22}\bar{a}_{12}) + \beta\bar{\beta}(a_{21}\bar{a}_{21} + a_{22}\bar{a}_{22}), \end{aligned}$$

由于 $AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\bar{a}_{11} + a_{12}\bar{a}_{12} & a_{11}\bar{a}_{21} + a_{12}\bar{a}_{22} \\ a_{21}\bar{a}_{11} + a_{22}\bar{a}_{12} & a_{21}\bar{a}_{21} + a_{22}\bar{a}_{22} \end{pmatrix}$, 则有 $\Im[w : w] = (\alpha \ \beta) AA^* \begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}$ 。

由定义 1 及定义 3 可知, D 是耗散子空间当且仅当对于 $\forall w \in D$, 有 $\Im[w : w] \geq 0$, 即当且仅当 AA^* 为半正定矩阵。同样可知, D 是严格耗散子空间当且仅当 AA^* 为正定矩阵。

2.2 复辛空间 $S = \mathbb{C}^3$ 中耗散子空间的构造

定理 3 考虑复辛空间 $S = \mathbb{C}^3$, 正负指数为 $p = 1, q = 2$ 。设 $\{u_1, v_1, v_2\}$ 是 S 的一组基且满足

$[u_1 : u_1] = i, [v_1 : v_1] = -i, [v_2 : v_2] = -i$, 其他辛内积都为0。令 $D = \text{span}\{w\}$ 是 S 的线性子空间, 且 $w = au_1 + b_1v_1 + b_2v_2, \forall a, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$, 则

- (1) D 是耗散子空间当且仅当 $a\bar{a} - b_1\bar{b}_1 - b_2\bar{b}_2 \geq 0$;
 (2) D 是严格耗散子空间当且仅当 $a\bar{a} - b_1\bar{b}_1 - b_2\bar{b}_2 > 0$ 。

证明 由于 $D = \text{span}\{w\}$ 是 $S = \text{span}\{u_1, v_1, v_2\}$ 的一维线性子空间, 则对于 $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, 有

$$\begin{aligned}\Im[\alpha w : \alpha w] &= \Im[\alpha(au_1 + b_1v_1 + b_2v_2) : \alpha(au_1 + b_1v_1 + b_2v_2)] \\ &= \Im\alpha\bar{\alpha}(a\bar{a}[u_1 : u_1] + b_1\bar{b}_1[v_1 : v_1] + b_2\bar{b}_2[v_2 : v_2]) \\ &= \Im\alpha\bar{\alpha}[(a\bar{a} - b_1\bar{b}_1 - b_2\bar{b}_2)i] \\ &= |\alpha|^2(a\bar{a} - b_1\bar{b}_1 - b_2\bar{b}_2)_{\circ}\end{aligned}$$

由定义1可知, D 是耗散子空间当且仅当对于 $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, 有 $\Im[\alpha w : \alpha w] \geq 0$, 即当且仅当 $(a\bar{a} - b_1\bar{b}_1 - b_2\bar{b}_2) \geq 0$ 。同样可知, D 是严格耗散子空间当且仅当 $(a\bar{a} - b_1\bar{b}_1 - b_2\bar{b}_2) > 0$ 。

定理4 考虑复辛空间 $S = \mathbb{C}^3$, 正负指数为 $p=2, q=1$ 。设 $\{u_1, u_2, v_1\}$ 是 S 的一组基且满足 $[u_1 : u_1] = i, [u_2 : u_2] = i, [v_1 : v_1] = -i$, 其他辛内积都为0。令 $D = \text{span}\{w_1, w_2\}$ 是 S 的线性子空间, 且 $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} v_1$, 其中 $a_{ij}, b_i \in \mathbb{C}, i, j = 1, 2$ 。记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, 且 $\text{rank}(A) = 2$, 则

- (1) D 是耗散子空间当且仅当 $AA^* - BB^*$ 是半正定矩阵;
 (2) D 是严格耗散子空间当且仅当 $AA^* - BB^*$ 是正定矩阵。

证明 由于 $D = \text{span}\{w_1, w_2\}$ 是 $S = \text{span}\{u_1, u_2, v_1\}$ 的二维线性子空间, 那么对于 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 令 $w = \alpha w_1 + \beta w_2$, 有

$$\begin{aligned}\Im[w : w] &= \Im[\alpha w_1 + \beta w_2 : \alpha w_1 + \beta w_2] \\ &= \Im(\alpha\bar{\alpha}[w_1 : w_1] + \alpha\bar{\beta}[w_1 : w_2] + \beta\bar{\alpha}[w_2 : w_1] + \beta\bar{\beta}[w_2 : w_2]) \\ &= \alpha\bar{\alpha}(a_{11}\bar{a}_{11} + a_{12}\bar{a}_{12} - b_1\bar{b}_1) + \alpha\bar{\beta}(a_{11}\bar{a}_{21} + a_{12}\bar{a}_{22} - b_1\bar{b}_2) + \beta\bar{\alpha}(a_{21}\bar{a}_{11} + a_{22}\bar{a}_{12} - b_2\bar{b}_1) \\ &\quad + \beta\bar{\beta}(a_{21}\bar{a}_{21} + a_{22}\bar{a}_{22} - b_2\bar{b}_2)_{\circ}\end{aligned}$$

由于

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\bar{a}_{11} + a_{12}\bar{a}_{12} & a_{11}\bar{a}_{21} + a_{12}\bar{a}_{22} \\ a_{21}\bar{a}_{11} + a_{22}\bar{a}_{12} & a_{21}\bar{a}_{21} + a_{22}\bar{a}_{22} \end{pmatrix}, BB^* = \begin{pmatrix} b_1\bar{b}_1 & b_1\bar{b}_2 \\ b_2\bar{b}_1 & b_2\bar{b}_2 \end{pmatrix},$$

则有

$$\Im[w : w] = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} (AA^* - BB^*) \begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}.$$

由定义1及定义3可知, D 是耗散子空间当且仅当对于 $\forall w \in D$, 有 $\Im[w : w] \geq 0$, 即当且仅当 $AA^* - BB^*$ 为半正定矩阵。同样可知, D 是严格耗散子空间当且仅当 $AA^* - BB^*$ 为正定矩阵。

定理5 考虑复辛空间 $S = \mathbb{C}^3$, 正负指数为 $p=3, q=0$ 。设 $\{u_1, u_2, u_3\}$ 是 S 的一组基且满足 $[u_1 : u_1] = i, [u_2 : u_2] = i, [u_3 : u_3] = i$, 其他辛内积都为0。令 $D = \text{span}\{w_1, w_2, w_3\}$ 是 S 的线性子空间, 且

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{C}, i, j = 1, 2, 3_{\circ}$$

记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, 且 $\text{rank}(A) = 3$, 则

(1) D 是耗散子空间当且仅当 AA^* 是半正定矩阵;

(2) D 是严格耗散子空间当且仅当 AA^* 是正定矩阵。

证明 由于 $D = \text{span}\{w_1, w_2, w_3\}$ 是 $S = \text{span}\{u_1, u_2, u_3\}$ 的三维线性子空间, 则对于 $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, 令 $w = \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3$, 则有

$$\begin{aligned} \Im[w : w] &= \Im[\alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 : \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3] \\ &= \Im(\alpha \bar{\alpha}[w_1 : w_1] + \alpha \bar{\beta}[w_1 : w_2] + \alpha \bar{\gamma}[w_1 : w_3] + \beta \bar{\alpha}[w_2 : w_1] + \beta \bar{\beta}[w_2 : w_2] \\ &\quad + \beta \bar{\gamma}[w_2 : w_3] + \gamma \bar{\alpha}[w_3 : w_1] + \gamma \bar{\beta}[w_3 : w_2] + \gamma \bar{\gamma}[w_3 : w_3]) \\ &= \Im[\alpha \bar{\alpha}(a_{11}\bar{a}_{11} + a_{12}\bar{a}_{12} + a_{13}\bar{a}_{13})i + \alpha \bar{\beta}(a_{11}\bar{a}_{21} + a_{12}\bar{a}_{22} + a_{13}\bar{a}_{23})i \\ &\quad + \alpha \bar{\gamma}(a_{11}\bar{a}_{31} + a_{12}\bar{a}_{32} + a_{13}\bar{a}_{33})i + \beta \bar{\alpha}(a_{21}\bar{a}_{11} + a_{22}\bar{a}_{12} + a_{23}\bar{a}_{13})i \\ &\quad + \beta \bar{\beta}(a_{21}\bar{a}_{21} + a_{22}\bar{a}_{22} + a_{23}\bar{a}_{23})i + \beta \bar{\gamma}(a_{21}\bar{a}_{31} + a_{22}\bar{a}_{32} + a_{23}\bar{a}_{33})i \\ &\quad + \gamma \bar{\alpha}(a_{31}\bar{a}_{11} + a_{32}\bar{a}_{12} + a_{33}\bar{a}_{13})i + \gamma \bar{\beta}(a_{31}\bar{a}_{21} + a_{32}\bar{a}_{22} + a_{33}\bar{a}_{23})i \\ &\quad + \gamma \bar{\gamma}(a_{31}\bar{a}_{31} + a_{32}\bar{a}_{32} + a_{33}\bar{a}_{33})i]。 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} AA^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{31} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{32} \\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}\bar{a}_{11} + a_{12}\bar{a}_{12} + a_{13}\bar{a}_{13} & a_{11}\bar{a}_{21} + a_{12}\bar{a}_{22} + a_{13}\bar{a}_{23} & a_{11}\bar{a}_{31} + a_{12}\bar{a}_{32} + a_{13}\bar{a}_{33} \\ a_{21}\bar{a}_{11} + a_{22}\bar{a}_{12} + a_{23}\bar{a}_{13} & a_{21}\bar{a}_{21} + a_{22}\bar{a}_{22} + a_{23}\bar{a}_{23} & a_{21}\bar{a}_{31} + a_{22}\bar{a}_{32} + a_{23}\bar{a}_{33} \\ a_{31}\bar{a}_{11} + a_{32}\bar{a}_{12} + a_{33}\bar{a}_{13} & a_{31}\bar{a}_{21} + a_{32}\bar{a}_{22} + a_{33}\bar{a}_{23} & a_{31}\bar{a}_{31} + a_{32}\bar{a}_{32} + a_{33}\bar{a}_{33} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

则有

$$\Im[w : w] = (\alpha \quad \beta \quad \gamma) AA^* \begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} \end{pmatrix}。$$

由定义 1 及定义 3 可知, D 是耗散子空间当且仅当对于 $\forall w \in D$, 有 $\Im[w : w] \geq 0$, 即当且仅当 AA^* 为半正定矩阵。同样可知, D 是严格耗散子空间当且仅当 AA^* 为正定矩阵。

2.3 复辛空间 $S = \mathbb{C}^4$ 中耗散子空间的构造

为了避免重复, 本节只对复辛空间 $S = \mathbb{C}^4$ 中正负指数为 $p = q = 2$ 的情况进行讨论, 正负指数为其他的情况可以参考 2.1 节和 2.2 节的证明。

定理 6 考虑复辛空间 $S = \mathbb{C}^4$, 正负指数为 $p = q = 2$ 。设 $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ 是 S 的一组基且满足 $[u_1 : u_1] = i, [u_2 : u_2] = i, [v_1 : v_1] = -i, [v_2 : v_2] = -i$, 其他辛内积都为 0。令 $D = \text{span}\{w_1, w_2\}$ 是 S 的线性子空间, 且 $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}, i, j = 1, 2$ 。记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, 且 $\text{rank}(A) = 2$, 则

(1) D 是耗散子空间当且仅当 $AA^* - BB^*$ 是半正定矩阵;

(2) D 是严格耗散子空间当且仅当 $AA^* - BB^*$ 是正定矩阵。

证明 由于 $D = \text{span}\{w_1, w_2\}$ 是 $S = \text{span}\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ 的二维线性子空间, 那么对于 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 令 $w = \alpha w_1 + \beta w_2$, 则有

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}[w : w] &= \mathfrak{S}[\alpha w_1 + \beta w_2 : \alpha w_1 + \beta w_2] \\ &= \mathfrak{S}(\alpha \bar{\alpha}[w_1 : w_1] + \alpha \bar{\beta}[w_1 : w_2] + \beta \bar{\alpha}[w_2 : w_1] + \beta \bar{\beta}[w_2 : w_2]) \\ &= \alpha \bar{\alpha}(a_{11}\bar{a}_{11} + a_{12}\bar{a}_{12} - b_{11}\bar{b}_{11} - b_{12}\bar{b}_{12}) + \alpha \bar{\beta}(a_{11}\bar{a}_{21} + a_{12}\bar{a}_{22} - b_{11}\bar{b}_{21} - b_{12}\bar{b}_{22}) \\ &\quad + \beta \bar{\alpha}(a_{21}\bar{a}_{11} + a_{22}\bar{a}_{12} - b_{21}\bar{b}_{11} - b_{22}\bar{b}_{12}) + \beta \bar{\beta}(a_{21}\bar{a}_{21} + a_{22}\bar{a}_{22} - b_{21}\bar{b}_{21} - b_{22}\bar{b}_{22}).\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}AA^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\bar{a}_{11} + a_{12}\bar{a}_{12} & a_{11}\bar{a}_{21} + a_{12}\bar{a}_{22} \\ a_{21}\bar{a}_{11} + a_{22}\bar{a}_{12} & a_{21}\bar{a}_{21} + a_{22}\bar{a}_{22} \end{pmatrix}, \\ BB^* &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_{11} & \bar{b}_{21} \\ \bar{b}_{12} & \bar{b}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}\bar{b}_{11} + b_{12}\bar{b}_{12} & b_{11}\bar{b}_{21} + b_{12}\bar{b}_{22} \\ b_{21}\bar{b}_{11} + b_{22}\bar{b}_{12} & b_{21}\bar{b}_{21} + b_{22}\bar{b}_{22} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

则有

$$\mathfrak{S}[w : w] = (\alpha \quad \beta)(AA^* - BB^*) \begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}.$$

由定义1及定义3可知, D 是耗散子空间当且仅当对于 $\forall w \in D$, 有 $\mathfrak{S}[w : w] \geq 0$, 即当且仅当 $AA^* - BB^*$ 为半正定矩阵。同样可知, D 是严格耗散子空间当且仅当 $AA^* - BB^*$ 为正定矩阵。

3 复辛空间 $S = \mathbb{C}^n$ 中耗散子空间的刻画

将所研究问题推广到一般的 n 维空间 $S = \mathbb{C}^n$ 中, 探讨 m ($m \leq p$) 维线性子空间为耗散子空间以及严格耗散子空间的充要条件, 其中, 当 $m = p$ 时, D 为 S 的最大耗散子空间。

定理7 考虑复辛空间 $S = \mathbb{C}^n$, 正负指数为 (p, q) , 其中 $p > 0$ 。设 $\{u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_q\}$ 是 S 的一组基且满足 $[u_k : u_k] = i, [v_j : v_j] = -i, k = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, q$, 其他辛内积都为0。令 $D = \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ 是复辛空间 S 的 m ($m \leq p$) 维线性子空间, 且

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_q \end{pmatrix},$$

记 $A = (a_{ij})_{m \times p}, B = (b_{ij})_{m \times q}$, 其中 $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}, 1 \leq i, j \leq \max\{p, q\}$ 且 $\text{rank}(A) = m$ 。则

- (1) D 是耗散子空间当且仅当 $AA^* - BB^*$ 是半正定矩阵;
- (2) D 是严格耗散子空间当且仅当 $AA^* - BB^*$ 是正定矩阵。

证明 由于 $D = \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ 是 S 的 m 维线性子空间, 且

$$(w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_m)^T = A(u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_p)^T + B(v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_q)^T,$$

那么对于 $1 \leq j, k \leq m$, 有

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}[w_j : w_k] &= \mathfrak{S}\left[\left(\sum_{i=1}^p a_{ji}u_i + \sum_{i=1}^q b_{ji}v_i\right) : \left(\sum_{i=1}^p a_{ki}u_i + \sum_{i=1}^q b_{ki}v_i\right)\right] \\ &= \mathfrak{S}[(a_{j1}\bar{a}_{k1} + a_{j2}\bar{a}_{k2} + \cdots + a_{jp}\bar{a}_{kp} - b_{j1}\bar{b}_{k1} - b_{j2}\bar{b}_{k2} - \cdots - b_{jq}\bar{b}_{kq})i] \\ &= \sum_{i=1}^p a_{ji}\bar{a}_{ki} - \sum_{i=1}^q b_{ji}\bar{b}_{ki}.\end{aligned}$$

对于 $\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$, 令 $w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_m w_m$, 有

$$\begin{aligned} \Im[w : w] &= \Im[\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_m w_m : \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_m w_m] \\ &= \Im(\alpha_1 \overline{\alpha_1} [w_1 : w_1] + \alpha_1 \overline{\alpha_2} [w_1 : w_2] + \dots + \alpha_1 \overline{\alpha_m} [w_1 : w_m] \\ &\quad + \alpha_2 \overline{\alpha_1} [w_2 : w_1] + \alpha_2 \overline{\alpha_2} [w_2 : w_2] + \dots + \alpha_2 \overline{\alpha_m} [w_2 : w_m] \\ &\quad + \dots + \alpha_m \overline{\alpha_1} [w_m : w_1] + \alpha_m \overline{\alpha_2} [w_m : w_2] + \dots + \alpha_m \overline{\alpha_m} [w_m : w_m]) \\ &= \alpha_1 \overline{\alpha_1} \left(\sum_{i=1}^p a_{1i} \overline{a_{1i}} - \sum_{i=1}^q b_{1i} \overline{b_{1i}} \right) + \dots + \alpha_1 \overline{\alpha_m} \left(\sum_{i=1}^p a_{1i} \overline{a_{mi}} - \sum_{i=1}^q b_{1i} \overline{b_{mi}} \right) \\ &\quad + \alpha_2 \overline{\alpha_1} \left(\sum_{i=1}^p a_{2i} \overline{a_{1i}} - \sum_{i=1}^q b_{2i} \overline{b_{1i}} \right) + \dots + \alpha_2 \overline{\alpha_m} \left(\sum_{i=1}^p a_{2i} \overline{a_{mi}} - \sum_{i=1}^q b_{2i} \overline{b_{mi}} \right) \\ &\quad + \dots + \alpha_m \overline{\alpha_m} \left(\sum_{i=1}^p a_{mi} \overline{a_{mi}} - \sum_{i=1}^q b_{mi} \overline{b_{mi}} \right) \\ &= \sum_j^m \sum_k^m \alpha_j \overline{\alpha_k} \left(\sum_{i=1}^p a_{ji} \overline{a_{ki}} - \sum_{i=1}^q b_{ji} \overline{b_{ki}} \right). \end{aligned}$$

由于

$$AA^* = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p a_{1i} \overline{a_{1i}} & \sum_{i=1}^p a_{1i} \overline{a_{2i}} & \dots & \sum_{i=1}^p a_{1i} \overline{a_{mi}} \\ \sum_{i=1}^p a_{2i} \overline{a_{1i}} & \sum_{i=1}^p a_{2i} \overline{a_{2i}} & \dots & \sum_{i=1}^p a_{2i} \overline{a_{mi}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^p a_{mi} \overline{a_{1i}} & \sum_{i=1}^p a_{mi} \overline{a_{2i}} & \dots & \sum_{i=1}^p a_{mi} \overline{a_{mi}} \end{pmatrix}, BB^* = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^q b_{1i} \overline{b_{1i}} & \sum_{i=1}^q b_{1i} \overline{b_{2i}} & \dots & \sum_{i=1}^q b_{1i} \overline{b_{mi}} \\ \sum_{i=1}^q b_{2i} \overline{b_{1i}} & \sum_{i=1}^q b_{2i} \overline{b_{2i}} & \dots & \sum_{i=1}^q b_{2i} \overline{b_{mi}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^q b_{mi} \overline{b_{1i}} & \sum_{i=1}^q b_{mi} \overline{b_{2i}} & \dots & \sum_{i=1}^q b_{mi} \overline{b_{mi}} \end{pmatrix},$$

则有

$$\Im[w : w] = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_m) (AA^* - BB^*) \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \overline{\alpha_2} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_m} \end{pmatrix}.$$

由定义 1 及定义 3 可知, D 是耗散子空间当且仅当对于 $\forall w \in D$, 有 $\Im[w : w] \geq 0$, 即当且仅当 $AA^* - BB^*$ 为半正定矩阵。同样可知, D 是严格耗散子空间当且仅当 $AA^* - BB^*$ 为正定矩阵。

引理 4^[10] 在辛形式为 $[\cdot : \cdot]$ 的有限维复辛空间 S 中, 设 D 是 S 的 r 维复辛空间, 令 $D_L = \{u \in D \mid [u : u] = 0\} \subseteq D$, 是 D 中所有 Lagrangian 元素构成的空间, 则 D_L 为 S 的 Lagrangian 子空间。

引理 5^[10] 令引理 4 中的符号和假设成立, 设 D 是 S 的非严格耗散子空间, 则存在 D 的一组基 $\{e_1, \dots, e_{r_s}, a_1, \dots, a_{r_l}\}$, $r_s + r_l = r$, 使得

(1) $D_L = \text{span}\{a_1, \dots, a_{r_l}\}$ 是 Lagrangian 子空间, $D_s = \text{span}\{e_1, \dots, e_{r_s}\}$ 是严格耗散子空间, 且 $[D_s : D_L] = 0$;

(2) 由 S 诱导的 D 中的辛内积所对应的反-Hermitian 矩阵为 $H_D = \begin{pmatrix} iI_{r_s} & 0 \\ 0 & 0_{r_l \times r_l} \end{pmatrix}$ 。

定义4 设 S 是有限维复辛空间,辛形式为 $[\cdot, \cdot]$,正负指数为 (p, q) 。设 $D \subseteq S$ 是 S 的耗散子空间且 $\dim D = r (r \leq p)$,若 D 中线性无关的耗散元素的个数为 r_s ,则称 r_s 为耗散子空间 D 的耗散阶,称 D 为 S 的 r_s 阶 r 维耗散子空间。

注1 对于引理5中的 r 维耗散子空间 D ,有以下结论:

- (1) 当 $r_s = r$ 时, D 是 S 的严格耗散子空间;
- (2) 当 $r_s < r$ 时, D 是 S 的非严格耗散子空间且 $r - r_s = r_L$;
- (3) 当 $r_s = 0$ 时, D 是 S 的Lagrangian子空间。

定理8 令定理7和引理5中的符号与假设都成立,设 $D = \text{span}\{e_1, \dots, e_{r_s}, a_1, \dots, a_{r_L}\}$ 是复辛空间 S 的 r_s 阶 r 维耗散子空间。令

$$(e_1, \dots, e_{r_s}, a_1, \dots, a_{r_L})^T = A(u_1, \dots, u_p)^T + B(v_1, \dots, v_q)^T,$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r_s 1} & \cdots & a_{r_s p} \\ \widetilde{a_{11}} & \cdots & \widetilde{a_{1p}} \\ \vdots & & \vdots \\ \widetilde{a_{r_L 1}} & \cdots & \widetilde{a_{r_L p}} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r_s 1} & \cdots & b_{r_s q} \\ \widetilde{b_{11}} & \cdots & \widetilde{b_{1q}} \\ \vdots & & \vdots \\ \widetilde{b_{r_L 1}} & \cdots & \widetilde{b_{r_L q}} \end{pmatrix},$$

记 $A_{sD} = (a_{ij})_{r_s \times p}$, $A_L = (\widetilde{a_{ij}})_{r_L \times p}$, $B_{sD} = (b_{ij})_{r_s \times q}$, $B_L = (\widetilde{b_{ij}})_{r_L \times q}$, 则

$$AA^* - BB^* = \begin{pmatrix} A_{sD}A_{sD}^* - B_{sD}B_{sD}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

且 $A_{sD}A_{sD}^* - B_{sD}B_{sD}^*$ 为正定矩阵。

证明 由于 $D = \text{span}\{e_1, \dots, e_{r_s}, a_1, \dots, a_{r_L}\}$ 且

$$(e_1 \quad \cdots \quad e_{r_s} \quad a_1 \quad \cdots \quad a_{r_L})^T = \begin{pmatrix} A_{sD} \\ A_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{sD} \\ B_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_q \end{pmatrix},$$

由引理5可知, $[a_i : a_k] = 0, [a_i : e_j] = 0 (1 \leq i, k \leq r_L, 1 \leq j \leq r_s)$, 对于 $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_{r_s}, \beta_1, \dots, \beta_{r_L} \in \mathbb{C}$, 令 $w = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{r_s} e_{r_s} + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{r_L} a_{r_L}$, 则

$$\begin{aligned} \Re[w : w] &= \Re(\alpha_1 \overline{\alpha_1} [e_1 : e_1] + \alpha_1 \overline{\alpha_2} [e_1 : e_2] + \cdots + \alpha_1 \overline{\alpha_{r_s}} [e_1 : e_{r_s}] + 0 + \cdots + 0 \\ &\quad + \alpha_2 \overline{\alpha_1} [e_2 : e_1] + \alpha_2 \overline{\alpha_2} [e_2 : e_2] + \cdots + \alpha_2 \overline{\alpha_{r_s}} [e_2 : e_{r_s}] + 0 + \cdots + 0 \\ &\quad + \cdots + \alpha_{r_s} \overline{\alpha_1} [e_{r_s} : e_1] + \alpha_{r_s} \overline{\alpha_2} [e_{r_s} : e_2] + \cdots + \alpha_{r_s} \overline{\alpha_{r_s}} [e_{r_s} : e_{r_s}] + 0 + \cdots + 0) \end{aligned}$$

$$= (\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_{r_s} \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{r_L}) (AA^* - BB^*) \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_{r_s}} \\ \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_{r_L}} \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}
AA^* - BB^* &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p a_{1i} \overline{a_{1i}} - \sum_{i=1}^q b_{1i} \overline{b_{1i}} & \cdots & \sum_{i=1}^p a_{1i} \overline{a_{rsi}} - \sum_{i=1}^q b_{1i} \overline{b_{rsi}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^p a_{rsi} \overline{a_{1i}} - \sum_{i=1}^q b_{rsi} \overline{b_{1i}} & \cdots & \sum_{i=1}^p a_{rsi} \overline{a_{rsi}} - \sum_{i=1}^q b_{rsi} \overline{b_{rsi}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{sD} A_{sD}^* - B_{sD} B_{sD}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^o
\end{aligned}$$

由引理 5 可知, $D_S = \text{span}\{e_1, \dots, e_{r_s}\}$ 是严格耗散子空间, 其中 $\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{r_s} \end{pmatrix} = A_{sD} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} + B_{sD} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_q \end{pmatrix}$, 由定理 7 可

知, $A_{sD} A_{sD}^* - B_{sD} B_{sD}^*$ 为正定矩阵。

4 例子

下面给出 2 个复辛空间 $S = \mathbb{C}^4$ 中耗散子空间的例子。

例 1 设 $S = \mathbb{C}^4$ 是正负指数为 $p = q = 2$ 的复辛空间, 且基 $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ 满足 $[u_1 : u_1] = i$, $[u_2 : u_2] = i$, $[v_1 : v_1] = -i$, $[v_2 : v_2] = -i$, 其他辛内积为 0。令 $D = \text{span}\{w_1, w_2\}$ 是 S 的线性子空间, 其中, $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ 且 $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 1 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, 则 D 是耗散子空间。

证明 由于

$$\begin{aligned}
AA^* &= \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}, \\
BB^* &= \begin{pmatrix} i & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

则有 $AA^* - BB^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 那么 $AA^* - BB^*$ 是半正定矩阵。因此, 根据定理 6 可知, D 是 S 的一阶二维耗散子空间。

例 2 设 $S = \mathbb{C}^4$ 是正负指数为 $p = q = 2$ 的复辛空间, 且基 $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ 满足 $[u_1 : u_1] = i$, $[u_2 : u_2] = i$, $[v_1 : v_1] = -i$, $[v_2 : v_2] = -i$, 其他辛内积为 0。令 $D = \text{span}\{w_1, w_2\}$ 是 S 的线性子空间, 其中, $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, 且 $A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 2+i & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, 则 D 是严格耗散子空间。

证明 由于

$$\begin{aligned}
AA^* &= \begin{pmatrix} i & 2 \\ 2+i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 2-i \\ 2 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1+4i \\ 1-4i & 6 \end{pmatrix}, \\
BB^* &= \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

则有 $AA^* - BB^* = \begin{pmatrix} 3 & 1+2i \\ 1-2i & 4 \end{pmatrix}$, 那么根据引理 3 可知, $AA^* - BB^*$ 是正定矩阵。再由定理 6 可知, D 是 S 的严格耗散子空间。

参考文献:

- [1] Everitt W N, Markus L. Complex symplectic geometry with applications to ordinary differential operators[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1999, 351(12): 4905-4945.
- [2] Hao X L, Sun J, Wang A P, et al. Characterization of domains of self-adjoint ordinary differential operators II [J]. Results in Mathematics, 2012, 61(3): 255-281.
- [3] Wang T, Ao J J, Yang M C. A classification of fourth-order dissipative differential operators[J]. Journal of Function Spaces, 2020, 2020: 1-9.
- [4] Arendt W, Chalendar I, Eymard R. Extensions of dissipative and symmetric operators[J]. Semigroup Forum, 2023, 106: 339-367.
- [5] Arlinskiĭ Y M. Compressions of selfadjoint and maximal dissipative extensions of non-densely defined symmetric operators[J]. Integral Equations and Operator Theory, 2025, 97(1): 6.
- [6] Rios-Cangas J I, Silva L O. Dissipative extension theory for linear relations[J]. Expositiones Mathematicae, 2020, 38(1): 60-90.
- [7] Yao S Q, Sun J, Zettl A. Self-adjoint domains, symplectic geometry, and limit-circle solutions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 397(2): 644-657.
- [8] Yao S Q, Sun J, Zettl A. Symplectic geometry and dissipative differential operators[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2014, 414(1): 434-449.
- [9] 刘婷, 姚斯琴. 复辛空间中完全 Lagrangian 子空间的构造[D]. 呼和浩特: 内蒙古大学, 2022.
- [10] 姚斯琴. 对称微分算子的几类扩张问题[D]. 呼和浩特: 内蒙古大学, 2013.
- [11] 程云鹏, 张凯院, 徐仲. 矩阵论[M]. 4版. 西安: 西北工业大学出版社, 1999: 360-370.

(责任编辑 李 宏)

The Necessary and Sufficient Conditions for Dissipative Subspaces in Complex Symplectic Spaces

SU Wenhui, YAO Siqin

(*School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China*)

Abstract: The characterization problem of dissipative subspaces in complex symplectic spaces is researched via symplectic geometry. From low dimensions to high dimensions, the necessary and sufficient conditions for linear subspaces to be dissipative subspaces are first explored in $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}^3$ and $\mathbb{C}^4$. Finally, the necessary and sufficient conditions for linear subspaces to be dissipative subspaces in the general n -dimensional complex symplectic space $\mathbb{C}^n$ are discussed.

Key words: complex symplectic space; dissipative subspace; strictly dissipative subspace; dissipative extension