doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024092

凸约束方程组的新型无导数算法及在信号重构中的应用

夏 艳[1]，李远飞[1]，王松华[2]，李丹丹[1]
（1. 广州华商学院 应用数学系，广州 511300；2. 百色学院 数学与统计学院，广西 百色 533000）

摘要：提出一种新型无导数算法，以解决凸约束非线性方程组问题. 该算法利用改进的共轭参数设计搜索方向，以确保算法的充分下降性和信赖域特性. 在适当的假设下，该算法具有全局收敛性. 数值仿真结果表明，该算法在处理凸约束非线性方程组问题和信号重构问题时具有高效性和鲁棒性.

关键词：凸约束非线性方程组；无导数；全局收敛性；信号重构
中图分类号：O224 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2024)06-1345-07

Novel Derivative-Free Algorithm for Convex Constrained Equations and Its Application in Signal Reconstruction

XIA Yan[1], LI Yuanfei[1], WANG Songhua[2], LI Dandan[1]
(1. *Department of Applied Mathematics, Guangzhou Huashang College, Guangzhou* 511300, *China*;
2. *School of Mathematics and Statistics, Baise University, Baise* 533000, *Guangxi Zhuang Autonomous Region, China*)

Abstract: We proposed a novel derivative-free algorithm to solve convex constrained nonlinear equation systems. The algorithm utilized improved conjugate parameters to design a search direction, ensuring sufficient descent and trust region characteristics of the algorithm. Under appropriate assumptions, the algorithm had global convergence. Numerical simulation results show that the algorithm has high efficiency and robustness in handling convex constrained nonlinear equation systems and signal reconstruction problems.

Keywords: convex constrained nonlinear equation systems; derivative-free; global convergence; signal reconstruction

0 引 言

考虑下列具有凸约束的非线性方程组问题：

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a})=0, \quad \boldsymbol{a}\in\mathbb{E}\subseteq\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

其中函数 $\boldsymbol{\Omega}$：$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续的. 形如问题(1)的非线性方程组在科学、工程、社会科学、管理科学等领域应用广泛[1-4]. 因此，研究求解问题(1)的数值方法有一定的理论意义. 由于牛顿法和拟牛顿法在

收稿日期：2024-03-12. **网络首发日期**：2024-09-06.

第一作者简介：夏 艳(1996—)，女，汉族，硕士，讲师，从事最优化方法与应用的研究，E-mail：3301798309@qq.com. **通信作者简介**：李远飞(1982—)，男，汉族，博士，教授，从事应用数学的研究，E-mail：liqfd@163.com.

基金项目：广西自然科学基金(批准号：2024GXNSFAA010478)和广州华商学院校内导师制项目(批准号：2023HSDS38).
网络首发地址：https://link.cnki.net/urlid/22.1340.o.20240905.1130.001.

每次迭代中需使用Jacobi矩阵或其近似值求解线性方程组，因此其通常不适合解决大规模问题. 本文主要研究不依赖于Jacobi矩阵或其近似值的数值方法，从而能有效处理大规模非线性方程组，同时保持较低的存储需求和计算复杂度.

近年来，为适应求解大规模非线性方程组的要求，对基于共轭梯度方法进行扩展的研究备受关注[5-13]. 例如，文献[5]将原用于二次优化问题的谱梯度方法进行扩展，使其适用于求解非线性方程组；文献[6]结合谱梯度方法和投影技术，提出了一种新的谱梯度投影方法，用于解决具有凸约束的非线性方程组；文献[7]利用最速下降法研究了一类共轭梯度法，旨在高效处理大规模非线性方程组；文献[8]对经典的PRP(Polak-Ribière-Polyak)共轭梯度法进行扩展，在非单调线搜索的框架下，构建了一种无导数PRP算法，以适应大规模非线性方程组的求解；结合RMIL(Rivaie-Mustafa-Ismail-Leong)共轭梯度法和一种新的非单调线搜索方法，文献[9]研究了一种新的无导数共轭梯度法，用于解决大规模非线性方程组.

受文献[14]工作的启发，并结合上述讨论的共轭梯度法以及投影技术，本文提出一种新的无导数算法(novel derivative-free，NDF)，用于求解凸约束非线性方程组. 新算法具有以下特性：1) 无需计算函数的Jacobi矩阵或其近似值；2) 搜索方向具有充分下降性并具有信赖域特点；3) 在较弱的假设下，新算法具有全局收敛性. 数值仿真实验结果表明，新算法适用于解决大规模凸约束非线性方程组问题，并且在压缩感知领域的信号重构问题中效果显著.

1 算 法

记投影算子为 $P_{\mathbb{E}}[\cdot]$，其定义如下：

$$P_{\mathbb{E}}[\boldsymbol{a}]=\arg\min\{\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|,\boldsymbol{b}\in\mathbb{E}\},\quad \boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n,$$

其中 $P_{\mathbb{E}}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{E}$ 且 $\mathbb{E}$ 为非空闭凸集. 此外，投影算子具有非扩张性质，即对任意的 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$，满足 $\|P_{\mathbb{E}}[\boldsymbol{a}]-\boldsymbol{b}\|\leqslant\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$，$\boldsymbol{b}\in\mathbb{E}$. 受文献[14]的启发，本文提出一种新的无导数算法，用于求解凸约束非线性方程组问题. 新算法的搜索方向和共轭参数分别定义如下：

$$\boldsymbol{d}_k=\begin{cases}-\boldsymbol{\Omega}_k, & k=0,\\ -\boldsymbol{\Omega}_k+\beta_k\boldsymbol{d}_{k-1}, & k\geqslant 1,\end{cases}\tag{2}$$

$$\beta_k=\frac{\min\left\{\left|\boldsymbol{\Omega}_k^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\Omega}_k-\frac{\mu_1(\boldsymbol{\Omega}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_{k-1})^2}{\|\boldsymbol{\Omega}_k\|\,\|\boldsymbol{\Omega}_{k-1}\|\,\|\boldsymbol{d}_{k-1}\|^2}\boldsymbol{\Omega}_{k-1}\right)\right|,\|\boldsymbol{\Omega}_k\|^2\right\}}{\max\{\mu_2\|\boldsymbol{\Omega}_k\|\,\|\boldsymbol{d}_{k-1}\|,\boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Omega}_k-\boldsymbol{\Omega}_{k-1})\}},\tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a}_k)$ 缩写为 $\boldsymbol{\Omega}_k$，$\mu_1>0$，$\mu_2>1$. 基于式(2)和式(3)，下面给出新的NDF算法流程如下.

给定初始点 $\boldsymbol{a}_0\in\mathbb{R}^n$，$l\in(0,2)$，$\delta,\sigma,\xi>0$，$\rho\in(0,1)$，$\mu_1>0$，$\mu_2>1$，令 $k:=0$；

步骤1) 计算 $\boldsymbol{\Omega}_k$，若 $\|\boldsymbol{\Omega}_k\|\leqslant\delta$，则算法停止，否则转步骤2)；

步骤2) 根据式(2)和式(3)计算搜索方向 $\boldsymbol{d}_k$；

步骤3) 计算试探点 $\boldsymbol{b}_k:=\boldsymbol{a}_k+t_k\boldsymbol{d}_k$，其中 $t_k:=\max\{\xi\rho^i:i=0,1,\cdots\}$，使得下式成立：

$$-\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a}_k+\xi\rho^i\boldsymbol{d}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k\geqslant\sigma\xi\rho^i\|\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a}_k+\xi\rho^i\boldsymbol{d}_k)\|\,\|\boldsymbol{d}_k\|^2;\tag{4}$$

步骤4) 若 $\|\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{b}_k)\|\leqslant\delta$，则算法停止，否则通过下式计算下一个迭代点：

$$\boldsymbol{a}_{k+1}=P_{\mathbb{E}}\left[\boldsymbol{a}_k-l\frac{\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{b}_k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{b}_k)}{\|\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{b}_k)\|^2}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{b}_k)\right];$$

步骤5) 令 $k:=k+1$，转步骤1).

2 算法性质与全局收敛性

为建立NDF算法的全局收敛性，需进行以下假设：

(H_1) 函数 $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a})$ 是Lipschitz连续的，即存在正常数 L，使得

$$\|\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{b})\|\leqslant L\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|,\quad\forall\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n.$$

(H_2) 问题(1)的解集非空.

引理 1　搜索方向 $\boldsymbol{d}_k$ 由式(2)和式(3)产生，则 $\boldsymbol{d}_k$ 满足充分下降性质，即 $\boldsymbol{\Omega}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k \leqslant -\left(1-\frac{1}{\mu_2}\right)\|\boldsymbol{\Omega}_k\|^2$.

证明：当 $k=0$ 时，$\boldsymbol{\Omega}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_0 = -\|\boldsymbol{\Omega}_0\|^2 \leqslant -(1-1/\mu_2)\|\boldsymbol{\Omega}_0\|^2$. 当 $k\geqslant 1$ 时，将式(2)两边左乘 $\boldsymbol{\Omega}_k^{\mathrm{T}}$ 并结合式(3)，得

$$\boldsymbol{\Omega}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k = \boldsymbol{\Omega}_k^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{\Omega}_k + \beta_k\boldsymbol{d}_{k-1}) = -\|\boldsymbol{\Omega}_k\|^2 + \beta_k\boldsymbol{\Omega}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_{k-1} \leqslant$$
$$-\|\boldsymbol{\Omega}_k\|^2 + \frac{\|\boldsymbol{\Omega}_k\|^2}{\mu_2\|\boldsymbol{\Omega}_k\|\|\boldsymbol{d}_{k-1}\|}\|\boldsymbol{\Omega}_k\|\|\boldsymbol{d}_{k-1}\| = -\left(1-\frac{1}{\mu_2}\right)\|\boldsymbol{\Omega}_k\|^2.$$

证毕.

引理 1 表明，NDF 算法的搜索方向 $\boldsymbol{d}_k$ 满足充分下降性质.

引理 2　假设搜索方向 $\boldsymbol{d}_k$ 由式(2)和式(3)产生，则 $\boldsymbol{d}_k$ 满足：

$$(1-1/\mu_2)\|\boldsymbol{\Omega}_k\| \leqslant \|\boldsymbol{d}_k\| \leqslant (1+1/\mu_2)\|\boldsymbol{\Omega}_k\|.$$

证明：一方面，由引理 1 得 $-\|\boldsymbol{\Omega}_k\|\|\boldsymbol{d}_k\| \leqslant \boldsymbol{\Omega}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k \leqslant -(1-1/\mu_2)\|\boldsymbol{\Omega}_k\|^2$，整理得 $\|\boldsymbol{d}_k\| \geqslant (1-1/\mu_2)\|\boldsymbol{\Omega}_k\|$. 另一方面，由式(2)和式(3)得

$$\|\boldsymbol{d}_k\| = \|-\boldsymbol{\Omega}_k + \beta_k\boldsymbol{d}_{k-1}\| \leqslant \|\boldsymbol{\Omega}_k\| + \frac{\|\boldsymbol{\Omega}_k\|^2}{\mu_2\|\boldsymbol{\Omega}_k\|\|\boldsymbol{d}_{k-1}\|}\|\boldsymbol{d}_{k-1}\| = \left(1+\frac{1}{\mu_2}\right)\|\boldsymbol{\Omega}_k\|.$$

证毕.

引理 2 表明，该算法的搜索方向 $\boldsymbol{d}_k$ 满足信赖域性质.

引理 3　假设序列 $\{\boldsymbol{a}_k\}$ 由 NDF 算法产生且假设条件(H_1)，(H_2)成立，则下列结论成立：

1) $\{\boldsymbol{a}_k\}$ 和 $\{\boldsymbol{b}_k\}$ 是有界的；

2) $\lim\limits_{k\to\infty} t_k\|\boldsymbol{d}_k\| = 0$.

证明：类似于文献[10]的引理 3.3 可证明结论成立.

引理 4　在假设条件(H_1)，(H_2)下，下式成立：

$$t_k \geqslant \min\left\{\xi, \frac{\rho(\mu_2-1)}{(1+1/\mu_2)^2\mu_2(L+\sigma C)}\right\},$$

其中 $C = LM + L\xi\rho^{-1}\left(1+\frac{1}{\mu_2}\right)N$.

证明：若 $t_k \neq \xi$，则式(4)结合 $t_k\rho^{-1}$ 得

$$-\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a}_k + t_k\rho^{-1}\boldsymbol{d}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k < \sigma t_k\rho^{-1}\|\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a}_k + t_k\rho^{-1}\boldsymbol{d}_k)\|\|\boldsymbol{d}_k\|^2.$$

此外，记 $\boldsymbol{a}_* \in \mathbb{E}$ 使得 $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a}_*) = 0$. 由序列 $\{\boldsymbol{a}_k\}$ 的有界性可推出 $\|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_*\| \leqslant M$，$M>0$. 于是有

$$\|\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a}_k + t_k\rho^{-1}\boldsymbol{d}_k)\| = \|\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a}_k + t_k\rho^{-1}\boldsymbol{d}_k) - \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a}_*)\| \leqslant L\|\boldsymbol{a}_k + t_k\rho^{-1}\boldsymbol{d}_k - \boldsymbol{a}_*\| \leqslant$$
$$L(\|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_*\| + t_k\rho^{-1}\|\boldsymbol{d}_k\|) \leqslant LM + Lt_k\rho^{-1}\|\boldsymbol{d}_k\|. \tag{5}$$

由引理 3 可知序列 $\{\boldsymbol{a}_k\}$ 的有界性和函数 $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a})$ 的连续性，于是有 $\|\boldsymbol{\Omega}_k\| \leqslant N$，$N>0$，结合式(5)以及引理 2，得

$$\|\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a}_k + t_k\rho^{-1}\boldsymbol{d}_k)\| \leqslant LM + Lt_k\rho^{-1}\left(1+\frac{1}{\mu_2}\right)\|\boldsymbol{\Omega}_k\| \leqslant LM + Lt_k\rho^{-1}\left(1+\frac{1}{\mu_2}\right)N \triangleq C.$$

再结合 Cauchy-Schwarz 不等式，由引理 1 得

$$\left(1-\frac{1}{\mu_2}\right)\|\boldsymbol{\Omega}_k\|^2 \leqslant -\boldsymbol{\Omega}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k = (\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a}_k + t_k\rho^{-1}\boldsymbol{d}_k) - \boldsymbol{\Omega}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k - \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a}_k + t_k\rho^{-1}\boldsymbol{d}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k \leqslant$$
$$Lt_k\rho^{-1}\|\boldsymbol{d}_k\|^2 + \sigma t_k\rho^{-1}C\|\boldsymbol{d}_k\|^2 = t_k\rho^{-1}C\|\boldsymbol{d}_k\|^2(L+\sigma C) \leqslant$$
$$t_k\rho^{-1}(L+\sigma C)\left(1+\frac{1}{\mu_2}\right)^2\|\boldsymbol{\Omega}_k\|^2,$$

整理得 $t_k \geqslant \frac{\rho(\mu_2-1)}{(1+1/\mu_2)^2\mu_2(L+\sigma C)}$. 证毕.

定理 1　在假设条件(H_1)，(H_2)下，$\lim\limits_{k\to\infty}\inf\|\boldsymbol{\Omega}_k\| = 0$ 成立.

证明：反证法. 假设结论不成立，则存在 $v>0$ 使得 $\|\boldsymbol{\Omega}_k\| \geqslant v$，结合引理 2 得

$$\|\boldsymbol{d}_k\| \geqslant (1-1/\mu_2)\|\boldsymbol{\Omega}_k\| \geqslant (1-1/\mu_2)v.$$

由引理3可知 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k=0$，与引理4矛盾，故原结论成立，证毕.

3 数值仿真

3.1 凸约束非线性方程组问题

为评估NDF算法的数值性能，本文将其与DFPRPMHS(derivative-free Polak-Ribière-Polyak and modified Hestenes-Stiefel)算法[15]和CGD(conjugate gradient descent)算法[16]进行比较. 所选的测试问题来自文献[10-11]，每个测试问题的维数设为[1 000,5 000,10 000,50 000,100 000]，不同维数设置不同的初始点，以确保测试的全面性，即

$$\boldsymbol{a}_1=[0,1]^n,\quad \boldsymbol{a}_2=\left(1-\frac{1}{n},1-\frac{2}{n},\cdots,0\right)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{a}_3=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},\cdots,\frac{1}{3^n}\right)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{a}_4=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n}{n}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{a}_5=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n}\right)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{a}_6=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{a}_7=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^n}\right)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{a}_8=\left(0,\frac{1}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}\right)^{\mathrm{T}}.$$

3种算法的代码均在Ubuntu 20.04.2 LTS 64位系统上运行，所用处理器为Intel(R) Xeon(R) Gold 5115，主频为2.40 GHz. 在执行过程中，NDF算法的参数设为 $l=1.5$，$\delta=10^{-5}$，$\sigma=10^{-4}$，$\rho=0.74$，$\mu_1=0.78$，$\mu_2=2.4$，其余两种算法的参数设置与原文献相同.

为更全面地比较NDF算法、DFPRPMHS算法和CGD算法的性能，采用常用于评估数值方法的标准工具[17]绘制算法性能图，其中横坐标 τ 表示该算法在解决特定问题时的性能与所有算法中最佳性能的比值倒数，纵坐标 $\rho(\tau)$ 表示当该算法的性能比率低于参数 τ 时，所能成功求解的问题数量占总问题数量的比值，性能图中越靠上的曲线表示该算法对应的性能越有优势. 图1～图3分别为3种算法在迭代次数、函数计算次数和运行时间(CPU时间)上的性能比较结果. 由图1～图3可见，NDF算法性能最优. 因此，在处理大规模凸约束非线性方程组问题时，NDF算法显示出了更高的效率和稳定性.

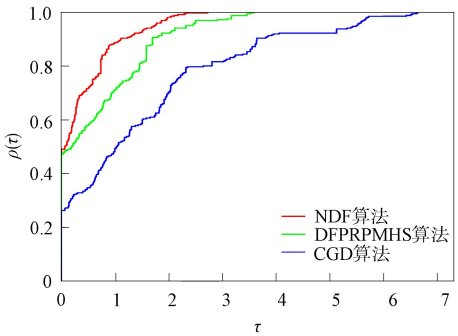


图1 不同算法迭代次数性能比较

Fig. 1 Performance comparison of number of iterations for different algorithms

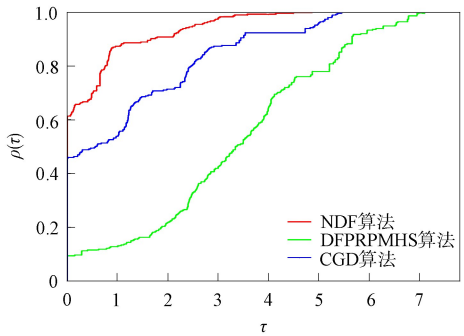


图2 不同算法函数计算次数性能比较

Fig. 2 Performance comparison of number of function calculations for different algorithms

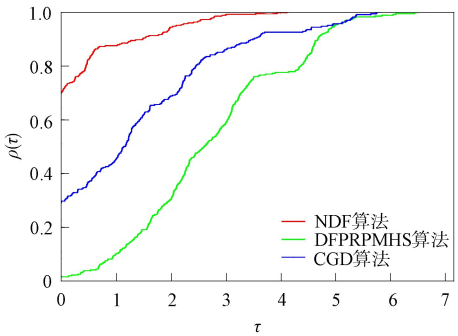


图3 不同算法运行时间性能比较

Fig. 3 Performance comparison of run time for different algorithms

3.2 信号重构问题

实验考虑从 k 个观测信号中重构一个大小为 n 的稀疏信号. 原始信号包含 r 个随机非零元素，观测信号 $\boldsymbol{v}$ 含有随机噪声，即 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{\kappa}$，其中 $\boldsymbol{Q}$ 是随机生成的高斯矩阵，$\hat{\boldsymbol{a}}$ 是原始信号，而 $\boldsymbol{\kappa}$ 是均值为0、方差为 10^{-4} 的正态分布的高斯噪声. 将NDF算法与DFPRPMHS算法和CGD算法进行比较，比较算法的迭代次数、运行时间和均方误差(MSE). MSE用于衡量恢复的受干扰信号相对于原始信号的质量，即 $\mathrm{MSE}=\|\hat{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{a}_*\|^2/n$，其中 $\boldsymbol{a}_*$ 为恢复的信号. 考虑两种问题规模设置，即 $(n,k,r)=$

(4 096,1 024,128)和$(n,k,r)=(8\ 192,2\ 048,256)$. 实验结果分别如图 4～图 7 所示.

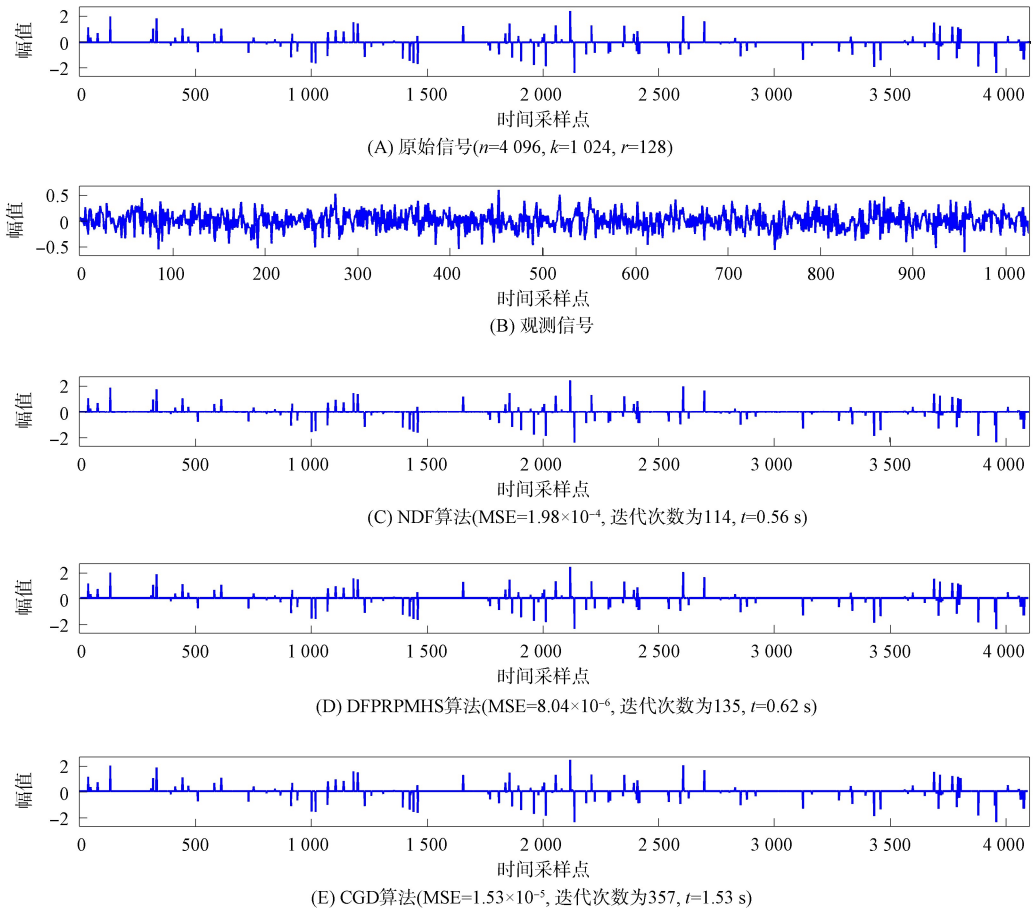


图 4　不同算法对问题规模为(4 096,1 024,128)的信号恢复对比结果

Fig. 4　Comparison results of signal restoration using different algorithms for problem size (4 096,1 024,128)

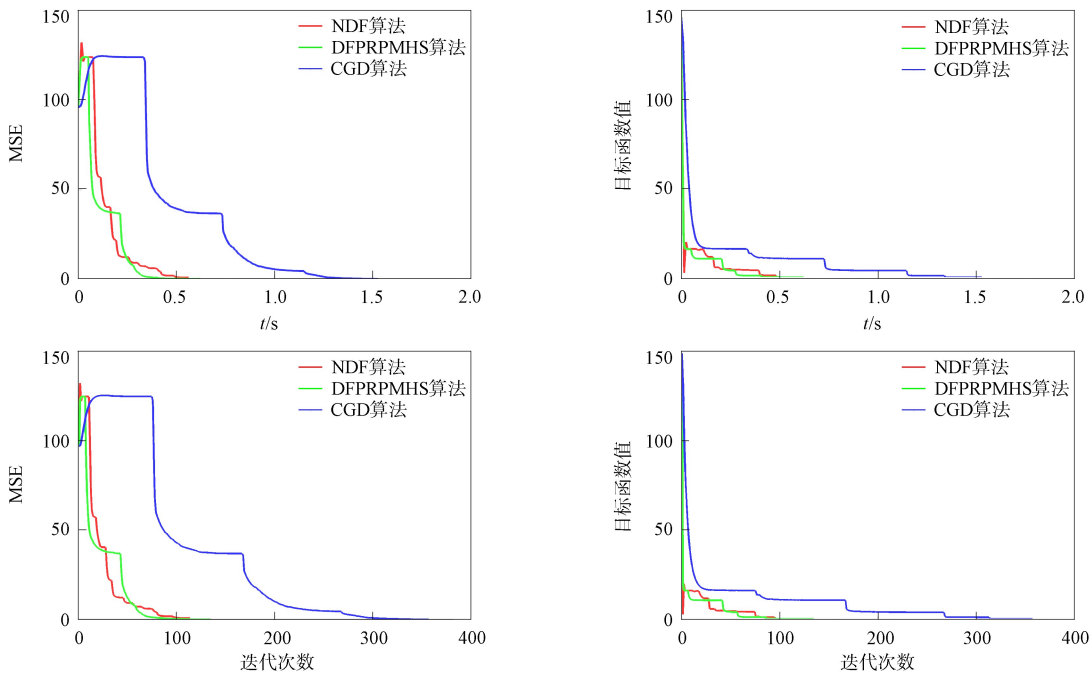


图 5　问题规模为(4 096,1 024,128)时不同指标下各算法的比较结果

Fig. 5　Comparison results of different algorithms under different indicators for problem size (4 096,1 024,128)

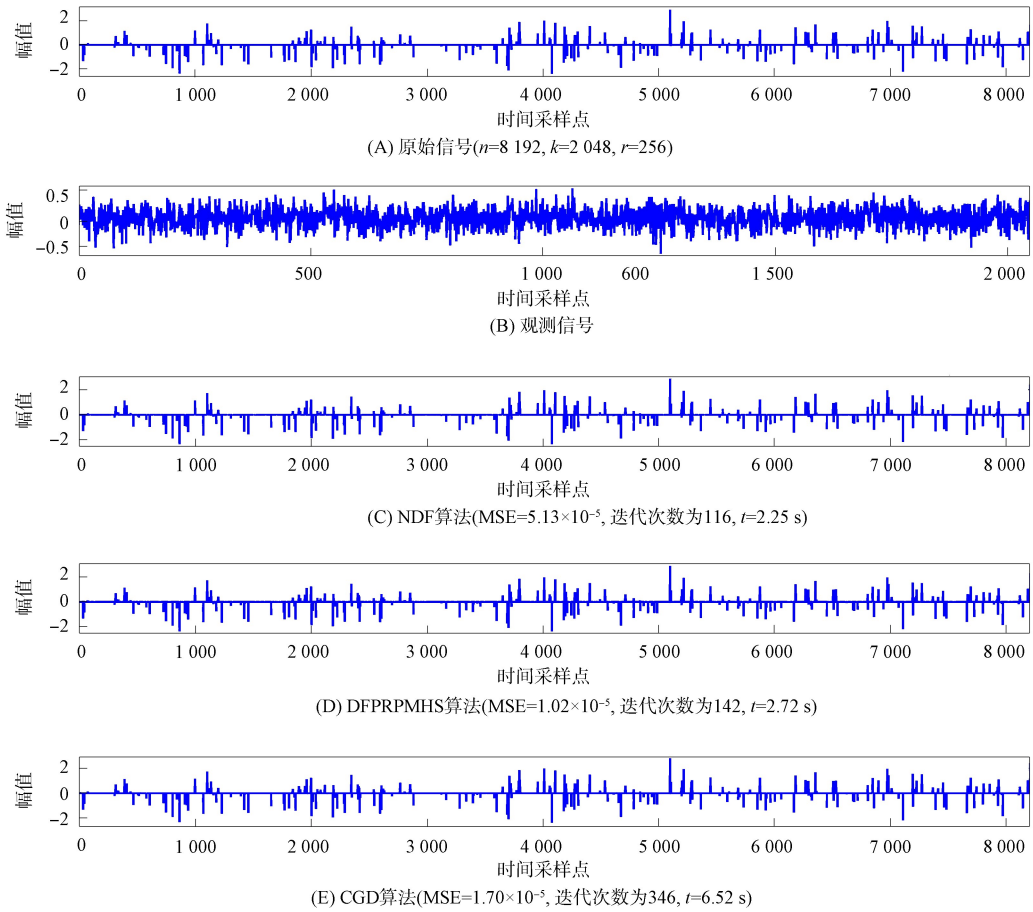


图6 不同算法对问题规模为(8 192,2 048,256)的信号恢复对比结果

Fig. 6 Comparison results of signal restoration using different algorithms for problem size (8 192,2 048,256)

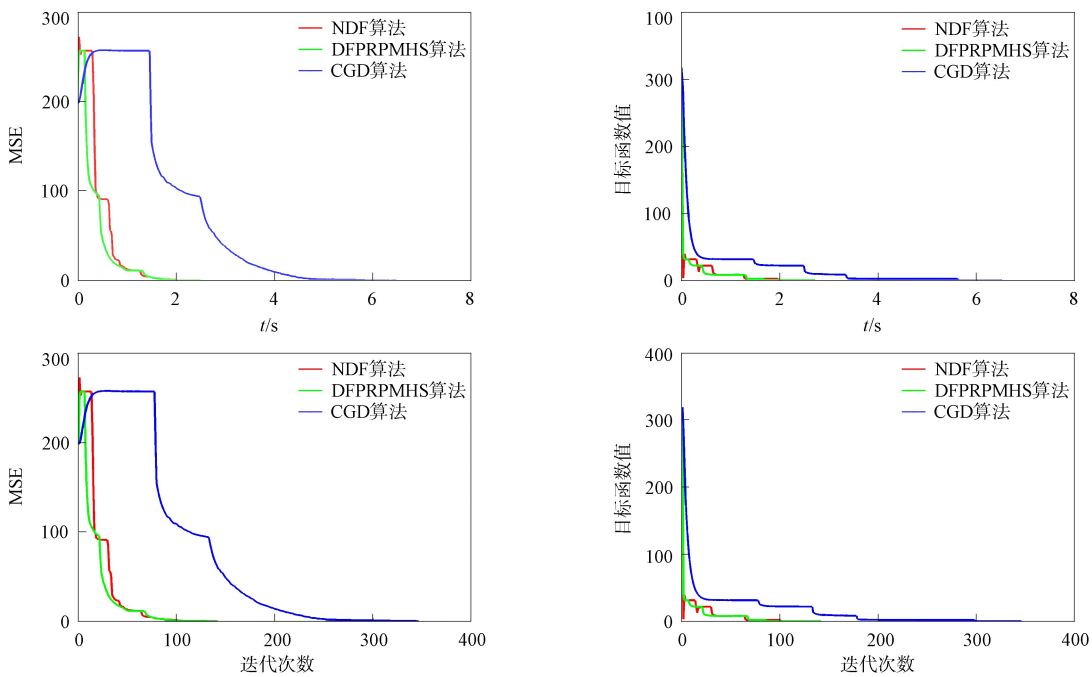


图7 问题规模为(8 192,2 048,256)时不同指标下各算法的比较结果

Fig. 7 Comparison results of different algorithms under different indicators for problem size (8 192,2 048,256)

由图 4 和图 6 可见，3 种算法都能成功重构受噪声干扰的信号，且 NDF 算法以更少的迭代次数和运行时间实现了信号的还原，信号恢复能力更高效. 为更直观地展示这些算法的性能，针对不同的问题规模设置，绘制不同指标下的收敛性结果，如图 5 和图 7 所示.

由 NDF 算法在大规模凸约束非线性方程组问题和信号重构问题上的实验结果可见，新算法具有较好的潜力和竞争力.

参　考　文　献

[1] 李丹丹，李远飞，王松华. 一种修正三项 Hestenes-Stiefel 共轭梯度投影算法及其应用 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2022，60(1)：64-72. (LI D D，LI Y F，WANG S H. A Modified Three Terms Hestenes-Stiefel Conjugate Gradient Projection Algorithm and Its Application [J]. Journal of Jilin University (Science Edition)，2022，60(1)：64-72.)

[2] CHOROWSKI J，ZURADA J M. Learning Understandable Neural Networks with Nonnegative Weight Constraints [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems，2015，26(1)：62-69.

[3] DIRKSE S P，FERRIS M C. MCPLIB：A Collection of Nonlinear Mixed Complementarity Problems [J]. Optimization Methods and Software，1995，5(4)：319-345.

[4] MEINTJES K，MORGAN A P. A Methodology for Solving Chemical Equilibrium Systems [J]. Applied Mathematics and Computation，1987，22(4)：333-361.

[5] LA CRUZ W，MARTÍNEZ J，RAYDAN M. Spectral Residual Method without Gradient Information for Solving Large-Scale Nonlinear Systems of Equations [J]. Mathematics of Computation，2006，75：1429-1448.

[6] YU Z S，LIN J，SUN J，et al. Spectral Gradient Projection Method for Monotone Nonlinear Equations with Convex Constraints [J]. Applied Numerical Mathematics，2009，59(10)：2416-2423.

[7] CHENG W Y，XIAO Y H，HU Q J. A Family of Derivative-Free Conjugate Gradient Methods for Large-Scale Nonlinear Systems of Equations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2009，224(1)：11-19.

[8] LI M. A Derivative-Free PRP Method for Solving Large-Scale Nonlinear Systems of Equations and Its Global Convergence [J]. Optimization Methods and Software，2014，29(3)：503-514.

[9] FANG X W，NI Q. A New Derivative-Free Conjugate Gradient Method for Large-Scale Nonlinear Systems of Equations [J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society，2017，95(3)：500-511.

[10] LI D D，WU J Q，LI Y，et al. A Modified Spectral Gradient Projection-Based Algorithm for Large-Scale Constrained Nonlinear Equations with Applications in Compressive Sensing [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2023，424：115006-1-115006-21.

[11] LI D D，WANG S H，LI Y，et al. A Projection-Based Hybrid PRP-DY Type Conjugate Gradient Algorithm for Constrained Nonlinear Equations with Applications [J]. Applied Numerical Mathematics，2024，195：105-125.

[12] MA G D，JIN J C，JIAN J B，et al. A Modified Inertial Three-Term Conjugate Gradient Projection Method for Constrained Nonlinear Equations with Applications in Compressed Sensing [J]. Numerical Algorithms，2023，92(3)：1621-1653.

[13] WAZIRI M Y，KIRI A I，KIRI A A，et al. A Modified Conjugate Gradient Parameter via Hybridization Approach for Solving Large-Scale Systems of Nonlinear Equations [J]. SeMA Journal，2023，80(3)：479-501.

[14] MEHANDIA A E，CHAIB Y，BECHOUAT T. Two Modified Conjugate Gradient Methods for Solving Unconstrained Optimization and Application [J]. RAIRO Operations Research，2023，57(2)：333-350.

[15] IBRAHIM A H，KUMAM P，KUMAM W. A Family of Derivative-Free Conjugate Gradient Methods for Constrained Nonlinear Equations and Image Restoration [J]. IEEE Access，2020，8：162714-162729.

[16] XIAO Y H，ZHU H. A Conjugate Gradient Method to Solve Convex Constrained Monotone Equations with Applications in Compressive Sensing [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2013，405(1)：310-319.

[17] DOLAN E D，MORÉ J J. Benchmarking Optimization Software with Performance Profiles [J]. Mathematical Programming，2001，91(2)：201-213.

(责任编辑：赵立芹)