DOI:10.26974/j.cnki.XBGC.2026.02.003

缺口型柔性铰链柔度闭式解的建立与验证方法

莫钊郁， 魏华贤*， 陈俊强， 杨凡骁， 蔡昭寅
(汕头大学 工学院,广东 汕头 515063)

摘 要:现有缺口型柔性铰链的柔度闭式解虽已广泛明确且成熟,但鲜有针对其建立过程与验证方法的详细论述。为了解决新型柔铰设计开发时存在理论计算参考不足的问题,基于经典材料力学中等截面梁与变截面梁在线性小变形条件下的变形分析过程与方法,详述了应用积分法建立缺口型柔性铰链柔度闭式解的过程,进一步开展了有限元分析与实验测试。结果表明,闭式解与有限元结果和实验结果的误差分别约为7%和6%。

关键词:柔性铰链;柔顺机构;柔度方程;闭式解;变截面梁
中图分类号:TH112 **文献标志码**:A

柔顺机构(亦称柔性机构)是现代机构学研究的重要领域,其通过自身全部或部分结构的弹性变形实现运动、能量或力的传递与转换,具备体积小、无间隙、无摩擦、成本低、无需润滑且免装配等优势,在精密运动定位、高频伺服阀、激光操纵、多维测力传感器及微纳器件等领域有着广泛应用[1-7]。柔性铰链(柔铰)是柔顺机构的基本运动副单元,现已发展出多种结构类型,其中缺口型柔铰集成度高、设计与制造简便,研究及应用最为广泛。柔铰是通过自身材料弹性变形产生相对运动的联接结构,兼具机构与结构双重属性,因此明确其受载与结构变形的刚柔度特性是开展机构设计与分析的重要基础,国内外众多学者对此展开了深入研究。早在1965年,Paros等[8]对缺口型柔铰的柔度计算理论进行了系统研究,建立了理论计算公式,并给出了工程应用的简化公式,但其精度随着铰链厚度的增加而降低。为此,吴鹰飞等[9-10]进一步给出了一般柔铰柔度公式的精确解,与Paros等学者所建模型保持了较高的一致性,为柔铰小变形条件下的理论分析方法与过程构建了框架基础。

近年来,随着柔铰设计技术与应用领域的快速拓展,理论计算公式对工程应用发挥了积极作用。例如,Yong[11]等基于有限元分析建立了正圆缺口型柔铰的柔度经验公式,提升了计算精度与适用范围;Lobontiu等[12-14]、Smith等[15]以及陈贵敏等[16-18]针对直梁型、椭圆型与抛物线型等常用的柔铰结构推导了柔度闭式方程,可快速比较不同构型的特性差异,为不同应用场景提供优化选择,受到广泛关注。这说明易于工程应用的设计公式具有重要意义。但随着柔铰结构日益丰富与复杂,分析理论与方法面临新的挑战。朱本亮等[19-21]基于拓扑优化开展了柔铰结构的创新设计,发现并提出了孔洞型等新型结构;魏华贤等[22-24]提出了一类基于椭圆横截面的新型柔铰结构,建立了其柔度、精度与应力的理论计算模型,拓展了缺口型柔铰的结构体系。由于部分新型柔铰结构复杂而难以获得显式公式,朱志伟等[25]、凌明祥等[26-28]研究了柔度离散计算方法,可实现复杂构型柔铰的计算分析,但线弹性梁理论仍是柔铰小变形计算分析的基础。

目前,缺口型柔铰的柔度公式已较为成熟,如何通过有限次标准运算获得其柔度闭式表达式,是明确柔度特性与结构参数关联性、理解柔铰机构-结构

收稿日期:2025-03-13
基金项目:国家自然科学基金青年科学基金项目(52305027);中央引导地方科技发展专项基金项目(STKJ2024080);汕头市科技专项(STKJ2025002);教育部产学合作协同育人项目(241006517305935);广东省研究生教育创新计划项目(2025JGXM_068)
作者简介:莫钊郁(1999—),男,硕士研究生,主要从事柔顺机构研究(24zymo@stu.edu.cn)。
* **通信作者**:魏华贤(1989—),男,副教授,博士,主要从事柔顺机构与智能机电系统研究(hxwei@stu.edu.cn)。
引用格式:莫钊郁,魏华贤,陈俊强,等.缺口型柔性铰链柔度闭式解的建立与验证方法[J].西北工程技术学报(中英文),2026,25(2):120-128,136.

双重属性及开展性能优化的重要基础。柔铰本质上可视为变截面梁结构,与材料力学理论中的经典梁结构既有联系又有区别,梁的受力变形分析理论与方法是研究柔铰柔度特性的重要途径。然而由于柔铰缺口的特殊性与多样性,现有研究鲜有针对柔铰柔度建立过程与验证方法的详细论述,不利于相关设计技术的推广应用。特别是,明确传统机构学中铰链联接运动功能与结构力学分析理论的联系,可为设计人员提供重要理论参考,如开展结构选择与参数设计、使用柔度矩阵法分析机构刚度与静力运动学以及动力学建模与分析等[29]。因此,本文针对缺口型柔铰柔度闭式解的建立与验证方法展开研究。首先,根据材料力学建立等截面与渐变截面梁在复合受载时的柔度方程,以明确理论关联性;进而分别给出圆弧缺口型单轴与多轴柔铰闭式柔度方程的积分法推导过程;最后通过有限元仿真与实验进行验证。

1　等截面与渐变截面梁的柔度方程

柔性铰链本质上可以看作是一类变截面梁结构,其柔度方程可基于受力变形分析建立,如图 1 所示。在现有材料力学理论中,等截面梁作为典型工程结构,应用积分法计算其受力变形已十分成熟,部分学者进一步研究了渐变截面梁的受力变形计算[30]。上述成果是建立柔铰闭式柔度方程的重要基础,但已有研究结论与当前柔铰柔度的表述存在差异,且未阐明等截面梁、渐变截面梁的积分法分析与柔铰柔度计算之间的内在关联,故有必要重新论述。

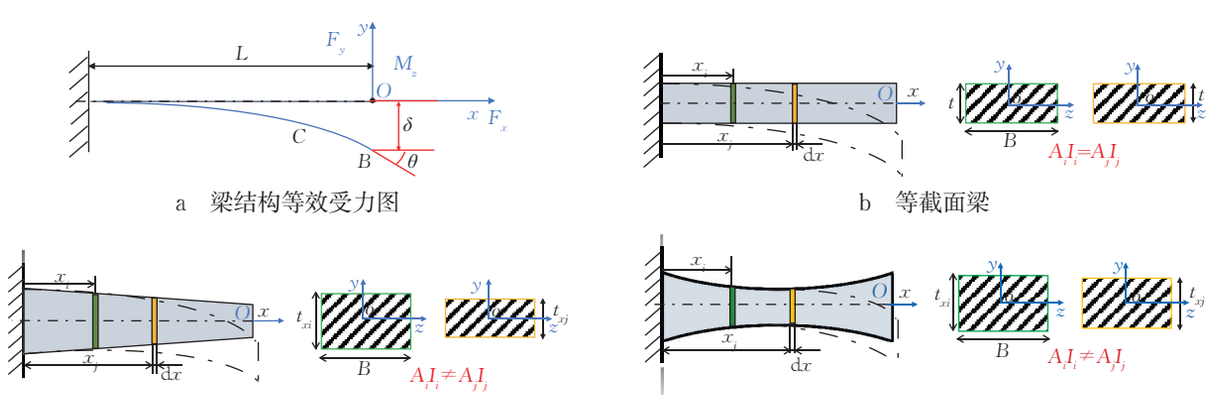
首先,建立等截面梁与渐变截面梁在平面内受载变形时的柔度方程。根据柔铰在柔顺机构中的工作特点,其受力分析采用悬臂梁模型。

如图 1b 所示,令等截面梁一端固定,另一端自由,并分别施加轴向拉力 F_x、剪切力 F_y 及弯矩 M_z。应明确,为应用积分法建立柔度闭式解,假设各结构满足连续性、均匀性和各向同性,结构变形为线性小变形,且满足横断截面的平面假设[31],即变形前在梁侧面垂直于轴线的直线,变形后仍为直线且垂直于轴线。因柔顺机构关注梁末端运动特性,参考刚度系数可定义 5 个柔度系数:$C_{u_xF_x}$、$C_{u_yF_y}$、$C_{\theta_zM_z}$、$C_{\theta_zF_y}$和$C_{u_yM_z}$,其中下标分别表示所受力(或力矩)及对应的位移(或转角),如 $C_{u_xF_x}$ 为轴向力 F_x 引起的 x 向位移 u_x,即 $u_x=C_{u_xF_x}\cdot F_x$,柔度与刚度互逆。现有材料力学理论已分别给出等截面梁在三种受载情况下的变形计算式,即

$$\begin{cases}\Delta L=\dfrac{F_xL}{EA},\\ \theta=\dfrac{ML}{EI},\\ \delta=\dfrac{F_yL^3}{3EI}。\end{cases}\tag{1}$$

式中:ΔL、θ、δ 分别为梁末端轴向伸长、转角和挠度;L 为梁的长度;F_x、F_y 分别为轴向拉力和剪切力;E 为材料的弹性模量;M 为弯矩;A、I 分别为等截面梁横断截面积和截面惯性矩。因满足复合定律,可从中得到 5 个柔度系数,分别为

$$\begin{cases}C_{\theta_zM_z}=\dfrac{L}{EI},\\ C_{u_yF_y}=\dfrac{L^3}{3EI},\\ C_{u_xF_x}=\dfrac{L}{EA},\\ C_{u_yM_z}=C_{\theta_zF_y}=\dfrac{L^2}{EI}。\end{cases}\tag{2}$$



a　梁结构等效受力图　　b　等截面梁

c　渐变截面梁　　d　缺口型柔性铰链

图 1　受力分析

Fig. 1　Force analysis

在图 1 中,L、B、t 分别为梁的长度、宽度和厚度,可得 $A=Bt$,$I=Bt^3/12$。因等截面梁的截面属性沿轴线恒定,应用积分法可快速建立其柔度计算式。对于渐变截面梁,柔度计算式复杂性相对增加,下面予以讨论。

1.1 F_x作用下的轴向拉伸柔度$C_{u_xF_x}$

如图 1c 所示,对于渐变截面梁,设其厚度变化规律为 $t=t(x)$。当受到轴向拉伸载荷时,采用微元法将变截面悬臂梁沿长度方向划分为众多微小单元段 $\mathrm{d}x$,在每个单元段内,近似认为 $A(x)$ 在该小段内不变,因此可将每个长度为 $\mathrm{d}x$ 的微元段近似看作截面面积为 $A(x)$ 的等截面梁。在轴向拉力 F 的作用下,该微元段的伸长量 $\mathrm{d}L$ 可表示为

$$\mathrm{d}L=\frac{F(x)}{EA(x)}\mathrm{d}x。\tag{3}$$

$A(x)$ 为微元梁的横截面面积,其变化规律可根据其几何含义表示为 $A(x)=B\cdot t(x)$。通过对整梁的长度进行积分可求得渐变截面梁的总拉伸变形量。根据圣维南原理,由轴向力 $F(x)\equiv F$ 及材料属性恒定,有

$$\Delta L=\frac{F}{E}\int_0^L\frac{1}{A(x)}\mathrm{d}x。\tag{4}$$

将 $A(x)=B\cdot t(x)$ 代入上式,通过基本换算可得其柔度闭式解为

$$C_{u_xF_x}=\frac{1}{EB}\int_0^L\frac{1}{t(x)}\mathrm{d}x。\tag{5}$$

1.2 M_z作用下的横向转角柔度$C_{\theta_zM_z}$

根据纯弯矩作用下的挠曲线微分方程,长度为 $\mathrm{d}x$ 的微元段在弯矩 $M(x)$ 作用下的弯曲变形为

$$\mathrm{d}\theta=\frac{M(x)\mathrm{d}x}{EI_z(x)}。\tag{6}$$

式中:$I_z(x)$ 为微元截面对中性轴 z 轴的转动惯量。

为求得变截面悬臂梁末端的转角,需要对整个梁长进行积分,由 $M(x)\equiv M$ 可得

$$\theta=\frac{M}{E}\int_0^L\frac{1}{I_z(x)}\mathrm{d}x。\tag{7}$$

将 $I_z(x)=\dfrac{Bt^3(x)}{12}$ 代入上式,通过基本换算可得其柔度闭式解为

$$C_{\theta_zM_z}=\frac{12}{EB}\int_0^L\frac{1}{t^3(x)}\mathrm{d}x。\tag{8}$$

1.3 弯曲柔度$C_{u_yM_z}$与转角柔度$C_{\theta_zF_y}$

当受到弯矩作用时,梁末端产生挠度;同理,当受到剪切作用时,梁末端产生转角,两者在数值上相等,故仅推导后者即可。力 F_y 作用下产生的转角为 θ_z,其等效于绕 z 轴弯矩作用下的转角,其中 $M_{ze}=F_y\cdot(L-x)$,$x\in(0,L)$。与 $C_{\theta_zM_z}$ 的求解过程类似,需考虑弯矩的变化率,可得

$$C_{\theta_zF_y}=\frac{12}{EB}\int_0^L\frac{L-x}{t^3(x)}\mathrm{d}x。\tag{9}$$

1.4 F_y作用下的横向弯曲柔度$C_{u_yF_y}$

剪切力作用下梁末端挠度由弯曲和剪切两种变形产生,分别用 δ_y^{b} 和 δ_y^{s} 表示。挠度与转角的关系为

$$\delta_y^{\mathrm{b}}=\int_0^L\theta_y(x)\mathrm{d}x。\tag{10}$$

其中,$\theta_y(x)$ 是在等效力矩($M_{ze}=F_y\cdot(L-x)$,$x\in(0,L)$)作用下的铰链转角的变上限积分,具体为

$$\theta_y(x)=\int_0^x\frac{F_y\cdot(L-u)}{E\cdot I_z(u)}\mathrm{d}u,\ x\in(0,L)。\tag{11}$$

式中:$I_z(u)$为梁在距离固定端 u 处的截面对 z 轴的惯性矩。

可得

$$\delta_y^{\mathrm{b}}=\int_0^L\left[\int_0^x\frac{F_y\cdot(L-u)}{E\cdot I_z(u)}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x。\tag{12}$$

同时,剪切变形产生的挠度为

$$\delta_y^{\mathrm{s}}=\int_0^L\left[\int_0^x\frac{F_y}{\kappa G\cdot A(u)}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x。\tag{13}$$

式中:κ 为矩形截面的剪切系数;G 为材料剪切模量。κ 的公式为

$$\kappa=\frac{10+10\mu}{12+11\mu}。\tag{14}$$

式中:μ 为材料的泊松比。

根据变上限积分的性质,利用分部积分法,上式总是满足

$$C_{u_yF_y}=\int_0^L\frac{(L-x)^2}{E\cdot I_Z(x)}\mathrm{d}x+\int_0^L\frac{(L-x)^2}{\kappa G\cdot\mathrm{A}(x)}\mathrm{d}x。\tag{15}$$

代入截面变化规律,可得其柔度闭式解为

$$C_{u_yF_y}=\frac{12}{EB}\int_0^L\frac{(L-x)^2}{t^3(x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{\kappa GB}\int_0^L\frac{L-x}{t(x)}\mathrm{d}x。\tag{16}$$

对于上述渐变截面梁,在垂直于主要转动轴的平面内,可得其各柔度因子为

$$\begin{cases}C_{\theta_zM_z}=\dfrac{12}{EB}\displaystyle\int_0^L\frac{1}{t^3(x)}\mathrm{d}x,\\[2ex] C_{u_yF_y}=\dfrac{12}{EB}\displaystyle\int_0^L\frac{(L-x)^2}{t^3(x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{\kappa GB}\int_0^L\frac{L-x}{t(x)}\mathrm{d}x,\\[2ex] C_{u_xF_x}=\dfrac{1}{EB}\displaystyle\int_0^L\frac{1}{t(x)}\mathrm{d}x,\\[2ex] C_{u_yM_z}=C_{\theta_zF_y}=\dfrac{12}{EB}\displaystyle\int_0^L\frac{L-x}{t^3(x)}\mathrm{d}x。\end{cases}\tag{17}$$

2　单轴圆弧缺口柔铰的闭式柔度方程

单轴圆弧缺口型柔性铰链结构的几何参数如图 2 所示。该结构的左右两边视为刚性块,中间的柔性部分可看作是图 1d 所示变截面梁,其长度为 $L=2a$,切口半径为 r,宽度为 b,最小厚度为 t,最大圆心角为 θ_{m}。依据几何关系能够得出柔铰厚度变化率 $t(x)$ 为

$$t(x)=2r+t-2\sqrt{r^2-(a-x)^2}。\tag{18}$$

为简化积分,引入圆弧角为积分变量,令 $x=r\cdot\sin\theta$,有

$$t(\theta)=2r+t-2r\cdot\cos\theta。\tag{19}$$

微段 $\mathrm{d}\theta$ 处的横截面积可以表示为

$$A(\theta)=bt(\theta)。\tag{20}$$

微段 $\mathrm{d}\theta$ 处的横截面惯性矩可以表示为

$$I_y(\theta)=I_z(\theta)=\frac{b}{12}t(\theta)^3。\tag{21}$$

该柔铰存在一个垂直于缺口平面的主要转动轴,在平面内也可定义 5 个柔度系数,类似渐变截面梁,考虑截面变化率的差异即可建立各柔度系数。

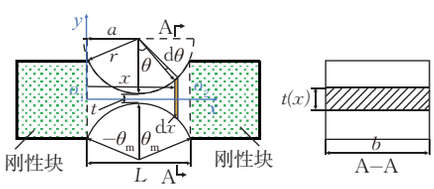


图 2　单轴圆弧缺口型柔性铰链结构的几何参数

Fig. 2　Geometric parameters of uniaxial circular arc notch flexible hinge

2.1　F_x 作用下的轴向拉伸柔度 $C_{u_xF_x}$

在轴向载荷 F_x 的作用下沿 x 轴发生线变形的柔度方程为

$$C_{u_xF_x}=\frac{1}{Eb}\int_0^L\frac{1}{t(x)}\mathrm{d}x。\tag{22}$$

用圆弧角为积分变量,代入截面变化率公式,有

$$C_{u_xF_x}=\frac{r}{Eb}\int_{-\theta_{\mathrm{m}}}^{\theta_{\mathrm{m}}}\frac{\cos\theta}{t(\theta)}\mathrm{d}\theta。\tag{23}$$

其中,$\int_{-\theta_{\mathrm{m}}}^{\theta_{\mathrm{m}}}\frac{\cos\theta}{t(\theta)}\mathrm{d}\theta$ 可转化为有理式积分求得其定解,此处不再赘述。令其积分结果为 N_1,代入公式可得柔度闭式解为

$$C_{u_xF_x}=\frac{r}{Eb}N_1。\tag{24}$$

2.2　M_z 作用下的横向转角柔度 $C_{\theta_zM_z}$

力矩 M_z 作用下绕 z 轴的转角柔度方程为

$$C_{\theta_zM_z}=\frac{12}{Eb}\int_0^L\frac{1}{t^3(x)}\mathrm{d}x。\tag{25}$$

用圆弧角为积分变量,代入截面变化率,有

$$C_{\theta_zM_z}=\frac{12r}{Eb}\int_{-\theta_{\mathrm{m}}}^{\theta_{\mathrm{m}}}\frac{\cos\theta}{t^3(\theta)}\mathrm{d}\theta。\tag{26}$$

其中,$\int_{-\theta_{\mathrm{m}}}^{\theta_{\mathrm{m}}}\frac{\cos\theta}{t^3(\theta)}\mathrm{d}\theta$ 可转化为有理式积分求得其定解。令其积分结果为 N_2,代入公式可得柔度闭式解为

$$C_{\theta_zM_z}=\frac{12r}{Eb}N_2。\tag{27}$$

2.3　F_y 作用下的转角柔度 $C_{\theta_zF_y}$ 和 M_z 作用下的弯曲柔度 $C_{u_yM_z}$

由于这两个柔度因子相似,仅给出由载荷 M_z 引起的沿 y 轴的弯曲柔度公式,即 $C_{u_yM_z}$。其方程为

$$C_{u_yM_z}=\frac{12ar}{Eb}\int_{-\theta_{\mathrm{m}}}^{\theta_{\mathrm{m}}}\frac{\cos\theta}{t^3(\theta)}\mathrm{d}\theta-\frac{12r^2}{Eb}\int_{-\theta_{\mathrm{m}}}^{\theta_{\mathrm{m}}}\frac{\sin\theta\cos\theta}{t^3(\theta)}\mathrm{d}\theta。\tag{28}$$

其中 $\int_{-\theta_{\mathrm{m}}}^{\theta_{\mathrm{m}}}\frac{\sin\theta\cos\theta}{t^3(\theta)}\mathrm{d}\theta$ 的被积函数为奇函数,且积分区间关于原点对称。令该积分结果为 N_3,易得 $N_3=0$,代入公式可得柔度闭式解为

$$C_{\theta_zF_y}=C_{u_yM_z}=\frac{12ar}{Eb}N_2。\tag{29}$$

2.4　F_y 作用下的横向弯曲柔度 $C_{u_yF_y}$

$F_y(a-r\sin\theta)$ 引起的转角变形与剪切变形分别用 u_y^{b} 和 u_y^{s} 表示,其中转角变形表达式为

$$u_y^{\mathrm{b}}=\frac{12F_y}{EB}\int_0^L\frac{(a-x)^2}{t^3(x)}\mathrm{d}x,\tag{30}$$

剪切变形表达式为

$$u_y^{\mathrm{s}}=\frac{F_y}{\kappa Gb}\int_0^L\frac{1}{t(x)}\mathrm{d}x。\tag{31}$$

矩形截面的剪切系数同式(14)。

用圆弧角为积分变量,代入截面变化率,得弯曲变形对应的柔度表达式,由 $C_{u_yF_y}=\frac{u_y^{\mathrm{b}}}{F_y}+\frac{u_y^{\mathrm{s}}}{F_y}$ 可得:

$$\begin{aligned}C_{u_yF_y}=&\frac{12r^3}{Eb}\int_{-\theta_{\mathrm{m}}}^{\theta_{\mathrm{m}}}\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{t^3(\theta)}\mathrm{d}\theta+\\&\frac{12a^2r}{Eb}\int_{-\theta_{\mathrm{m}}}^{\theta_{\mathrm{m}}}\frac{\cos\theta}{t^3(\theta)}\mathrm{d}\theta+\frac{r}{\kappa Gb}\int_{-\theta_{\mathrm{m}}}^{\theta_{\mathrm{m}}}\frac{\cos\theta}{t(\theta)}\mathrm{d}\theta。\end{aligned}\tag{32}$$

其中,令 $\int_{-\theta_{\mathrm{m}}}^{\theta_{\mathrm{m}}}\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{t^3(\theta)}\mathrm{d}\theta$ 积分结果为 N_4,代入公式可得柔度闭式解为

$$C_{u_yF_y}=\frac{12a^2r}{Eb}N_2+\frac{12r^3}{Eb}N_4+\frac{r}{\kappa Gb}N_1。\tag{33}$$

其中令 $s=\frac{t}{r}$,上述积分结果 N_1、N_2、N_4 计算式分别为

$$N_1=-\frac{\theta_m}{r}+\frac{4r+2t}{r^2}\cdot\frac{\arctan\left(\tan\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\Big/\sqrt{\frac{s}{s+4}}\right)}{\sqrt{s}\cdot\sqrt{s+4}},\tag{34}$$

$$N_2=4\tan\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\left\{s^3\left(\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)+1\right)+s^2\left(7\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)+5\right)+2s\left(9\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)+5\right)+24\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\right\}\cdot\left\{r^3s^2(s+4)^2\left[s\cdot\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)+s+4\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\right]^2\right\}^{-1}+\frac{12(s+2)\arctan\left(\tan\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\Big/\sqrt{\frac{s}{s+4}}\right)}{r^3s^{\frac{5}{2}}(s+4)^{\frac{5}{2}}},\tag{35}$$

$$N_4=\frac{2(s^2+5s+2)\tan\left(\frac{\theta_m}{2}\right)}{2r^3s(s+4)\left(s\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)+s+4\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\right)}-\frac{(s^3+6s^2+6s-4)\arctan\left(\tan\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\Big/\sqrt{\frac{s}{s+4}}\right)}{2r^3s^{\frac{3}{2}}(s+4)^{\frac{3}{2}}}-\frac{4(s+2)\tan\left(\frac{\theta_m}{2}\right)}{2r^3(s+4)\left(s\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)+s+4\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\right)^2}+\frac{\theta_m}{4r^3}。\tag{36}$$

3 多轴圆弧缺口柔铰的闭式柔度方程

在柔性铰链结构的既有研究体系中,平面单轴柔性铰链与回转体多轴柔性铰链通常被视为独立的研究对象。为了进一步完善缺口型柔性铰链柔度闭式解的构建过程,本文将平面单轴和多轴柔性铰链统一比较分析。多轴圆弧柔性铰链结构的几何参数如图 3 所示,其柔度求解过程和结构参数与单轴柔性铰链类似,其中铰链切口的长度 $L=2a$,r 为铰链的切口半径,t 为最小厚度,θ_m 为最大圆心角。以纵向和高度方向为 x 轴和 y 轴,建立笛卡儿坐标系。

柔性铰链的受力分析及坐标系建立与单轴柔性铰链相同,如图 3 所示。由于缺口类型相同,其位于 x 处的横断面直径表达式 $t(x)$ 与式(18)相同。同理,以圆弧角 θ 为积分变量,微段 $\mathrm{d}\theta$ 处的横截面积可表示为

$$A(\theta)=\frac{\pi}{4}t^2(\theta)。\tag{37}$$

微段 $\mathrm{d}\theta$ 处的横截面惯性矩可以表示为

$$I_y(\theta)=I_z(\theta)=\frac{\pi}{64}t^4(\theta)。\tag{38}$$

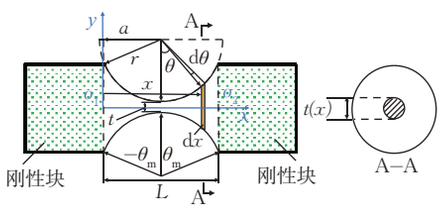


图3 多轴圆弧柔性铰链结构的几何参数

Fig. 3 Geometric parameters of the multiaxial circular arc flexible hinge

3.1 F_x 作用下的轴向拉伸柔度 $C_{u_xF_x}$

在轴向载荷 F_x 的作用下沿 x 轴发生线变形的柔度方程为

$$C_{u_xF_x}=\frac{4}{E\pi}\int_0^L\frac{1}{t^2(x)}\mathrm{d}x。\tag{39}$$

以圆弧角为积分变量,代入截面变化率,有

$$C_{u_xF_x}=\frac{4r}{E\pi}\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\frac{\cos\theta}{t^2(\theta)}\mathrm{d}\theta。\tag{40}$$

其中 $\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\frac{\cos\theta}{t^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$ 可转化为有理式积分,求得其定解,令其积分结果为 I_1,代入公式可得柔度闭式解为

$$C_{u_xF_x}=\frac{4r}{E\pi}I_1。\tag{41}$$

3.2 M_z 作用下的横向转角柔度 $C_{\theta_zM_z}$

力矩 M_z 作用下绕 z 轴的转角柔度方程为

$$C_{\theta_zM_z}=\frac{64}{E\pi}\int_0^L\frac{1}{t^4(x)}\mathrm{d}x。\tag{42}$$

以圆弧角为积分变量,代入截面变化率,有

$$C_{\theta_zM_z}=\frac{64r}{E\pi}\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\frac{\cos\theta}{t^4(\theta)}\mathrm{d}\theta。\tag{43}$$

其中 $\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\frac{\cos\theta}{t^4(\theta)}\mathrm{d}\theta$ 可转化为有理式积分,求得其定解。令其积分结果为 I_2,代入公式可得柔度闭式解为

$$C_{\theta_zM_z}=\frac{64r}{E\pi}I_2。\tag{44}$$

3.3 $\frac{\theta_z}{F_y}$、$\frac{\theta_y}{F_z}$、$\frac{\Delta_y}{M_z}$和$\frac{\Delta_z}{M_y}$

由于这些柔度因子相似,仅给出由载荷 F_y 引起的绕 z 轴的转角柔度公式,即 $C_{\theta_z F_y}$。由轴向力 F_y 引起的绕 z 轴的旋转等于等效力矩 $F_y(a-r\sin\theta)$ 引起的旋转,其公式为

$$\theta_z=\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\frac{(a-r\cdot\sin\theta)F_y\cdot r\cdot\cos\theta}{E\cdot I_z(\theta)}\mathrm{d}\theta。\tag{45}$$

其弯曲柔度公式为

$$C_{\theta_z F_y}=\frac{64ar}{E\pi}\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\frac{\cos\theta}{t^4(\theta)}\mathrm{d}\theta。\tag{46}$$

可得柔度闭式解为

$$C_{\theta_z F_y}=\frac{64ar}{E\pi}I_2。\tag{47}$$

3.4 F_y作用下的横向弯曲柔度$C_{u_y F_y}$

与 2.4 节求解过程类似,$F_y(a-r\sin\theta)$ 引起的转角变形与剪切变形分别用 u_y^{b} 和 u_y^{s} 表示,其中转角变形表达式为

$$u_y^{\mathrm{b}}=\frac{64F_y}{E\pi}\int_0^L\frac{(a-x)^2}{t^4(x)}\mathrm{d}x,\tag{48}$$

剪切变形表达式为

$$u_y^{\mathrm{s}}=\frac{4\kappa F_y}{G\pi}\int_0^L\frac{1}{t^2(x)}\mathrm{d}x。\tag{49}$$

其中圆形截面的剪切系数 κ 为

$$\kappa=\frac{10}{9}。\tag{50}$$

以圆弧角为积分变量,代入截面变化率,可得弯曲变形对应的柔度表达式为

$$C_{u_y F_y}=\frac{64r^3(1+\sin^2\theta_m)}{E\pi}\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\frac{\cos\theta}{t^4(\theta)}\mathrm{d}\theta-\frac{64r^3}{E\pi}\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\frac{\cos^3\theta}{t^4(\theta)}\mathrm{d}\theta+\frac{40r}{9G\pi}\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\frac{\cos\theta}{t^2(\theta)}\mathrm{d}\theta。\tag{51}$$

其中 $\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\frac{\cos^3\theta}{t^4(\theta)}\mathrm{d}\theta$ 可转化为有理式积分,求得其定解,令其积分结果为 I_3,代入公式可得柔度闭式解:

$$C_{u_y F_y}=\frac{64r^3(1+\sin^2\theta_m)}{E\pi}I_2-\frac{64r^3}{E\pi}I_3。\tag{52}$$

上述积分结果 I_1~I_3 其表达式分别为

$$I_1=\frac{4(s+2)}{r^2(s+4)}\cdot\left[\frac{\arctan\left(\tan\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\Big/\sqrt{\frac{s}{s+4}}\right)}{s^{\frac{3}{2}}\sqrt{s+4}}+\frac{\tan\left(\frac{\theta_m}{2}\right)}{s\left(s\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)+s+4\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\right)}\right]-\frac{4\arctan\left(\tan\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\Big/\sqrt{\frac{s}{s+4}}\right)}{r^2\sqrt{s}\,(s+4)^{\frac{3}{2}}},\tag{53}$$

$$I_2=\frac{16(3s^2+8s+10)\tan\left(\frac{\theta_m}{2}\right)}{3s^2r^4(s+4)^3\left(s\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)+s+4\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\right)^2}+\frac{16(s^2+4s+5)\arctan\left(\tan\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\Big/\sqrt{\frac{s}{s+4}}\right)}{r^4s^{\frac{7}{2}}(s+4)^{\frac{7}{2}}}+\frac{4(s^3+4s^2+16s+20)\tan\left(\frac{\theta_m}{2}\right)}{r^4s^3(s+4)^3\left(s\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)+s+4\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\right)}+\frac{64(s+2)\tan\left(\frac{\theta_m}{2}\right)}{3r^4s(s+4)^3\left(s\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)+s+4\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\right)^3},\tag{54}$$

$$I_3=-\frac{8(2s-5)(s+2)^2\tan\left(\frac{\theta_m}{2}\right)}{3r^4s^2(s+4)^3\left(s\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)+s+4\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\right)^2}+\frac{4(3s^2+12s+20)\arctan\left(\tan\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\Big/\sqrt{\frac{s}{s+4}}\right)}{r^4s^{\frac{7}{2}}(s+4)^{\frac{7}{2}}}+\frac{4(s^3+3s^2+12s+20)\tan\left(\frac{\theta_m}{2}\right)}{r^4s^3(s+4)^3\left(s\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)+s+4\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\right)}+\frac{16(s+2)^3\tan\left(\frac{\theta_m}{2}\right)}{3r^4s(s+4)^3\left(s\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)+s+4\tan^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\right)^3}。\tag{55}$$

4　柔度方程验证

4.1 有限元验证

在验证所推导的柔性铰链柔度方程的计算精度时,通常采用与有限元仿真结果对比的方法。针对上述两类圆弧柔性铰链,分别设计 5 组几何参数开展算例研究,具体参数如表 1~表 2 所示。材料选用 7075 铝合金(弹性模量 E=72 GPa、泊松比 μ=0.33)。

表 1 单轴圆弧柔性铰链的几何参数

Tab. 1 Geometric parameters of uniaxial circular arc flexible hinge

序号	a/mm	r/mm	b/mm	t/mm	θ_m/(°)
1	3.00	6	10	1.5	30
2	3.50	7	5	1.5	30
3	4.00	8	5	1.0	30
4	19.92	23	30	7.0	60
5	24.25	28	30	2.0	60

表 2 多轴圆弧柔性铰链的几何参数

Tab. 2 Geometric parameters of multiaxial circular arc flexible hinge

序号	a/mm	r/mm	t/mm	θ_m/(°)
1	3	6	1.0	30
2	8	8	0.5	90
3	5	10	0.5	30
4	19.05	22	8.0	60
5	24.25	28	2.0	60

首先,将各算例的几何参数与材料属性代入柔度公式,计算得到理论柔度值。其次,依据几何参数建立各算例柔铰的三维模型,并采用 ANSYS Workbench 软件建立有限元仿真模型,如图 4 所示。

模型采用四面体与六面体单元自动划分网格

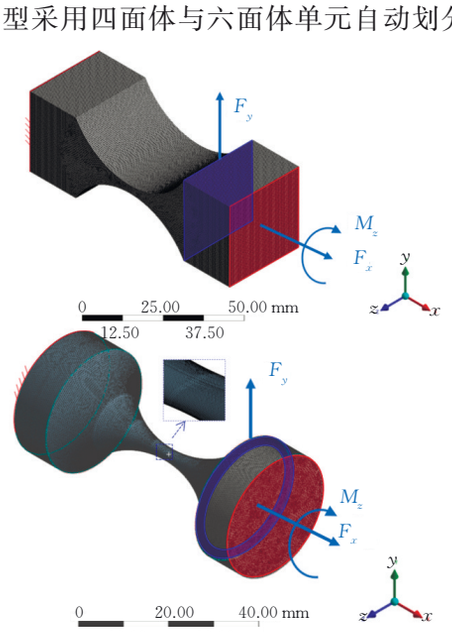


图 4 单轴与多轴圆弧柔铰有限元模型及边界条件

Fig. 4 Finite element models of uniaxial and multiaxial circular arc flexible hinges and boundary conditions

(节点数和单元数分别不低于 82 万个和 19 万个);材料选用线弹性模型,边界条件设为悬臂梁形式(一端固定,另一端分别施加轴向力或转矩)。分别测量柔铰两端横截面中心点的位移及自由端刚性块端面的转角,依据柔度定义计算各柔度因子。最后,将理论计算值与有限元结果进行对比,结果如表 3~表 4 所示。理论值与有限元解的误差均在 7% 以内,与现有研究[32]相比,本文所推导柔度公式的计算精度是可接受的。

表 3 单轴柔铰理论值与有限元结果对比

Tab. 3 Comparison of theoretical values and finite element results for uniaxial flexible hinge

算例结果	$\frac{\Delta x}{F_x}$	$\frac{\Delta y}{F_y}$	$\frac{\Delta y}{M_z}$	$\frac{\theta_z}{M_z}$
1(理论解)	4.34×10^{-9}	1.83×10^{-7}	4.79×10^{-5}	1.60×10^{-2}
1(有限元)	4.17×10^{-9}	1.86×10^{-7}	4.86×10^{-5}	1.61×10^{-2}
1(误差)/%	4.0	1.6	1.4	0.6
2(理论解)	9.83×10^{-9}	5.30×10^{-7}	1.23×10^{-4}	3.51×10^{-2}
2(有限元)	9.71×10^{-9}	5.55×10^{-7}	1.28×10^{-4}	3.61×10^{-2}
2(误差)/%	1.2	4.5	3.9	2.7
3(理论解)	1.49×10^{-8}	1.97×10^{-6}	4.29×10^{-4}	1.07×10^{-1}
3(有限元)	1.52×10^{-8}	1.98×10^{-6}	4.31×10^{-4}	1.08×10^{-1}
3(误差)/%	1.9	0.5	0.4	0.9
4(理论解)	1.64×10^{-9}	1.06×10^{-7}	4.62×10^{-6}	2.32×10^{-4}
4(有限元)	1.61×10^{-9}	1.13×10^{-7}	4.90×10^{-6}	2.44×10^{-4}
4(误差)/%	1.8	6.1	5.7	4.9
5(理论解)	4.30×10^{-9}	3.68×10^{-6}	1.47×10^{-4}	6.07×10^{-3}
5(有限元)	4.49×10^{-9}	3.48×10^{-6}	1.39×10^{-4}	5.73×10^{-3}
5(误差)/%	4.2	5.7	5.7	5.9

4.2 实验验证

为了进一步验证所推导柔度理论公式的正确性,本文加工了柔性铰链样件并开展柔度测试实验。样件材料为 7075 铝合金,其中样件 1(单轴柔铰)的主要结构参数为 $r=23$ mm、$\theta_m=60°$、$t=7$ mm、$b=30$ mm,样件 2(多轴柔铰)的主要结构参数为 $r=22$ mm、$\theta_m=60°$、$t=8$ mm。搭建柔性铰链柔度测试实验台,如图 5 所示。柔铰一端固定,另一端与刚性加载块相连;加载块两端通过低弹性尼龙绳挂接砝码,以此对柔铰施加纯弯曲载荷。同时,借助激光测距仪测量施力板上两点的位移,通过计算得出柔性铰链活动端的转角。

实验过程中,通过改变砝码质量调整对加载块

表4　多轴柔铰理论值与有限元结果对比

Tab. 4　Comparison of theoretical values and finite element results for multiaxial flexible hinge

算例结果	$\frac{\Delta x}{F_x}$	$\frac{\Delta y}{F_y}$	$\frac{\Delta y}{M_z}$	$\frac{\theta_z}{M_z}$
1(理论解)	5.90×10^{-8}	6.81×10^{-6}	1.99×10^{-3}	6.65×10^{-1}
1(有限元)	5.86×10^{-8}	7.00×10^{-6}	2.04×10^{-3}	6.81×10^{-1}
1(误差)/%	0.6	2.7	2.4	2.3
2(理论解)	2.17×10^{-7}	5.74×10^{-4}	7.08×10^{-2}	8.85
2(有限元)	2.31×10^{-7}	6.13×10^{-4}	7.55×10^{-2}	9.41
2(误差)/%	6.0	6.3	6.2	5.9
3(理论解)	2.39×10^{-7}	2.58×10^{-4}	4.95×10^{-2}	9.89
3(有限元)	2.40×10^{-7}	2.59×10^{-4}	4.98×10^{-2}	9.97
3(误差)/%	0.4	0.3	0.6	0.8
4(理论解)	5.08×10^{-9}	3.57×10^{-7}	1.66×10^{-5}	8.73×10^{-4}
4(有限元)	5.15×10^{-9}	3.79×10^{-7}	1.76×10^{-5}	9.24×10^{-4}
4(误差)/%	1.3	5.8	5.6	5.5
5(理论解)	5.06×10^{-8}	7.75×10^{-5}	3.13×10^{-3}	1.29×10^{-1}
5(有限元)	5.27×10^{-8}	7.94×10^{-5}	3.21×10^{-3}	1.32×10^{-1}
5(误差)/%	3.9	2.3	2.4	2.2

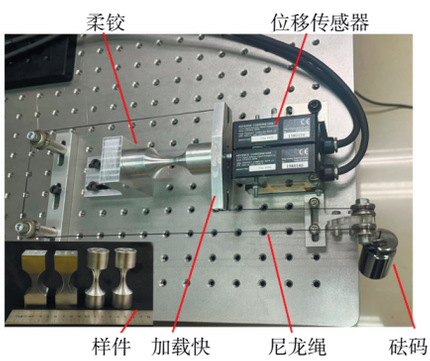


图5　试验平台

Fig. 5　Experimental platform

施加的拉力,砝码最大质量不超过 2 kg,因此实验中柔铰在弹性小变形范围内。记录单个载荷作用下施力板上两点的位移,通过三角运算换算为角度,每个拉力值测量 3 次,并取柔度平均值作为最终结果,见表 5。柔度实验结果与理论计算的相对误差最大值为 6.1%。

5　结论

本文从等截面梁和渐变截面梁的柔度推导出发,延伸至经典单轴、多轴圆弧柔性铰链柔度闭式解的理论推导,系统梳理了采用积分法建立柔铰柔度闭式解的方法过程,并通过有限元仿真和实验进行了验证。结果表明,闭式解与有限元结果和实验结果的误差分别约为 7% 和 6%。本文可为设计人员开展柔性铰链结构设计与分析提供参考。

参考文献:

[1] 张宪民, 朱本亮, 李海, 等. 柔顺精密定位与操作机构研究进展[J]. 机械工程学报, 2023, 59(19): 24-43.

[2] 潘杰, 于靖军, 裴旭. 柔性手爪机构设计与变刚度技术研究发展综述[J]. 机械工程学报, 2024, 60(13): 281-296.

[3] 刘晨, 吴业辉, 李博, 等. 面向软体机器人的新型变刚度技术研究进展[J]. 科技导报, 2021, 39(17): 69-81.

[4] 华顺明, 张宇, 彭宇, 等. 压电阀中的微位移放大机构[J]. 压电与声光, 2021, 43(1): 134-141.

[5] 刘国平, 何忠波, 郑佳伟, 等. 电液伺服阀用微位移放大机构发展现状[J]. 液压与气动, 2020, 44(1): 66-73.

[6] Qin Y D, Shi Y Y, Shirinzadeh B, et al. Characteristics of statically indeterminate symmetric flexure structures[J]. Nanomanufacturing and Metrology, 2023, 6(1): 1.

[7] Santos L F L, d'Almeida J R M, Howell L L. Changes in the mechanical performance of an orthoplanar spring after aging tests[J]. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2023, 45(2): 118.

[8] Paros J M, Weisboro L. How to design flexure hinges[J]. Machine Design, 1965, 37: 151-157.

[9] 吴鹰飞, 周兆英. 柔性铰链的计算和分析[J]. 机械设计与研究, 2002, 18(3): 29-30.

[10] 吴鹰飞, 周兆英. 柔性铰链的设计计算[J]. 工程力

表5　样件实验结果对比

Tab. 5　Comparison of experimental results for samples

样件序号	柔度/10^{-4} rad·(N·m)$^{-1}$			
	理论结果	有限元结果	实验结果	相对误差/%
1	2.32	2.33	2.47	6.0
2	8.73	9.24	9.30	6.1

学, 2002, 19(6): 136-140.

[11] Yong Y K, Lu T F, Handley D C. Review of circular flexure hinge design equations and derivation of empirical formulations[J]. Precision Engineering, 2008, 32(2): 63-70.

[12] Lobontiu N, Paine J S N, Garcia E, et al. Corner-filleted flexure hinges[J]. Journal of Mechanical Design, 2001, 123(3): 346-352.

[13] Lobontiu N, Garcia E. Two-axis flexure hinges with axially-collocated and symmetric notches[J]. Computers & Structures, 2003, 81(13): 1329-1341.

[14] Lobontiu N, Paine J S N, O'Malley E, et al. Parabolic and hyperbolic flexure hinges: Flexibility, motion precision and stress characterization based on compliance closed-form equations[J]. Precision Engineering, 2002, 26(2): 183-192.

[15] Smith S T, Badami V G, Dale J S, et al. Elliptical flexure hinges[J]. Review of Scientific Instruments, 1997, 68(3): 1474-1483.

[16] 陈贵敏, 刘小院, 贾建援. 椭圆柔性铰链的柔度计算[J]. 机械工程学报, 2006, 42(B5): 111-115.

[17] Chen G M, Howell L L. Two general solutions of torsional compliance for variable rectangular cross-section hinges in compliant mechanisms[J]. Precision Engineering, 2009, 33(3): 268-274.

[18] Chen G M, Shao X D, Huang X B. A new generalized model for elliptical arc flexure hinges[J]. Review of Scientific Instruments, 2008, 79(9): 095103.

[19] Zhu B L, Zhang X M, Fatikow S. Design of single-axis flexure hinges using continuum topology optimization method[J]. Science China Technological Sciences, 2014, 57(3): 560-567.

[20] Zhu B L, Wang R X, liang J W, et al. Design of compliant mechanisms: An explicit topology optimization method using end-constrained spline curves with variable width[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 171: 104713.

[21] 占金青, 刘天舒, 刘敏, 等. 考虑疲劳性能的柔顺机构拓扑优化设计[J]. 机械工程学报, 2021, 57(3): 59-68.

[22] Wei H X, Shirinzadeh B, Tang H, et al. Closed-form compliance equations for elliptic-revolute Notch type multiple-axis flexure hinges[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 156: 104154.

[23] Wei H X, Tian Y L, Zhao Y J, et al. Two-axis flexure hinges with variable elliptical transverse cross-sections[J]. Mechanism and Machine Theory, 2023, 181: 105183.

[24] 魏华贤, 赵永杰, 杨楠, 等. 椭圆横断截面新型双轴柔性铰链设计及分析[J]. 中国机械工程, 2024, 35(8): 1348-1357.

[25] Zhu Z W, Zhou X Q, Wang R Q, et al. A simple compliance modeling method for flexure hinges[J]. Science China Technological Sciences, 2015, 58(1): 56-63.

[26] Zhou H, Ling M X, Yin Y H, et al. Transfer matrix modeling for asymmetrically-nonuniform curved beams by beam-discrete strategies[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2024, 276: 109425.

[27] Ling M X, Yuan L, Lai J H, et al. Compliance and precision modeling of general Notch flexure hinges using a discrete-beam transfer matrix[J]. Precision Engineering, 2023, 82: 233-250.

[28] Ling M X, Yuan L, Zhang X M. Static and dynamic compliance analyses of curved-axis flexure hinges: A discrete beam transfer matrix[J]. Journal of Mechanical Design, 2023, 145(6): 064501.

[29] Lobontiu N. Compliance-based matrix method for modeling the quasi-static response of planar serial flexure-hinge mechanisms[J]. Precision Engineering, 2014, 38(3): 639-650.

[30] 周丹, 王应军, 孙明清, 等. 小挠度变截面梁的积分矩阵法求解[J]. 江苏师范大学学报(自然科学版), 2016, 34(2): 68-71.

[31] 张涛然, 晁晓洁, 郭丽红. 材料力学[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 2018.

[32] 李耀, 吴洪涛, 杨小龙, 等. 圆弧柔性铰链的优化设计[J]. 光学精密工程, 2018, 26(6): 1370-1379.

(下转第 136 页)