

DOI: 10.3969/j.issn.1671-0673. 2026. 02. 001

优选 Z 互补对构造及其在 MIMO 雷达抗多普勒 波形设计中的应用

刘 凯^{1,2}, 彭佩栋^{1,2}, 李佳澎^{1,2}, 王 佼³

(1.燕山大学 信息科学与工程学院,河北 秦皇岛 066004;

2.燕山大学 河北省信息传输与信号处理重点实验室,河北 秦皇岛 066004;

3.中国铁塔股份有限公司,北京 100195)

摘要:为提升多输入多输出(MIMO)雷达在多普勒环境下的目标检测性能,提出一种基于优选 Z 互补对(PZCP)的抗多普勒波形设计框架。首先,定义准对称格雷互补对(QS-GCP)并给出系统化构造;继而采用级联—插值技术生成两类新参数的 PZCP。随后,以 Z 互补对(ZCP)为原型,提出参数灵活的第 3 类 PZCP 构造方案,首次实现了 12、20、22、28、36、52 等现有研究尚未实现的长度,显著扩展 PZCP 的参数空间。最后,联合等幂和(ESP)集合设计了 MIMO 雷达发射脉冲串,形成完整的抗多普勒波形。仿真结果表明,所构造的 PZCP 在 PSLR 与 ISLR 指标上均优于传统 Z 互补对和 Golay 互补对,为多普勒敏感场景下的 MIMO 雷达波形设计提供了新思路与新资源。

关键词:优选 Z 互补对;准对称格雷互补对;Z 互补对;MIMO 雷达;模糊函数

中图分类号:TN911.2

文献标识码:A

文章编号:1671-0673(2026)02-0127-09

Construction of Preferred Z-Complementary Pairs and Their Application to Doppler-Resistant Waveform Design for MIMO Radar

LIU Kai^{1,2}, PENG Peidong^{1,2}, LI Jiapeng^{1,2}, WANG Jiao³

(1.School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China;

2.Hebei Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China; 3.China Tower Co., Ltd., Beijing 100195, China)

Abstract: To enhance target-detection performance of multiple-input multiple-output (MIMO) radar in Doppler environments, a Doppler-resistant waveform design framework based on preferred Z-complementary pairs (PZCP) is proposed. First, the quasi-symmetric Golay complementary pairs (QS-GCP) are defined and systematically constructed. Two new classes of PZCP are then generated through cascade-interleaving. Building on Z-complementary pairs (ZCP), a highly flexible third construction is further devised, by which PZCP of previously unavailable lengths such as 12, 20, 22, 28, 36 and 52, are for the first time obtained, and the parameter space is thereby significantly enlarged. Finally, complete Doppler-tolerant pulse trains for MIMO transmission are constructed by combining these sequences with equal-sum-of-powers (ESP) sets. Simulation results show that the proposed PZCP outperform conventional ZCP and GCP in both PSLR and ISLR, offering new insights and resources for waveform design in Doppler-sensitive scenarios.

Key words: PZCP; QS-GCP; ZCP; MIMO radar; ambiguity function

收稿日期:2025-10-15;修回日期:2025-12-29

基金项目:国家自然科学基金(62471427);河北省自然科学基金(F2023203066)

作者简介:刘 凯(1977—),女,教授,博士,主要研究方向为序列设计与通信编码理论。E-mail:liukai@ysu.edu.cn

相位编码技术通过对脉冲信号实施精心设计的相位调制,可显著压缩距离主瓣、提升测量精度,因而被广泛部署于脉冲压缩、多输入多输出(Multiple-Input Multiple-Output, MIMO)及毫米波等现代雷达系统^[1]。然而,相位编码波形对移动目标的径向速度引起的多普勒频移极为敏感^[2];频率失配使匹配滤波器输出峰值幅度下降,造成信噪比(SNR)损失;峰值位置偏移带来测距误差;能量向旁瓣泄露则提高了弱目标被掩盖的风险,导致检测概率降低。因此,增强相位编码雷达的多普勒容忍能力已成为波形设计领域亟待解决的关键问题。

Golay 互补对(Golay Complementary Pair, GCP)及其推广形式互补码^[3],凭借理想的非周期自相关和特性,可在零多普勒条件下实现零距离旁瓣,因而被长期视为脉冲压缩波形设计的“黄金标准”。然而,一旦目标存在径向速度,多普勒失配会使其模糊函数迅速恶化,旁瓣电平急剧抬升。为抑制这一退化,Pezechki 等^[4]提出按照 Prouhet-Thue-Morse (PTM)序列顺序发射 GCP 的策略,显著抑制了高的距离旁瓣;Nguyen 等^[5]进一步引入等幂和(Equal Sum of Powers, ESP)多天线发射框架,在 MIMO 雷达中按 ESP 集合辐射互补码,抗多普勒性能优于 PTM 方案。尽管 GCP 理论完备,但经过严格数学证明,二元 GCP 长度限制为 $2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$ (其中 α, β 和 γ 为非负整数)^[6-7]。为此, Fan 等^[8]提出了 Z 互补对(Z-Complementary Pair, ZCP)的概念,允许在零相关区(Zero Correlation Zone, ZCZ)内实现完美自相关和,同时支持任意偶数长度,为波形设计提供了更大的灵活性。随后, Wang 等^[9]将 ZCP 引入 ESP 顺序发射,构造出具有多普勒容忍能力的雷达波形。Zhou 等^[10]利用零相关区和零奇相关区序列集,在 MIMO 雷达通信一体化系统中同时实现低旁瓣感知与高精度信道估计。2025 年, Liu 等^[11]基于传统 ZCP 和 II 型 ZCP^[12],利用相位矩阵优化(Phase Matrix Optimization, PMP)生成多普勒弹性波形。此外, Chen 等^[13]通过分数规划与高阶多项式优化直接塑造模糊函数形状,提升了多普勒容限与旁瓣抑制性能。Li 等^[14]针对 MIMO 正交频分复用(Frequency Division Multiplexing, OFDM)系统提出了符号级预编码方法,通过抑制距离—多普勒旁瓣平衡感知与通信性能。

尽管 GCP 和 ZCP 具有良好的非周期自相关特性,但其设计范式仅关注单序列的自相关,忽视了

MIMO 雷达多天线同时发射所带来的互相关能量泄漏^[15]。互相关过高会直接导致距离—多普勒平面上模糊函数的峰值旁瓣电平比(Peak Sidelobe Level Ratio, PSLR)和积分旁瓣电平比(Integrated Sidelobe Level Ratio, ISLR)的抬升,其后果容易导致强目标互相关峰可能掩盖邻近弱目标,降低检测概率;旁瓣能量进入多普勒滤波通道,削弱系统多普勒容忍能力。因此,将互相关纳入波形设计并与自相关联合优化,是 MIMO 雷达实现高灵敏度、高可靠探测的前提。为此, Shen 等^[16]于 2024 年提出优选 Z 互补对(Preferred Z-Complementary Pair, PZCP),在保持 ZCP 零相关区的同时,将序列间互相关纳入优化目标,显著改善了 MIMO 雷达的联合自—互相关特性。然而,文献仅给出了长度为 2 的幂次或 $4N, 4N+2 (N=2^\alpha 10^\beta 26^\gamma)$ 的构造结果,限制了 PZCP 在实际抗多普勒波形中的应用。为填补上述空白,本文提出级联—插值联合构造框架,系统地生成了 3 类 PZCP,实现了现有研究无法得到的多种序列长度,显著扩展了参数空间。基于扩展 PZCP 集合,进一步结合 ESP 发射顺序,设计出低旁瓣 MIMO 雷达波形。仿真结果表明,所提方案在 PSLR、ISLR 及互相关抑制方面均优于传统 GCP、ZCP 和既有 PZCP,为多普勒敏感场景提供了即用型波形资源。

1 预备知识

本文使用的数学符号含义如下:

+ 和 - 分别代表 1 和 -1; $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 表示序列 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ 和 $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{L-1})$ 的级联,即 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} = (a_0, \dots, a_{N-1}, b_0, \dots, b_{L-1})$; $\otimes$ 表示克罗内克积; N 长序列 $\mathbf{a}$ 和 L 长序列 $\mathbf{b}$ 的克罗内克积序列为 $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (a_0 b, a_1 b, \dots, a_{N-1} b)$, 长度为 NL ; $\tilde{\mathbf{a}}$ 表示序列 $\mathbf{a}$ 的倒置。

定义 1 两个序列长度为 N 的复序列 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ 与 $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$, 它们的非周期互相关函数(Aperiodic Cross-Correlation Function, ACCF)定义为

$$R_{a,b}(\tau) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{N-1-\tau} a_i b_{i+\tau}, & 0 \leq \tau < N \\ \sum_{i=0}^{N-1+\tau} a_{i-\tau} b_i, & -N < \tau < 0 \\ 0, & |\tau| \geq N \end{cases} \quad (1)$$

当 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 时, $R_{a,b}(\tau)$ 称为序列的自相关函数(Aperiodic Auto-Correlation Function, AACF), 简写

为 $R_a(\tau)$ 。

引理 1^[18] 二元等长序列 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的 AACF 和 ACCF 满足 $R_a(\tau) = R_{\tilde{a}}(\tau)R_{b,a}(\tau) = R_{a,b}(-\tau), R_{a,b}(\tau) = R_{b,\tilde{a}}(\tau)$ 。

定义 2^[3] 若 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 为 N 长二元序列对, 组成序列的 AACF 之和满足以下条件:

$$R_a(\tau) + R_b(\tau) = \begin{cases} 2N, & \tau = 0; \\ 0, & \tau \neq 0. \end{cases} \quad (2)$$

则称该序列对为 GCP。

GCP 的核序列对长度分别为 2、10 和 26, 见表 1。核序列对是 GCP 的基础构建单元, 其长度直接决定后续通过 Turyn 法^[6]扩展生成的长 GCP 长度, 且序列元素的幅值与相位特性会传递至扩展序列, 是长 GCP 实现低旁瓣、高相关性能的核心前提。表中, K 为核序列对的编号, 用于区分不同长度的 GCP 核序列对。利用 GCP 的核序列对, 通过 Turyn 法能产生长度 $2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$ 的 GCP, 其中 $\alpha \geq 1, \beta, \gamma \geq 0$ 。

表 1 Golay 核序列对

长度	$K = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$
2	$K_2 = (++)$
10	$K_{10} = (++++-+--++)$
26	$K_{26} = (++++-+--++-+--++-+--++-+--++)$

定义 3 若 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 为 N 长 GCP, 其元素满足:

$$\begin{cases} a_i = b_i, & 0 \leq i < P; \\ a_i = -b_i, & N - P \leq i < N. \end{cases} \quad (3)$$

则称 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 为 I 型 QS-GCP, 其中 P 表示对称区间长度。II 型 QS-GCP 需 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 中元素满足:

$$\begin{cases} a_i = -b_i, & 0 \leq i < P; \\ a_i = b_i, & N - P \leq i < N. \end{cases} \quad (4)$$

显然, 表 1 中的 GCP 核序列对是 QS-GCP, 其中 K_2 是对称结构, 对称区间为 1; K_{10} 和 K_{26} 为准对称结构, 对称区间分别为 4 和 12。

定义 4^[17] $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 和 $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ 为两个 N 长 GCP, 若它们的 ACCF 满足:

$$R_{a,c}(\tau) + R_{b,d}(\tau) = 0 \quad (5)$$

则称它们互为互补伴。

引理 2 若 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 是 GCP, 若序列对 $(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\tilde{\mathbf{b}}^*, -\tilde{\mathbf{a}}^*)$ (“*”表示复数共轭运算), 则 $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ 是 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 的一个互补伴。

定义 5^[16] 对于 N 长序列对 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, 如果它们的 AACF 和 ACCF 满足:

$$R_a(\tau) + R_b(\tau) = 0, \quad 0 < |\tau| < Z \quad (6)$$

$$R_{a,b}(\tau) + R_{b,a}(\tau) = 0, \quad -Z < \tau < Z \quad (7)$$

则 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 被称为 PZCP, 记作 (N, Z) -PZCP, 其中 Z 表示零相关区 (Zero Correlation Zone, ZCZ) 的长度。如果不考虑式 (7), 则 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 转化为 ZCP^[8], 记作 (N, Z) -ZCP。特别地, 当 $Z=N$ 时, 则 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 由 ZCP 转化为 GCP。

根据定义 5 可得出 PZCP 以下性质。

性质 1 若 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 为 (N, Z) -PZCP, 则 $(-\mathbf{a}, -\mathbf{b})$ 、 $(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*)$ 、 $(\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})$ 和 $(\mathbf{a}, -\mathbf{b})$ 也为 (N, Z) -PZCP。

定义 6^[4] 假设雷达在 K 个脉冲重复间隔 (Pulse Repetition Interval, PRI) 内依次发射 K 个调制脉冲序列串 $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}^0, \mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^{K-1}\}$, 脉冲序列 $\mathbf{a}^k$ 包含 L 个码片, $0 \leq k < K$, 则雷达模糊函数定义为

$$\zeta_A(\tau, \theta) = \sum_{k=0}^{K-1} R_{a^k}(\tau) e^{jk\theta} \quad (8)$$

式中: 时间延迟 τ 表示雷达发射信号与回波信号之间的时间差; θ 表示连续 PRI 之间的多普勒频移。

定义 7^[5] 令 $S = \{S_0, S_1, \dots, S_{P-1}\}$ 是包含 P 个子集的非负整数集, 如果满足:

$$\sum_{n \in S_0} n^m = \sum_{n \in S_1} n^m = \dots = \sum_{n \in S_{P-1}} n^m \quad (9)$$

则称 S 是具有度为 M 的 ESP 集, 式中, $m = 1, 2, \dots, M$ 。

2 PZCP 构造方法

本节采用级联—插值联合框架, 系统生成 3 类新型 PZCP。首先, 以 Turyn 方法构造对称区间长度可配置的 QS-GCP, 并将其作为基元, 通过级联—插值得到两类 PZCP; 随后, 以现有 ZCP 为种子, 再次施行级联—插值, 获得第 3 类 PZCP。

2.1 Turyn 法构造 QS-GCP

引理 3 令 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 为 M 长 GCP, $\mathbf{B} = (\mathbf{c}, \mathbf{d})$ 为长度 N 的 QS-GCP。利用 Turyn 法得到长度为 $L = MN$ 的序列对 $(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \text{Turyn}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) =$

$$\left(\mathbf{c} \otimes \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b})}{2} - \tilde{\mathbf{d}} \otimes \frac{(\mathbf{b} - \mathbf{a})}{2}, \mathbf{d} \otimes \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b})}{2} + \tilde{\mathbf{c}} \otimes \frac{(\mathbf{b} - \mathbf{a})}{2} \right),$$

那么, $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$ 的也是一个 QS-GCP。

证明: 由于 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都为 GCP, Turyn 变换后的 $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$ 也是 GCP^[6], 下面考虑其对称性。则 $(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{U} - \tilde{\mathbf{d}} \otimes \mathbf{V}, \mathbf{d} \otimes \mathbf{U} - \tilde{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{V})$ 。由克罗内克积定义得:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{c} \otimes \mathbf{U} - \tilde{\mathbf{d}} \otimes \mathbf{V} = c_0 \mathbf{U} - d_{N-1} \mathbf{V}, \\ &c_1 \mathbf{U} - d_{N-2} \mathbf{V}, \dots, c_{N-2} \mathbf{U} - d_1 \mathbf{V}, c_{N-1} \mathbf{U} - d_0 \mathbf{V} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{d} \otimes \mathbf{U} - \tilde{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{V} = d_0 \mathbf{U} - c_{N-1} \mathbf{V}, \\ &d_1 \mathbf{U} - c_{N-2} \mathbf{V}, \dots, d_{N-2} \mathbf{U} - c_1 \mathbf{V}, d_{N-1} \mathbf{U} - c_0 \mathbf{V} \end{aligned} \quad (11)$$

若序列对 $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ 为 I 型 QS-GCP, 对称区间长为

P , 即:

$$\begin{cases} c_i = d_i, & 0 \leq i < P; \\ c_i = -d_i, & N - P \leq i < N, \end{cases}$$

则 (e, f) 的元素可表示为

$$e_{iM} = \begin{cases} c_i U + c_{N-1-i} V, & 0 \leq i < P; \\ c_i U - d_{N-1-i} V, & P \leq i < N - P; \\ c_i U - c_{N-1-i} V, & N - P \leq i < N. \end{cases} \quad (12)$$

$$f_{iM} = \begin{cases} c_i U + c_{N-1-i} V, & 0 \leq i < P; \\ d_i U + c_{N-1-i} V, & P \leq i < N - P; \\ -c_i U + c_{N-1-i} V, & N - P \leq i < N. \end{cases} \quad (13)$$

可见, (e, f) 的前 PM 列元素符号相同, 后 PM 列元素符号相反。如果 (c, d) 为 II 型 QS-GCP, 证明过程类似, 不再赘述。综上所述, (e, f) 为一个 QS-GCP, 对称区间长度为 PM 。

由引理 3 可见, 若 (c, d) 分别为 K_2, K_{10} 和 K_{26} , (a, b) 是长度为 M 的 GCP, 则 (e, f) 是 QS-GCP, 对称区间分别为 $M, 4M$ 和 $12M$ 。对于二元序列, QS-GCP 覆盖了所有二元 GCP 的长度。

2.2 基于 QS-GCP 构造 PZCP

利用 QS-GCP 提出两类新参数 PZCP 的构造。

定理 1 设 (a, b) 是对称区间为 P 的 N 长 QS-GCP, (c, d) 是 (a, b) 的互补伴, 且 $(c, d) = (\tilde{b}^*, -\tilde{a}^*)$, 若满足以下任意 1 种情况: 1) $e = a \| kc, f = b \| kd$; 2) $e = a \| kd, f = b \| kc$ 。(其中 $k \in \{1, -1\}$), 则 (e, f) 为 $(2N, P+1)$ -PZCP。

证明: 首先证明情况 1)。

由于 (a, b) 和 (c, d) 都是 GCP, 且互为互补伴, 所以 $R_a(\tau) + R_b(\tau) = R_c(\tau) + R_d(\tau) = 0$, 且 $R_{a,c}(\tau) = R_{d,b}(\tau)$ 。若 $k = 1$ 时, 对于 $0 < \tau < N$, 则序列 e 和 f 的 AACF 之和为

$$R_e(\tau) + R_f(\tau) = R_a(\tau) + R_b(\tau) + R_c(\tau) + R_d(\tau) + R_{c,a}^*(N - \tau) + R_{d,b}^*(N - \tau) = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{当 } 0 \leq \tau < P + 1 \text{ 时, 序列 } e \text{ 与 } f \text{ 的 ACCF 和为} \\ R_{ef}(\tau) + R_{fe}(\tau) &= R_{a,b}(\tau) + R_{d,a}^*(N - \tau) + R_{c,d}(\tau) + \\ &R_{b,a}(\tau) + R_{c,b}^*(N - \tau) + R_{d,c}(\tau) = R_{a,b}(\tau) + \\ &R_{-a,a}^*(N - \tau) + R_{b,-a}(\tau) + R_{b,a}(\tau) + R_{b,b}^*(N - \tau) + \\ &R_{-a,b}(\tau) = R_{-aa}^*(N - \tau) + R_{bb}^*(N - \tau) \end{aligned} \quad (15)$$

如果 (a, b) 为 I 型的 QS-GCP, 式 (15) 可化为

$$\begin{aligned} R_{ef}(\tau) + R_{fe}(\tau) &= \sum_{i=N-\tau}^{N-1} -\tilde{a}_i a_{i-(N-\tau)} + \\ &\sum_{i=N-\tau}^{N-1} \tilde{b}_i b_{i-(N-\tau)} = \sum_{i=N-\tau}^{N-1} -\tilde{a}_i a_{i-(N-\tau)} + \\ &\sum_{i=N-\tau}^{N-1} \tilde{a}_i a_{i-(N-\tau)} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

如果 (a, b) 为 II 型的 QS-GCP, 同理可得 $R_{ef}(\tau) +$

$$R_{fe}(\tau) = 0。$$

当 $\tau = P + 1$ 时, 可得:

$$\begin{aligned} R_{ef}(\tau) + R_{fe}(\tau) &= \sum_{i=N-P-1}^{N-1} -\tilde{a}_i a_{i-(N-\tau)} + \\ &\sum_{i=N-P-1}^{N-1} \tilde{b}_i b_{i-(N-\tau)} = -\tilde{a}_{N-P-1} a_0 + \tilde{b}_{N-P-1} b_0 - \\ &\tilde{a}_{N-1} a_P + \tilde{b}_{N-1} b_P + \sum_{i=N-P}^{N-2} -\tilde{a}_i a_{i-(N-\tau)} + \\ &\sum_{i=N-P}^{N-2} \tilde{b}_i b_{i-(N-\tau)} = -\tilde{a}_{N-P-1} a_0 + \tilde{b}_{N-P-1} b_0 - \\ &\tilde{a}_{N-1} a_P + \tilde{b}_{N-1} b_P \end{aligned} \quad (17)$$

无论 (a, b) 为 I 型还是 II 型的 QS-GCP, 式 (17) 都可得到:

$$R_{ef}(\tau) + R_{fe}(\tau) = -4a_P a_0 = \pm 4 \quad (18)$$

综上, 当 $k = 1$ 时, (e, f) 为 $(2N, P+1)$ -PZCP。

当 $k = -1$ 时, 对于 $0 < \tau < N$, 序列对 (e, f) 的组成序列 AACF 之和为

$$R_e(\tau) + R_f(\tau) = R_a(\tau) + R_b(\tau) + R_c(\tau) + R_d(\tau) - R_{c,a}^*(N - \tau) - R_{d,b}^*(N - \tau) = 0 \quad (19)$$

当 $0 \leq \tau \leq P$ 时, (e, f) 的 ACCF 和为

$$\begin{aligned} R_{ef}(\tau) + R_{fe}(\tau) &= R_{a,b}(\tau) - R_{d,a}^*(N - \tau) + R_{c,d}(\tau) + \\ &R_{b,a}(\tau) - R_{c,b}^*(N - \tau) + R_{d,c}(\tau) = \\ &-\left(R_{-a,a}^*(N - \tau) + R_{b,b}^*(N - \tau)\right) = \\ &-\left(\sum_{i=N-\tau}^{N-1} -\tilde{a}_i a_{i-(N-\tau)} + \sum_{i=N-\tau}^{N-1} \tilde{b}_i b_{i-(N-\tau)}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

如果 (a, b) 为 I 型 QS-GCP, 式 (20) 可化为

$$R_{ef}(\tau) + R_{fe}(\tau) = -\left(\sum_{i=N-\tau}^{N-1} -\tilde{a}_i a_{i-(N-\tau)} + \sum_{i=N-\tau}^{N-1} \tilde{a}_i a_{i-(N-\tau)}\right) = 0 \quad (21)$$

如果 (a, b) 为 II 型 QS-GCP, 同理可得 $R_{ef}(\tau) + R_{fe}(\tau) = 0$ 。

当 $\tau = P + 1$ 时, 有:

$$\begin{aligned} R_{ef}(\tau) + R_{fe}(\tau) &= \\ &-\sum_{i=N-P-1}^{N-1} -\tilde{a}_i a_{i-(N-\tau)} - \sum_{i=N-P-1}^{N-1} \tilde{b}_i b_{i-(N-\tau)} = \\ &\tilde{a}_{N-P-1} a_0 - \tilde{b}_{N-P-1} b_0 + \tilde{a}_{N-1} a_P - \tilde{b}_{N-1} b_P + \\ &\sum_{i=N-P}^{N-2} -\tilde{a}_i a_{i-(N-\tau)} - \sum_{i=N-P}^{N-2} \tilde{b}_i b_{i-(N-\tau)} = \\ &\tilde{a}_{N-P-1} a_0 - \tilde{b}_{N-P-1} b_0 + \tilde{a}_{N-1} a_P - \tilde{b}_{N-1} b_P \end{aligned} \quad (22)$$

由于 (a, b) 为 I 型或 II 型的 QS-GCP, 则式 (22)

可化为

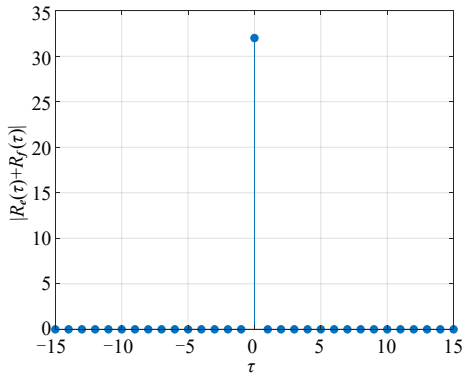
$$R_{ef}(\tau) + R_{fe}(\tau) = 4a_P a_0 = \pm 4 \quad (23)$$

因此, (e, f) 是一个 $(2N, P+1)$ -PZCP。

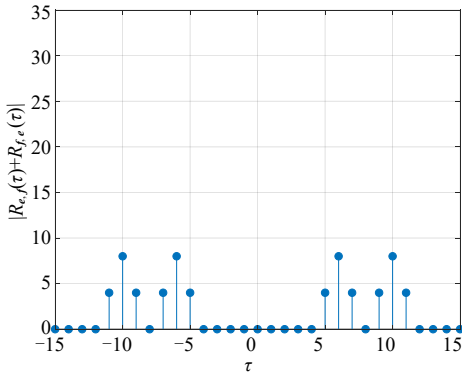
类似地,情况2)的证明不再赘述。

举例证明。例1:选取对称区间为4、长度8的I型QS-GCP($\mathbf{a}, \mathbf{b}$) = (+ + + - + + - +, + + + - - - -)。

根据定理1可得序列($\mathbf{e}, \mathbf{f}$) = (+ + + - + + - + - - - + + +, + + + - - - - + - - - + - - -)。序列对($\mathbf{e}, \mathbf{f}$)的AACF为 $|R_e(\tau) + R_f(\tau)| = (32, 0_{15})$, ACCF为 $R_{ef}(\tau) + R_{fe}(\tau) = (0_5, 4, 8, 4, 0, 4, 8, 4, 0_4)$, 其中 0_k 表示 k 个0。(e, f)的相关函数表示在图1中, 可见序列对(e, f)为(16, 5)-PZCP。



(a) AACF之和



(b) ACCF之和

图1 (16, 5)-PZCP的相关函数图

定理2 设($\mathbf{a}, \mathbf{b}$)是一个I型QS-GCP, ($\mathbf{c}, \mathbf{d}$)是($\mathbf{a}, \mathbf{b}$)的互补伴, 且($\mathbf{c}, \mathbf{d}$) = ($\mathbf{b}^*, -\mathbf{a}^*$), 当分别满足以下两种情况时: 1) $\mathbf{e} = x \|\mathbf{a}\|_{kc} - x, \mathbf{f} = -x \|\mathbf{b}\|_{kd} - x$; 2) $\mathbf{e} = x \|\mathbf{a}\|_{kd} - x, \mathbf{f} = -x \|\mathbf{b}\|_{kc} - x, (k, x \in \{1, -1\})$, 构造的序列对($\mathbf{e}, \mathbf{f}$)为($2N + 2, P + 1$)-PZCP。

证明: 首先证明情况1)。

当 $k = 1$ 时, 且 $0 < \tau \leq P$, ($\mathbf{e}, \mathbf{f}$)的AACF和为

$$R_e(\tau) + R_f(\tau) = xa_{\tau-1} + R_a(\tau) + R_{c,a}^*(N-\tau) + R_c(\tau) - c_{N-\tau}x^* - xb_{\tau-1} + R_b(\tau) + R_{d,b}^*(N-\tau) + R_d(\tau) - d_{N-\tau}x^* = xa_{\tau-1}^* - c_{N-\tau}x^* - xb_{\tau-1}^* - d_{N-\tau}x^* = 0 \quad (24)$$

当 $\tau = P + 1$ 时, 有:

$$R_e(\tau) + R_f(\tau) = xa_p^* - c_{N-1-p}x^* - xb_p^* - d_{N-1-p}x^* \quad (25)$$

由于($\mathbf{a}, \mathbf{b}$)为I型QS-GCP, 因此

$$R_e(\tau) + R_f(\tau) = 4xa_p = \pm 4 \quad (26)$$

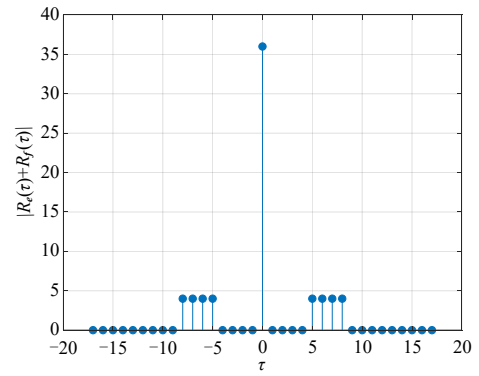
当 $0 \leq \tau \leq P$ 时, 序列对($\mathbf{e}, \mathbf{f}$)的ACCF和为

$$\begin{aligned} R_{ef}(\tau) + R_{fe}(\tau) = & x_1 b_{\tau-1}^* + R_{a,b}(\tau) + R_{d,a}^*(N-\tau) + R_{c,d}(\tau) + \\ & c_{N-\tau}y_2^* + y_1 a_{\tau-1}^* + R_{b,a}(\tau) + R_{c,b}^*(N-\tau) + \\ & R_{d,c}(\tau) + d_{N-\tau}x_2^* = R_{a,b}(\tau) + R_{-a,a}^*(N-\tau) + \\ & R_{b,-a}(\tau) + R_{b,a}(\tau) + \\ & R_{b,b}^*(N-\tau) + R_{-a,b}(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

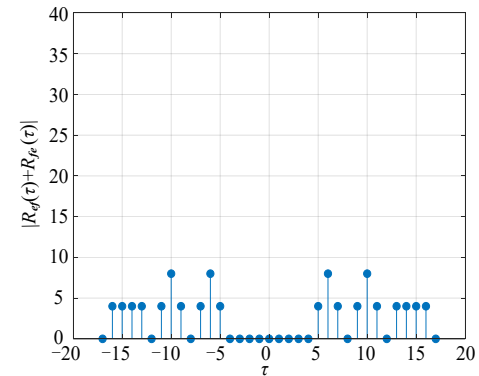
因此, ($\mathbf{e}, \mathbf{f}$)满足PZCP的定义。当 $k = -1$ 时, 证明过程类似, 不再赘述。

类似地, 情况2)的结论可从以上证明过程中得出, 不再重复。综上所述, ($\mathbf{e}, \mathbf{f}$)为一个($2N + 2, P + 1$)-PZCP。

例2: 选取例1中I型QS-GCP($\mathbf{a}, \mathbf{b}$), 令 $k = x = 1$, 根据定理2中的情况1)可得序列对($\mathbf{e}, \mathbf{f}$) = (+ + + - + + - + - - - + + +, - + + + - - - + - - - + - - -), ($\mathbf{e}, \mathbf{f}$)的相关函数如图2所示。显然, ($\mathbf{e}, \mathbf{f}$)是一个(18, 5)-PZCP。



(a) AACF之和



(b) ACCF之和

图2 (18, 5)-PZCP的相关函数图

与定理2方法类似, 基于II型QS-GCP也可获得相同参数的PZCP, 结论如下。

定理3 设 (a, b) 是一个II型的QS-GCP, $(c, d) = (\tilde{b}^*, -\tilde{a}^*)$, 当分别满足以下两种情况时: 1) $e = x \| a \| kc \| x, f = x \| b \| kd \| -x$; 2) $e = x \| a \| kd \| x, f = x \| b \| kc \| -x$, $(k, x \in \{1, -1\})$, 则序列对 (e, f) 为 $(2N + 2, P + 1)$ -PZCP。

证明过程与定理2类似, 不再赘述。

2.3 基于ZCP构造PZCP

由定理1~定理3可见, 基于QS-GCP的构造方法受到GCP长度的限制。为了进一步扩展PZCP参数, 本节提出一类基于ZCP的构造方案。

定理4 若 (a, b) 为 (N, Z) -ZCP, 且 $a_i = b_p, a_{N-1-i} = -b_{N-1-p}, 0 \leq i < P$ 。设 $(c, d) = (\tilde{b}^*, -\tilde{a}^*)$, 令 $e = a \| c$, $f = b \| d$, 则序列对 (e, f) 为 $(2N, \min \{Z + 1, P + 1\})$ -PZCP。

证明: 当 $0 < \tau \leq Z$ 时, (e, f) 的AACF和为

$$R_e(\tau) + R_f(\tau) = R_a(\tau) + R_b(\tau) + R_c(\tau) + R_d(\tau) + R_{ca}^*(N - \tau) + R_{db}^*(N - \tau) = 0 \quad (28)$$

当 $0 \leq \tau \leq P$ 时, (e, f) 的ACCF和为

$$R_{ef}(\tau) + R_{ef}(\tau) = R_{ab}(\tau) + R_{da}^*(N - \tau) + R_{cd}(\tau) + R_{ba}(\tau) + R_{cb}^*(N - \tau) + R_{dc}(\tau) + R_{ca}^*(N - \tau) + R_{db}^*(N - \tau) = 0 \quad (29)$$

由式(28)和式(29)可知, (e, f) 是一个 $(2N, \min \{Z + 1, P + 1\})$ -PZCP。

例3: 选取ZCP $(a, b) = (++++-, ++-+-)$ 为基序列, 其中 $Z = 2, P = 2$ 。根据定理4, 得到序列对 $(e, f) = (++++-+-+--+, +-+--+-+--)$, 则 (e, f) 的AACF和以及ACCF和分别为 $|R_e(\tau) + R_f(\tau)| = (24, 0, 0, 8, 0_8), |R_{ef}(\tau) + R_{fe}(\tau)| = (0, 0, 0, 4, 0_2)$ 。

如图3所示, (e, f) 是一个 $(12, 3)$ -PZCP。

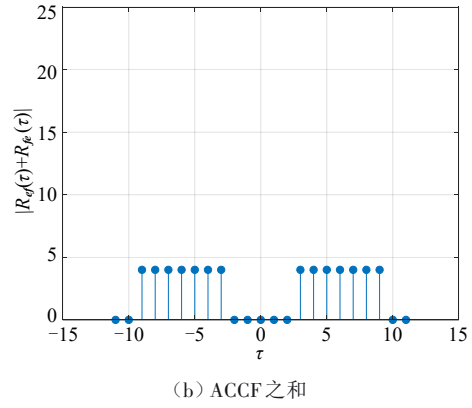
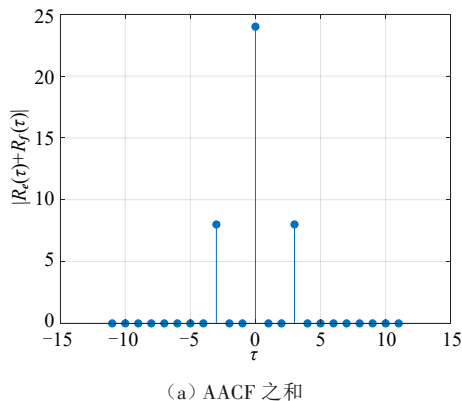


图3 (12, 3)-PZCP的相关函数图

3 PZCP参数比较

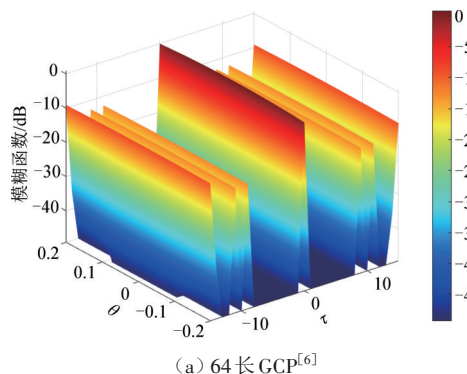
表2汇总了定理1~定理4与文献[16]构造的PZCP的完整参数。

表2 PZCP参数对比

引用	构造	PZCP长度	ZCZ宽度	Z/L
	定理1	$2^m, m \geq 1$	$2^{\pi(1)-1} + 1$	$\leq \frac{1}{4}$
文献 [16]	定理2	$2^{m+1} + 2, m \geq 3$	$2^{\pi(m-2)-1} + 1$	$\leq \frac{1}{4}$
	定理3	$4N, N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$	$N + 1$	$\approx \frac{1}{4}$
	定理4	$4N + 2, N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$	$N + 1$	$\approx \frac{1}{4}$
本文	定理1	$2N, N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$	$P + 1, P \leq \frac{N}{2}$	$\approx \frac{1}{4}$
	定理2	$2N + 2, N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$	$P + 1$	$\approx \frac{1}{4}$
	定理3	$2N + 2, N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$	$P + 1$	$\approx \frac{1}{4}$
	定理4	$2N, N$ 为ZCP长度	$\min \{Z + 1, P + 1\}$	$\leq \frac{1}{4}$

如表2所示, 文献[16]的定理1和2利用布尔函数实现长度为 2^m ($m \geq 1$)和 $(2^{m+1} + 2)$ ($m \geq 3$)的两类PZCP, 定理3和定理4利用拼接法获得长度为 $4N$ 和 $(4N + 2)$ 的PZCP, 其中 N 为 $2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$ 。相较之下, 本文利用级联—插值方法, 定理1~定理3以QS-GCP为种子生成长度为 $2N$ 、 $(2N + 2)$ 型PZCP, 定理4再以ZCP为种子进一步扩展参数空间。所有构造结果的ZCZ长度与序列长度的比值保持在 $1/4$ 左右, 但本文方法首次提供了12、20、22、24、28、36、52、54等文献[16]无法覆盖的多种长度, 显著扩展可用序列集合。

表3列出了文献[16]所需部分尚不能产生的若干PZCP。其中20和22长序列由10长QS-GCP生成, 而12、24、28、36长序列由6、12、14和18长ZCP^[17]生成。上述结果显著扩充了PZCP的参数空间, 可为雷达波形设计提供更丰富的候选序列。



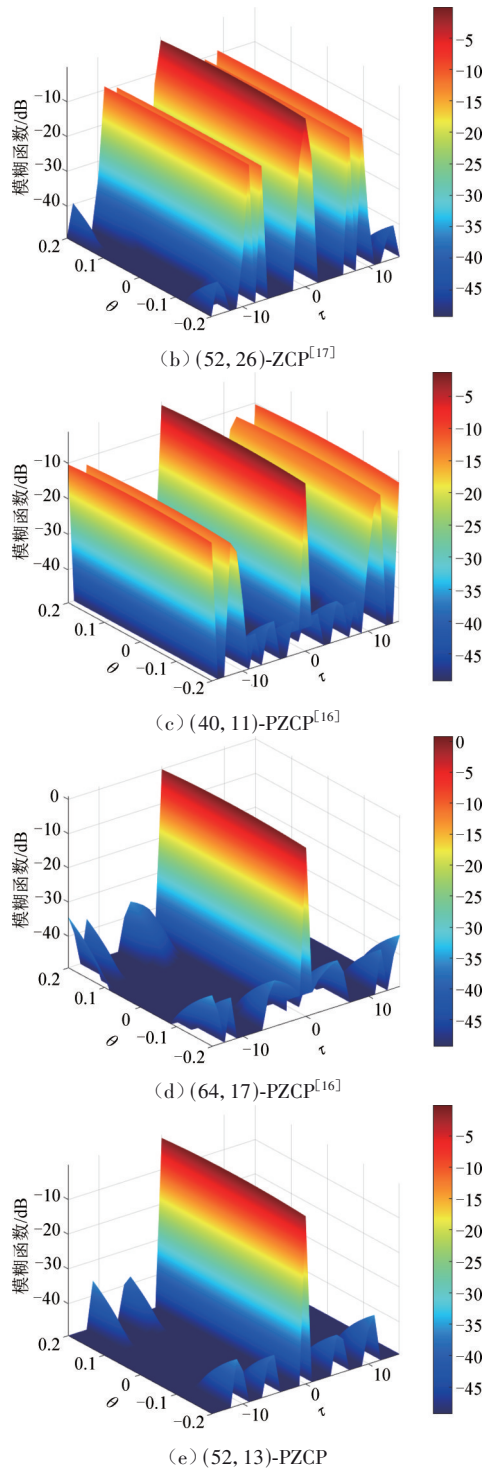


图5 脉冲序列的ESP发射波形模糊函数图

图5中,选取了本文的(52,13)-PZCP。由于文献[16]无法生成52长度的PZCP,因此选择了该长度附近的(40,11)-PZCP和(64,17)-PZCP。为方便对比,选取GCP长度为64^[6],ZCP为(52,28)-ZCP^[17]。由于以上波形的ZCZ范围为11~28,折中考虑将雷达匹配滤波的观测时延范围设为[-15, 15]。多普勒频移选取 $\theta \in [-0.2, 0.2]$,以覆盖主瓣附近绝大部分

能量区域。

图6展示了 $\theta = 0.2$ 处的各波形的二维模糊函数时域相关对比曲线。结合图5可见,GCP、ZCP和(40,11)-PZCP^[16]的旁瓣水平和数量明显高于(64,17)-PZCP^[16]和本文(52,13)-PZCP,其根源在于GCP和ZCP设计未顾及互相关对模糊函数的恶化效应;而(40,11)-PZCP因ZCZ范围小于观测时延,导致ZCZ外旁瓣激增。综上,PZCP的多普勒容忍性全面优于GCP和ZCP。

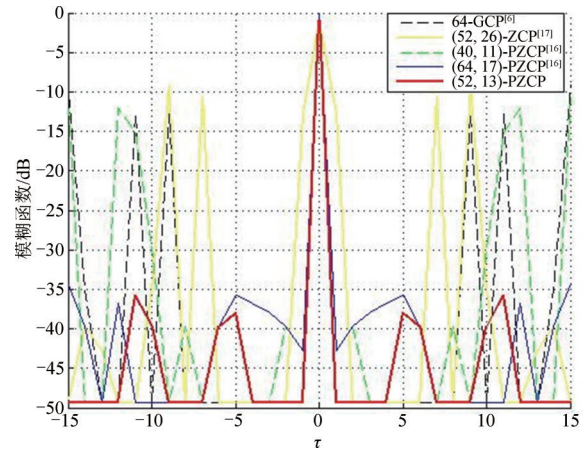


图6 雷达波形的二维模糊函数图

表4汇总了3类PZCP的PSLR和ISLR量化结果:本文52长PZCP较40长序列的PSLR提升25 dB左右,ISLR提升7 dB;与64长PZCP性能相当,却缩短序列长度19%,有效降低雷达时隙资源消耗,为雷达波形库提供了更具竞争力的候选方案。

表4 3类PZCP模糊函数旁瓣电平对比 单位: dB

PZCP参数	PSLR	ISLR
(40,11)-PZCP ^[16]	-9.471 5	-40.587 3
(64,17)-PZCP ^[16]	-35.776 1	-48.515 4
(52,13)-PZCP	-34.314 9	-47.480 1

5 结束语

为提升MIMO雷达在多普勒环境下的探测性能,本文构建PZCP与ESP集联合波形设计框架,优化雷达发射波形设计。针对现有PZCP构造参数稀疏、长度受限的瓶颈,提出级联一插值通用构造范式,通过引入QS-GCP和传统ZCP两类基础序列生成3类新型PZCP,填补了现有研究中PZCP长度覆盖的空白,显著拓展了PZCP的存在空间。仿真结果表明,所构造的PZCP能在相对更短序列长度下,模糊函数仍具有低的PSLR和ISLR,优于同条件下GCP、ZCP及已有PZCP,验证了“以短代长”

的波形资源节约潜力。然而,目前PZCP的ZCZ宽度与序列长度之比仍受 $1/4$ 上限约束。如何突破该理论界限、实现更大ZCZ占比的PZCP,将是后续研究亟待解决的关键问题。

参考文献:

- [1] LEVANON N, MOZESON E. Radar signals [M]. New York, USA: Wiley, 2004:123-146.
- [2] 丁鹭飞,耿富禄,陈建春.雷达原理[M].6版.北京:电子工业出版社,2020:11-22.
- [3] GOLAY M. Complementary series [J]. IRE Transactions on Information Theory, 1961,7(2):82-87.
- [4] PEZESHKI A, CALDERBANK A R, MORAN W, et al. Doppler resilient golay complementary waveforms [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008,54(9):4254-4266.
- [5] NGUYEN H D, COXSON G E. Doppler tolerance, complementary code sets, and generalised Thue-Morse sequences[J]. IET Radar, Sonar & Navigation, 2016,10(9):1603-1610.
- [6] BORWEIN P B, FERGUSON R A. A complete description of golay pairs for lengths up to 100[J]. Mathematics of Computation, 2004,73(246):967-985.
- [7] 周正春.互补序列研究进展[J].广西师范大学学报(自然科学版),2023,41(1):1-16.
- [8] FAN P Z, YUAN W N, TU Y F. Z-complementary binary sequences[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2007,14(8):509-512.
- [9] WANG J H, FAN P Z, YANG Y, et al. Doppler resilient Z-complementary waveforms from ESP sequences [C]//2017 Eighth International Workshop on Signal Design and Its Applications in Communications. Piscataway, USA: IEEE, 2017:19-23.
- [10] ZHOU Z C, LIU B, SHEN B S, et al. Doppler-resilient waveform design in integrated MIMO radar-communication systems [J]. Science China Information Sciences, 2023,67(1):No.112301.
- [11] LIU T, CHEN H R, LI Y B. Doppler resilient MIMO radar waveform design from zero correlation zone complementary sequence pairs [J]. Digital Signal Processing, 2025,158:No.104912.
- [12] PRIYANSHU P, PAUL S, MAJHI S. Construction of all even lengths type-II Z-complementary pair with a large zero-correlation zone [J]. Cryptography and Communications, 2024,16(6):1417-1427.
- [13] CHEN Z H, LIANG J L, SONG K M, et al. On designing good Doppler tolerance waveform with low PSL of ambiguity function[J]. Signal Processing, 2023,210:No.109075.
- [14] LI P S, LI M, LIU R, et al. MIMO-OFDM ISAC waveform design for range-Doppler sidelobe suppression [J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2025,24(2):1001-1015.
- [15] GOLOMB S W, GONG G. Signal design for good correlation[M]. New York: Cambridge University Press, 2005:1-438.
- [16] SHEN B S, YANG Y, FAN P Z. Preferred Z-complementary pairs and their application in Doppler resilient waveform design [J]. Cryptography and Communications, 2024,16(1):71-87.
- [17] YU T, DU X Y, LI L P, et al. Constructions of even-length Z-complementary pairs with large zero correlation zones[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2021,28:828-831.

(编辑:冯春)