

欧氏空间上非线性 Schrödinger 方程 Sobolev 范数的增长

陈 怡, 张晓岭

(河海大学 数学学院, 江苏省高校重点实验室“水系统数学建模与智能计算”, 南京 210098)

摘要: 通过构造修正能量泛函, 研究二维欧氏空间中非线性 Schrödinger 方程(NLS)高阶 Sobolev 范数的时间增长性. 基于三次非线性项结果, 建立了任意高阶非线性项的多项式界 ($\sup_{t \in (0, T)} \|u\|_{H^m} \leq C \max\{1, T\}^{m-1+\epsilon}$), 所得结果完善了 NLS 高阶正则性演化理论.

关键词: 非线性 Schrödinger 方程; Sobolev 范数; 修正能量; Strichartz 估计

中图分类号: O175.29 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2026)03-0498-09

Growth of Sobolev Norms for Nonlinear Schrödinger Equation in Euclidean Space

CHEN Yi, ZHANG Xiaoling

(Laboratory of Mathematical Modeling and Intelligent Computing for Water Systems,
School of Mathematics, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: By constructing a modified energy functional, we investigated the temporal growth of higher-order Sobolev norms for the nonlinear Schrödinger equation (NLS) in two-dimensional Euclidean spaces. Based on results for cubic nonlinearities, we established a polynomial bound applicable to arbitrary higher-order nonlinearities ($\sup_{t \in (0, T)} \|u\|_{H^m} \leq C \max\{1, T\}^{m-1+\epsilon}$). The obtained results improved the theory of higher-order regularity evolution for NLS.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation; Sobolev norm; modified energy; Strichartz estimate

1 引言与主要结果

考虑如下非线性 Schrödinger 方程解的长时间定性性质:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = |u|^{p-1}u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = \varphi \in H^m(\mathbb{R}^d), \end{cases} \quad (1)$$

其中 Δ 是 Laplace 算子, $H^m(\mathbb{R}^d)$ 是在欧氏空间 $\mathbb{R}^d$ 上的 m 阶标准 Sobolev 空间, 其中 $m \in \mathbb{N}$ 且 $m \geq 2$. 本文分析长时间下高阶 Sobolev 范数的增长情况, 即当 $m \geq 2$ 且 $t \gg 1$ 时, $\|u(t, x)\|_{H^m(\mathbb{R}^d)}$ 的增长情况.

关于高阶 Sobolev 范数增长问题的研究近年来备受关注的, 这主要源于其与弱波湍流的联系. 目前

收稿日期: 2025-09-10.

第一作者简介: 陈 怡(2001—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事偏微分方程的研究, E-mail: 241319001005@hhu.edu.cn. 通信作者

简介: 张晓岭(1981—), 女, 满族, 博士, 讲师, 从事偏微分方程的研究, E-mail: xlzhang@hhu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: U2340221)和江苏省自然科学基金(批准号: BK20230026; BK20221497).

主要研究了两个问题: 第一个问题关注与 Hamilton 偏微分方程相关的流上高阶 Sobolev 范数增长的先验界^[1-6]; 第二个问题则涉及高阶 Sobolev 范数无界的全局解的存在性^[7-8]. 本文考虑第一个问题, 即提供高阶 Sobolev 范数增长的先验界, 或者理解所考虑的动力学系统将能量从低频转移到高频的速度问题.

方程(1)的解满足质量守恒和能量守恒:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|^2 dx,$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(|\nabla u(t, x)|^2 + \frac{1}{p+1} |u(t, x)|^{p+1} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(|\nabla \varphi(x)|^2 + \frac{1}{p+1} |\varphi(x)|^{p+1} \right) dx,$$

其中 ∇ 是梯度算子, $|\cdot|$ 表示复数的模长. 这些守恒律表明

$$\sup_{\mathbb{R}} \|u(t, x)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \infty, \tag{2}$$

即 H^1 范数在解的演化过程中始终有界, 因此仅当 $m \geq 2$ 时, H^m 范数的时间增长性才是需要分析的非平凡问题.

本文主要关注如下情形: $(d, p) = (2, 2n+1)$, 其中 $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ (二维欧氏空间与奇次非线性项). 本文把 Strichartz 估计作为一个基本工具^[9], 同时引入合适的修正能量, 聚焦非线性 Schrödinger 方程 (NLS) 高阶 Sobolev 范数增长性研究, 不讨论已明确的整体存在性问题.

对于非线性项高于三次的 NLS, 目前尚未见关于其高阶 Sobolev 范数增长相关结果的报道. 虽然可以通过借鉴 Bourgain 开创的策略处理该问题^[10], 但本文将用一种完全不同的方法处理该问题. 该方法基于引入修正的能量泛函, 结合分部积分和 Strichartz 型色散估计, 能清晰地解耦高阶能量估计, 还可以处理一般的非线性势 $V(|u|^2)$ 而不仅仅是 $|u|^{p-1}$, 其中 V 不一定是纯幂函数.

修正能量方法已在不同情形下被证实有效^[11], 本文将其与色散估计相结合, 给出关于高阶 Sobolev 范数增长的结果, 其核心依赖于高阶能量 ϵ_m 关于时间导数的主项在 H^m 范数意义下的平方, 即 $\|u(t, x)\|_{H^m}^2$. 对于偶数阶 $m = 2k$, 修正能量的一个原型是 $\|\partial_t^k u(t, x)\|_{L^2}^2$ (忽略低阶项), 通过用时间导数 ∂_t 替代空间 Laplace 算子 Δ , 契合时间动力学, 简化非线性项的估计, 并适配 Strichartz 估计对接, 以确保在欧氏微积分框架下是自洽的. 对于空间上的分部积分, 使用在 $\mathbb{R}^d$ 中成立的基本恒等式:

$$\Delta(fh) = h\Delta f + 2\nabla f \cdot \nabla h + f\Delta h,$$

其中: Δ 表示 Laplace 算子; ∇ 表示梯度算子, 即 $\nabla = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d})$. 尽管能量泛函 ϵ_m 沿 NLS 的流并非守恒量, 但通过计算其时间导数并利用 Strichartz 估计, 可以控制由此产生的时空积分.

本文主要结果如下.

定理 1 对任意的 $\epsilon > 0$ 及满足 $m \geq 2$ 的自然数 $m \in \mathbb{N}$, 当 $d = 2$, $p = 2n + 1$ (其中 $n \geq 1$) 时, 若 $u(t, x) \in C_t(H^m(\mathbb{R}^2))$ 是方程(1)的解, 则有

$$\sup_{(0,T)} \|u(t, x)\|_{H^m(\mathbb{R}^2)} \leq C(\max\{1, T\})^{m-1+\epsilon}, \tag{3}$$

其中 $C = C(\epsilon, m, \|\varphi\|_{H^m}) > 0$.

下面用 $X \lesssim Y$ 表示存在一个与变量无关的绝对正常数 C , 使得 $X \leq CY$.

注 1 证明定理 1 的关键点是对所有的 $\tau \in (0, 1)$ 及 $\epsilon > 0$, 有如下估计:

$$\|u(\tau)\|_{H^m(\mathbb{R}^2)}^2 - \|u(0)\|_{H^m(\mathbb{R}^2)}^2 \lesssim \sqrt{\tau} \left(\|u\|_{L^\infty((0,\tau); H^m(\mathbb{R}^2))}^{(2m-3)/(m-1)+\epsilon} + \|u\|_{L^\infty((0,\tau); H^m(\mathbb{R}^2))}^{(2m-4)/(m-1)+\epsilon} \right). \tag{4}$$

一旦确立了注 1 中的界(式(4)), 即可通过一个经典的论证 (该论证要求 Cauchy 问题在能量空间 H^1 中是局部适定的) 导出多项式增长. 注意到式(3)右侧的指数 $m-1+\epsilon$ 可表述为 $\frac{1}{2\gamma}$, 这里 ϵ 为用于吸收推导中低阶误差任意小的扰动项, 其中 $2-2\gamma = \frac{2m-3}{m-1} + \epsilon$ 是式(4)右侧第一项的指数, 二者满足关系: 由 $2-2\gamma = \frac{2m-3}{m-1} + \epsilon$ 化简得 $\frac{1}{2\gamma} \approx m-1$, 保留扰动项后即等价于 $m-1+\epsilon$. 先选取 $\tau = \tau(\|u(0)\|_{H^1})$ 作为 H^1 局部 Cauchy 理论所给出的存在时间, 然后由式(4)可得

$$\|u(t+\tau)\|_{H^m(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \|u(t)\|_{H^m(\mathbb{R}^2)}^2 + C(\|u\|_{L^\infty((t,t+\tau);H^m(\mathbb{R}^2))}^{2-2\gamma} + 1).$$

作为 H^1 中局部存在性理论以及能量守恒的一个副产品, 可得

$$\|u(t+\tau)\|_{H^m(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \|u(t)\|_{H^m(\mathbb{R}^2)}^2 + C(\|u(t)\|_{H^m(\mathbb{R}^2)}^{2-2\gamma} + 1).$$

因此, 序列 $\alpha_n = 1 + \|u(n\tau)\|_{H^m(\mathbb{R}^2)}^2$ 满足 $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n + C\alpha_n^{1-\gamma}$, 即 $\alpha_n \lesssim n^{1/\gamma}$, 可通过对 n 进行数学归纳法推出式(3).

2 理论与方法

2.1 线性 Strichartz 估计

本文直接使用下列 Strichartz 估计:

$$\|e^{i\Delta}\varphi\|_{L^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

利用 Duhamel 公式, 可得如下结果.

引理 1 设 $v(t,x)$ 是如下 Schrödinger 方程的解:

$$\begin{cases} i\partial_t v + \Delta v = F, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = \varphi \in L^2(\mathbb{R}^2). \end{cases}$$

则对 $T \in (0,1)$, 有

$$\|v\|_{L^4((0,T)\times\mathbb{R}^2)} \lesssim \|\varphi\|_{L_x^2(\mathbb{R}^2)} + T\|F\|_{L_t^\infty L_x^2((0,T)\times\mathbb{R}^2)},$$

其中: $L_x^2(\mathbb{R}^2)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的 L^2 函数空间, 范数为

$$\|\varphi\|_{L_x^2(\mathbb{R}^2)} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2};$$

$L_t^\infty L_x^2((0,T)\times\mathbb{R}^2)$ 为混合时空函数空间, 范数为

$$\|F\|_{L_t^\infty L_x^2((0,T)\times\mathbb{R}^2)} = \sup_{t \in (0,T)} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |F(t,x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

2.2 与偶 Sobolev 范数相关的修正能量

下面考虑一般的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = |u|^{p-1}u, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = \varphi \in H^{2k}(\mathbb{R}^2), \end{cases}$$

并使用下列估计:

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R};H^1(\mathbb{R}^d))} \lesssim_{p,\|\varphi\|_{H^1}} 1.$$

对于 Cauchy 问题(7)的每个解 $u(t,x)$, 引入如下能量泛函, 该泛函将用于分析 Sobolev 范数 H^{2k} 的增长:

$$\epsilon_{2k}(u) = \|\partial_t^k u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \frac{p-1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t^{k-1} \nabla(|u|^2)|^2 |u|^{p-3} dx - \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t^{k-1}(|u|^{p-1}u)|^2 dx.$$

引理 2 设 $u(t,x)$ 是方程(7)的解, 且初值 $\varphi \in H^{2k}(\mathbb{R}^2)$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \epsilon_{2k}(u(t,x)) = & -\frac{p-1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t^{k-1} \nabla(|u|^2)|^2 \partial_t(|u|^{p-3}) dx + 2 \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t^k(|u|^{p-1}) \partial_t^{k-1}(|\nabla u|^2) dx + \\ & \sum_{j=0}^{k-1} c_j \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t^j \nabla(|u|^2) \partial_t^{k-1} \nabla(|u|^2) \partial_t^{k-j}(|u|^{p-3}) dx + \\ & \operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^{k-1} c_j \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t^j(|u|^{p-1}) \partial_t^{k-j} u \partial_t^{k-1}(|u|^{p-1} \bar{u}) dx \right) + \\ & \operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^{k-2} c_j \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t^k(|u|^{p-1}) \partial_t^j(\Delta \bar{u}) \partial_t^{k-1-j} u dx \right) + \\ & \operatorname{Im} \left(\sum_{j=1}^{k-1} c_j \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t^j(|u|^{p-1}) \partial_t^{k-j} u \partial_t^k \bar{u} dx \right), \end{aligned}$$

其中: $p=2n+1 \geq 3$; c_j 表示常数, 且可能逐行变化.

证明: 计算

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \| \partial_t^k u \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= 2\operatorname{Re}(\partial_t^{k+1} u, \partial_t^k u) = 2\operatorname{Re}(\partial_t^k(-\Delta u + |u|^{p-1}u), i\partial_t^k u) = \\ &2\operatorname{Im}\left(\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_t^k \nabla u, \partial_t^k \nabla u) dx\right) + 2\operatorname{Re}(\partial_t^k(|u|^{p-1}u), i\partial_t^k u), \end{aligned} \quad (10)$$

其中 (f, g) 表示标准的 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 内积 $\int_{\mathbb{R}^2} (f \cdot \bar{g}) dx$. 由于式(10)右端第一项恒为零, 因此得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \| \partial_t^k u \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= 2\operatorname{Re}(\partial_t^k(|u|^{p-1}u), -\Delta(\partial_t^{k-1}u)) + \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t^k |\partial_t^{k-1}(|u|^{p-1}u)|^2 dx + \\ &\operatorname{Re}\left(\sum_{j=0}^{k-1} c_j (\partial_t^j(|u|^{p-1}) \partial_t^{k-j} u, \partial_t^{k-1}(|u|^{p-1}u))\right) + \\ &\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{k-1} c_j (\partial_t^j(|u|^{p-1}) \partial_t^{k-j} u, i\partial_t^k u)\right). \end{aligned} \quad (11)$$

下面考虑式(11)的第一项:

$$2\operatorname{Re}(\partial_t^k(|u|^{p-1}u), -\Delta(\partial_t^{k-1}u)) = \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t^k(|u|^{p-1})(-\bar{u}\partial_t^{k-1}(\Delta u) - u\partial_t^{k-1}(\Delta \bar{u})) dx.$$

注意到

$$\begin{aligned} -\bar{u}\Delta(\partial_t^{k-1}u) - u\Delta(\partial_t^{k-1}\bar{u}) &= \partial_t^{k-1}(-\bar{u}\Delta u - u\Delta \bar{u}) + \operatorname{Re}\left(\sum_{j=0}^{k-2} c_j \partial_t^j(\Delta u) \partial_t^{k-1-j}\bar{u}\right), \\ \Delta(|u|^2) &= u\Delta \bar{u} + \bar{u}\Delta u + 2|\nabla u|^2, \end{aligned}$$

结合初等计算, 并利用 Leibniz 法则展开 ∂_t^k , 可得

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(\partial_t^k(|u|^{p-1}u), -\Delta\partial_t^{k-1}u) &= \frac{p-1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t^k |\partial_t^{k-1} \nabla(|u|^2)|^2 |u|^{p-3} dx + \\ &\sum_{j=0}^{k-1} c_j \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_t^j \nabla(|u|^2), \partial_t^{k-1} \nabla(|u|^2)) \partial_t^{k-j}(|u|^{p-3}) dx + \\ &2 \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t^k(|u|^{p-1}) \partial_t^{k-1}(|\nabla u|^2) dx + \\ &\operatorname{Re}\left(\sum_{j=0}^{k-2} c_j \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t^k(|u|^{p-1}) \partial_t^j(\Delta u) \partial_t^{k-1-j}\bar{u} dx\right), \end{aligned} \quad (12)$$

将恒等式(12)与(11)结合即得结论. 证毕.

范数 $\|\partial_t^k u\|_{L^2}$ 与 $\|u\|_{H^{2k}}$ 是相互控制的, 本文的核心目的是证明对满足 $d=2$ 且 $p \geq 3$ 的方程(7)的解 $u(t, x)$, 使得修正后的能量 $\varepsilon_{2k}(u)$ 主项等价于 Sobolev 范数 $\|u\|_{H^{2k}}$.

引理 3 设 $u(t, x)$ 是方程(7)的解, 其中 $p \geq 3$ 是一个整数, 则对任意的 $k, s \in \mathbb{N}$, 有

$$\|\partial_t^k u - i^k \Delta^k u\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|\varphi\|_{H^1} \|u\|_{H^{s+2k-1}(\mathbb{R}^2)}. \quad (13)$$

证明: 使用以下恒等式:

$$\partial_t^h u = i^h \Delta^h u + \sum_{j=0}^{h-1} c_j \partial_t^j \Delta^{h-j-1}(u|u|^{p-1}), \quad (14)$$

其中 $c_j \in \mathbb{C}$ 为复系数. 证明可通过关于 h 的数学归纳法并利用 $u(t, x)$ 所满足的方程直接完成.

对 k 进行数学归纳, 故需证明 $k \Rightarrow k+1$. 基于式(14), 目标为证明下式成立:

$$\|\partial_t^j(u|u|^{p-1})\|_{H^{2k-2j+s}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|u\|_{H^{s+2k+1}(\mathbb{R}^2)}, \quad j=0, 1, \dots, k, \quad (15)$$

这里假设性质(13)对 k 成立. 通过展开左端的时空导数, 由下列不等式链推导出式(15):

$$\prod_{\substack{j_1+\dots+j_p=j \\ s_1+\dots+s_p=2k-2j+s}} \|\partial_t^{j_i} u\|_{W^{s_i, 2p}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \prod_{\substack{j_1+\dots+j_p=j \\ s_1+\dots+s_p=2k-2j+s}} \|\partial_t^{j_i} u\|_{H^{s_i+1}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \prod_{\substack{j_1+\dots+j_p=j \\ s_1+\dots+s_p=2k-2j+s}} \|u\|_{H^{2j_i+s_i+1}(\mathbb{R}^2)},$$

其中第一步应用了 Sobolev 嵌入定理 $H^1(\mathbb{R}^2) \subset L^{2p}(\mathbb{R}^2)$, 最后一步使用了归纳假设. 通过简单插值论证继续估计:

$$\prod_{\substack{j_1+\dots+j_p=j \\ s_1+\dots+s_p=2k-2j+s}} \|u\|_{H^{2j_i+s_i+1}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \left(\prod_{l=1, 2, \dots, p} \|u\|_{H^{s_l+2k+1}(\mathbb{R}^2)}^{\theta_l} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^{(1-\theta_l)} \right),$$

其中

$$\theta_l(s+2k+1) + (1-\theta_l) = 2j_l + s_l + 1.$$

由式(13)及指标条件 $\sum_{l=1}^p \theta_l = 1 (j=0, 1, \dots, k)$ 即得结论. 证毕.

2.3 非线性解的 Strichartz 估计

下面建立二维一般非线性情形下方程(7)解的 Strichartz 范数先验界. 记 $L_t^p X$ 为空间 $L^p((0, \tau); X)$, 其中 X 为 Banach 空间, $p \in [1, \infty]$.

引理 4 对任意满足 $p=2n+1 \geq 3$ 的方程(7)的解 $u(t, x)$ 及任意的 $\epsilon > 0$ 和 $\tau \in (0, 1)$, 有下列估计:

$$\|\partial_t^j u\|_{L_t^4 W^{s,4}(\mathbb{R}^2)} \lesssim_{\epsilon, \|\varphi\|_{H^1}} \|u\|_{L_t^\infty H^{2j+s}(\mathbb{R}^2)} \|u\|_{L_t^\infty H^{2j+2}(\mathbb{R}^2)}^\epsilon. \quad (16)$$

证明: 结合式(6)及解 $\partial_t^j u$ 所满足的方程, 可得

$$\begin{aligned} \|\partial_t^j u\|_{L_t^4 W^{s,4}(\mathbb{R}^2)} &\lesssim \|\partial_t^j u(0)\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} + \tau \|\partial_t^j(u|u|^{p-1})\|_{L_t^\infty H^s(\mathbb{R}^2)} \lesssim \\ &\|\partial_t^j u(0)\|_{H^s} + T \|\partial_t^j(u|u|^{p-1})\|_{L_t^\infty H^s(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned} \quad (17)$$

注意式(17)右端第一项可由引理 3 控制, 因此对任意的 $\epsilon > 0$, 只要满足以下条件即可完成证明:

$$\|\partial_t^j(u|u|^{p-1})\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \lesssim_{\epsilon, \|\varphi\|_{H^1}} \|u\|_{H^{2j+s}(\mathbb{R}^2)} \|u\|_{H^{2j+2}(\mathbb{R}^2)}^\epsilon, \quad j, s = 1, 2, \dots.$$

展开时间导数项 ∂_t^j , 并利用

$$\|fg\|_{H^r(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|f\|_{H^r(\mathbb{R}^2)} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \|g\|_{H^r(\mathbb{R}^2)} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)},$$

则问题即转化为估计下列项:

$$\|\partial_t^{j_1} u\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \times \|\partial_t^{j_2} u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \times \dots \times \|\partial_t^{j_p} u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)},$$

其中 $j_1 + \dots + j_p = j$. 由

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \lesssim_\epsilon \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^{1-\epsilon} \|v\|_{H^2(\mathbb{R}^2)}^\epsilon, \quad (18)$$

得

$$\begin{aligned} \|\partial_t^{j_1} u\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \times \|\partial_t^{j_2} u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \times \dots \times \|\partial_t^{j_p} u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &\lesssim_\epsilon \|\partial_t^{j_1} u\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \times \|\partial_t^{j_2} u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^{1-\epsilon} \times \\ &\|\partial_t^{j_2} u\|_{H^2}^\epsilon \times \dots \times \|\partial_t^{j_p} u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^{1-\epsilon} \times \|\partial_t^{j_p} u\|_{H^2}^\epsilon, \end{aligned}$$

故由式(13)可得

$$\begin{aligned} \|\partial_t^{j_1} u\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \times \|\partial_t^{j_2} u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \times \dots \times \|\partial_t^{j_p} u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &\lesssim \|u\|_{H^{2j_1+s}(\mathbb{R}^2)} \times \|u\|_{H^{2j_2+1}(\mathbb{R}^2)}^{1-\epsilon} \times \\ &\|u\|_{H^{2j_2+2}(\mathbb{R}^2)}^\epsilon \times \dots \times \|u\|_{H^{2j_p+1}(\mathbb{R}^2)}^{1-\epsilon} \times \|u\|_{H^{2j_p+2}(\mathbb{R}^2)}^\epsilon \lesssim \\ &\|u\|_{H^{2j+s}(\mathbb{R}^2)}^{\theta_1} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^{1-\theta_1} \times \|u\|_{H^{2j+s}(\mathbb{R}^2)}^{\theta_2(1-\epsilon)} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^{(1-\theta_2)(1-\epsilon)} \times \dots \times \\ &\|u\|_{H^{2j+s}(\mathbb{R}^2)}^{\theta_p(1-\epsilon)} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^{(1-\theta_p)(1-\epsilon)} \times \|u\|_{H^{2j+2}(\mathbb{R}^2)}^{\epsilon(p-1)}, \end{aligned}$$

其中最后一步使用了插值论证, 满足

$$\theta_1(2j+s) + (1-\theta_1) = 2j_1 + s, \quad \theta_l(2j+s) + (1-\theta_l) = 2j_l + 1, \quad l=2, 3, \dots, p.$$

注意此时满足 $\sum_{l=1}^p \theta_l = 1$, 故由式(8)即得结论. 证毕.

3 主要结果的证明

3.1 二维纯幂次非线性 Schrödinger 方程 H^{2k} 范数多项式增长

下面证明在 $m=2k$ 情形下的定理 1 成立.

引理 5 设 $u(t, x)$ 是满足 $p=2n+1 \geq 3$ 的方程(7)的解, 则对任意的 $\tau \in (0, 1)$ 有以下估计:

$$\int_0^\tau \left| \frac{d}{dt} \epsilon_{2k}(u) \right| dt \lesssim \sqrt{\tau} \|u\|_{L_t^\infty H^{2k}(\mathbb{R}^2)}^{(4k-3)/(2k-1)+\epsilon} + \|u\|_{L_t^\infty H^{2k}(\mathbb{R}^2)}^{(4k-4)/(2k-1)+\epsilon}.$$

证明: 首先, 用 $L^q, W^{s,q}, H^s$ 分别表示空间 $L^q(\mathbb{R}^2), W^{s,q}(\mathbb{R}^2), H^s(\mathbb{R}^2)$, 用 $\epsilon > 0$ 表示任意小常数, 其在不同之处可取不同值. 其次, 使用下列不等式:

$$\|u\|_{L_t^\infty H^s} \lesssim \|\varphi\|_{H^1} \|u\|_{L_t^\infty H^{2k}}^{(s-1)/(2k-1)}, \quad s \in [1, 2k], \quad (19)$$

其中 $L_\tau^\infty H_x^s$ 为时间 L^∞ -空间的 s 阶 Sobolev 混合空间, 其范数定义为

$$\|u\|_{L_\tau^\infty H_x^s} = \sup_\tau \|u(t, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)},$$

特别地, 当 $s=2k$ 时, 记该空间为 $L_\tau^\infty H_x^{2k}$, 其范数为

$$\|u\|_{L_\tau^\infty H_x^{2k}} = \sup_\tau \|u(t, \cdot)\|_{H^{2k}(\mathbb{R}^d)}.$$

此外, 用 $X \lesssim_s Y$ 表示存在一个与变量无关的绝对正常数 C , 使得 $X \leq C_s Y$, 其中 C_s 表示依赖于参数 s 的正常数. 该估计本身可通过结合基本插值不等式与式(8)推得.

记 I, II, III, IV, V, VI 分别为式(9)右端的各连续项, 则估计项 I 的问题可转化为控制下列项:

$$\int_0^T \|\partial_t^{k_1} u\|_{W^{1,4}}^2 \|\partial_t^{k_2} u\|_{L^\infty}^2 \|\partial_t u\|_{L^2} \|u\|_{L^\infty}^{p-4} ds, \quad k_1 + k_2 = k - 1, \quad (20)$$

结合式(18)、引理 3、引理 4 及 Hölder 不等式, 可得

$$\text{式(20)} \lesssim \sqrt{T} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2k+1}}^{2(1-\epsilon)} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2k+2}}^{2\epsilon} \|u\|_{L_\tau^\infty H^2} \|\partial_t^{k_1} u\|_{L_\tau^4 W^{1,4}}^2,$$

再利用式(19), 可得

$$\text{式(20)} \lesssim \sqrt{T} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2k+1}}^{2(1-\epsilon)} \|u\|_{L^\infty H^2} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2k+1}}^2 \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2k}}^\epsilon \lesssim \sqrt{\tau} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2k}}^{(4k-3)/(2k-1)+\epsilon}.$$

注意此处 $\epsilon > 0$ 的取值在不同之处可变化, 但始终选取为任意小.

对于项 II, 问题即转化为控制下列项:

$$\int_0^T \|\partial_t^{j_1} u\|_{L^2} \left(\prod_{h=2,3,\dots,p-1} \|\partial_t^{j_h} u\|_{L^\infty} \right) \|\partial_t^{k_1} u\|_{W^{1,4}} \|\partial_t^{k_2} u\|_{W^{1,4}} ds, \quad (21)$$

其中假设 $j_1 = \max\{j_1, j_2, \dots, j_{p-1}\}$, 并且 $j_1 + \dots + j_{p-1} = k$, $k_1 + k_2 = k - 1$. 结合插值估计(16)、引理 2、引理 3 及 Hölder 不等式, 可得

$$\text{式(21)} \lesssim \sqrt{T} \|u\|_{L_T^\infty H^{2k}}^\epsilon \|u\|_{L_T^\infty H^{2j_1}} \left(\prod_{h=2,3,\dots,p-1} \|u\|_{L_T^\infty H^{2j_h+1}}^{1-\epsilon} \right) \|u\|_{L_T^\infty H^{2k_1+1}} \|u\|_{L_T^\infty H^{2k_2+1}} \|u\|_{L_T^\infty H^{2k_2+2}}.$$

最后, 利用式(19)可得

$$\text{式(21)} \lesssim \sqrt{\tau} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2k}}^{(4k-3)/(2k-1)+\epsilon}.$$

对于项 III, 只需控制下列项即可:

$$\int_0^\tau \|\partial_t^{h_1} u\|_{L^\infty} \|\partial_t^{h_2} u\|_{W^{1,4}} \|\partial_t^{m_1} u\|_{L^2} \left(\prod_{i=2,3,\dots,p-3} \|\partial_t^{m_i} u\|_{L^\infty} \right) \|\partial_t^{l_1} u\|_{L^\infty} \|\partial_t^{l_2} u\|_{W^{1,4}} ds, \quad (22)$$

其中假设 $m_1 = \max\{m_1, m_2, \dots, m_{p-3}\}$, 并且

$$h_1 + h_2 = j \in [0, k-1], \quad m_1 + \dots + m_{p-3} = k - j, \quad l_1 + l_2 = k - 1.$$

仿照前述方法, 有

$$\begin{aligned} \text{式(22)} &\lesssim \sqrt{\tau} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2k}}^\epsilon \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2h_1+1}} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2h_2+1}} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2m_1}} \left(\prod_{i=2,3,\dots,p-3} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2m_i+1}}^{1-\epsilon} \right) \times \\ &\quad \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2l_1+1}} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2l_2+1}} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2l_2+2}} \lesssim \sqrt{\tau} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2k}}^{(4k-3)/(2k-1)+\epsilon}. \end{aligned}$$

对于项 IV, 问题即转化为控制下列项:

$$\int_0^T \|\partial_t^{j_1} u\|_{L^2} \left(\prod_{h=2,3,\dots,p-1} \|\partial_t^{j_h} u\|_{L^\infty} \right) \|\partial_t^j (\Delta u)\|_{L^4} \|\partial_t^{k-1-j} \bar{u}\|_{L^4} ds, \quad (23)$$

其中假设 $j_1 = \max\{j_1, j_2, \dots, j_{p-1}\}$, 并且 $j_1 + \dots + j_{p-1} = k$. 参照前述论证方法, 类似可得

$$\begin{aligned} \text{式(23)} &\lesssim \sqrt{\tau} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2k}}^\epsilon \|u\|_{L_T^\infty H^{2j_1}} \left(\prod_{h=2,3,\dots,p-1} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2j_h+1}}^{1-\epsilon} \right) \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2j+2}} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2k-2-2j}} \lesssim \\ &\quad \sqrt{\tau} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2k}}^{(4k-3)/(2k-1)+\epsilon}. \end{aligned}$$

对于项 V, 只需控制下列项即可:

$$\int_0^T \|\partial_t^{m_1} u\|_{L^4} \left(\prod_{i=2,3,\dots,p-1} \|\partial_t^{m_i} u\|_{L^\infty} \right) \|\partial_t^{k-j} u\|_{L^4} \|\partial_t^k u\|_{L^2} ds, \quad (24)$$

其中假设 $m_1 = \max\{m_1, m_2, \dots, m_{p-1}\}$, 并且 $m_1 + \dots + m_{p-1} = j$. 则

$$\text{式(24)} \lesssim \sqrt{\tau} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2k}}^{1+\epsilon} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2m_1}} \left(\prod_{i=2,3,\dots,p-1} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2m_i+1}}^{1-\epsilon} \right) \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2k-2j}} \lesssim \sqrt{\tau} \|u\|_{L_\tau^\infty H^{2k}}^{(4k-3)/(2k-1)+\epsilon}.$$

对于项Ⅵ,该问题可进一步转化为控制下列项:

$$\int_0^T \|\partial_t^{m_1} \boldsymbol{u}\|_{L^2} \Big(\prod_{i=2,3,\cdots,p-1} \|\partial_t^{m_i} \boldsymbol{u}\|_{L^\infty} \Big) \|\partial_t^{k-j} \boldsymbol{u}\|_{L^\infty} \|\partial_t^{l_1} \boldsymbol{u}\|_{L^2} \Big(\prod_{i=2,3,\cdots,p} \|\partial_t^{l_i} \boldsymbol{u}\|_{L^\infty} \Big) \mathrm{d}s, \quad (25)$$

其中假设 $m_1=\max\{m_1,m_2,\cdots,m_{p-1}\}$, 并且 $m_1+\cdots+m_{p-1}=j$, $l_1+\cdots+l_p=k-1$. 则可得

$$\begin{aligned} \text{式(25)} &\lesssim \tau \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty_\tau H^{2k}}^\epsilon \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty_\tau H^{2m_1}} \Big(\prod_{i=2,3,\cdots,p-1} \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty_\tau H^{2m_i+1}}^{1-\epsilon} \Big) \times \\ &\quad \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty_\tau H^{2k-2j+1}}^{1-\epsilon} \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty_\tau H^{2l_1}} \Big(\prod_{i=2,3,\cdots,p-1} \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty_\tau H^{2l_i+1}}^{1-\epsilon} \Big) \lesssim \tau \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty_\tau H^{2k}}^{(4k-4)/(2k-1)+\epsilon}. \end{aligned}$$

证毕.

引理 6 设 $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$ 是满足 $p\geqslant 3$ 的方程(7)的解, 则对任意的 $\tau\in(0,1)$ 以及 $\epsilon>0$, 有如下估计:

$$\|\boldsymbol{u}(\tau)\|_{H^{2k}}^2 - \|\boldsymbol{u}(0)\|_{H^{2k}}^2 \lesssim \sqrt{\tau} \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty_\tau H^{2k}}^{(4k-3)/(2k-1)+\epsilon} + \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty_\tau H^{2k}}^{(4k-4)/(2k-1)+\epsilon}.$$

证明: 将能量泛函写为

$$\epsilon_{2k}(\boldsymbol{u}) = \|\partial_t^k \boldsymbol{u}\|_{L^2}^2 + R_{2k}(\boldsymbol{u}),$$

其中

$$R_{2k}(\boldsymbol{u}) = -\frac{p-1}{4} \int |\partial_t^{k-1} \nabla (|\boldsymbol{u}|^2)|^2 |\boldsymbol{u}|^{p-3} \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int |\partial_t^{k-1} (|\boldsymbol{u}|^{p-1} \boldsymbol{u})|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

可断言

$$|R_{2k}(\boldsymbol{u})| \lesssim_\epsilon \|\boldsymbol{u}\|_{H^{2k}}^{(4k-4)/(2k-1)+\epsilon} + \|\boldsymbol{u}\|_{H^{2k}}^{(4k-6)/(2k-1)+\epsilon}. \quad (26)$$

事实上, 仿照引理 5 的证明方法可得

$$\int |\partial_t^{k-1} \nabla (|\boldsymbol{u}|^2)|^2 |\boldsymbol{u}|^{p-3} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \lesssim \sum_{k_1+k_2=k-1} \|\boldsymbol{u}\|_{H^{2k_1+1}}^2 \|\boldsymbol{u}\|_{H^{2k_2+1}}^2 \|\boldsymbol{u}\|_{H^{2k}}^\epsilon \lesssim \|\boldsymbol{u}\|_{H^{2k}}^{(4k-4)/(2k-1)+\epsilon},$$

并且

$$\begin{aligned} \int |\partial_t^{k-1} (|\boldsymbol{u}|^{p-1} \boldsymbol{u})|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} &\lesssim \sum_{j_1+\cdots+j_p=k-1} \|\boldsymbol{u}\|_{H^{2j_1}}^2 \Big(\prod_{h=1,2,\cdots,p} \|\boldsymbol{u}\|_{H^{2j_h+1}(\mathbb{R}^2)}^2 \Big) \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty H^{2k}}^\epsilon \lesssim \\ &\quad \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty H^{2k}}^{(4k-6)/(2k-1)+\epsilon}. \end{aligned}$$

若对恒等式(9)进行积分并利用引理 4, 则有

$$\|\partial_t^k \boldsymbol{u}(\tau)\|_{L^2}^2 - \|\partial_t^k \boldsymbol{u}(0)\|_{L^2}^2 \lesssim \sup_{(0,\tau)} |R_{2k}(\boldsymbol{u})| + \sqrt{\tau} \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty_\tau H^{2k}}^{(4k-3)/(2k-1)+\epsilon} + \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty_\tau H^{2k}}^{(4k-4)/(2k-1)+\epsilon}.$$

再结合式(26)与引理 3 即得结论. 证毕.

3.2 奇 Sobolev 范数 H^{2k+1} 的增长性

若假设初值 $\boldsymbol{\varphi}\in H^{2k+2}$, 则定理 1 中的估计 $\sup_{(0,T)} \|\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\|_{H^{2k+1}(\mathbb{R}^2)} \leqslant C(\max\{1,T\})^{2k+\epsilon}$ 可通过下列已证界之间的插值获得(这些界通过参考偶阶 Sobolev 范数的增长性得到):

$$\begin{aligned} \sup_{(0,T)} \|\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\|_{H^{2k+2}(\mathbb{R}^2)} &\leqslant C(\max\{1,T\})^{2k+1+\epsilon}, \\ \sup_{(0,T)} \|\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\|_{H^{2k}(\mathbb{R}^2)} &\leqslant C(\max\{1,T\})^{2k-1+\epsilon}. \end{aligned}$$

但下面的核心内容为: 假设初值 $\boldsymbol{\varphi}$ 仅属于 H^{2k+1} , 因此上述论证无法直接应用. 对于已在 $m=2k$ 情形下证明的定理 1, 其证明方法可通过下列修正能量法调整至 $m=2k+1$ 的情形:

$$\begin{aligned} \epsilon_{2k+1}(\boldsymbol{u}) &= \frac{1}{2} \|\partial_t^k \nabla \boldsymbol{u}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \int |\boldsymbol{u}|^{p-1} |\partial_t^k \boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{p-1}{8} \int |\boldsymbol{u}|^{p-3} |\partial_t^k (|\boldsymbol{u}|^2)|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \\ &\quad \operatorname{Re} \Big(\sum_{j=1}^{k-1} c_j \int \partial_t^j \boldsymbol{u} \partial_t^{k-j} (|\boldsymbol{u}|^{p-1}) \partial_t^k \overline{\boldsymbol{u}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \Big) - \sum_{j=1}^{k-1} c_j \int \partial_t^{k-j} (|\boldsymbol{u}|^{p-3}) \partial_t^j (|\boldsymbol{u}|^2) \partial_t^k (|\boldsymbol{u}|^2) \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \quad (27) \end{aligned}$$

实际上, 由以下引理可完全类似于 $m=2k$ 情形的证明过程, 完成定理 1 在 $m=2k+1$ 时成立的证明.

引理 7 设 $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$ 是方程(1)的解, 其初值 $\boldsymbol{\varphi}\in H^{2k+1}$, 则下列恒等式成立:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \epsilon_{2k+1}(\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})) = \frac{1}{2} \int \partial_t (|\boldsymbol{u}|^{p-1}) |\partial_t^k \boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \operatorname{Re} \Big(\sum_{j=1}^{k-1} c_j \int \partial_t^{j+1} \boldsymbol{u} \partial_t^{k-j} (|\boldsymbol{u}|^{p-1}) \partial_t^k \overline{\boldsymbol{u}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \Big) -$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{k-1} c_j \int \partial_t^j \mathbf{u} \partial_t^{k-j+1}(|\mathbf{u}|^{p-1}) \partial_t^k \overline{\mathbf{u}} \mathrm{d} \mathbf{x}\right) + \frac{p-1}{8} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t(|\mathbf{u}|^{p-3}) |\partial_t^k(|\mathbf{u}|^2)|^2 \mathrm{d} \mathbf{x} + \\ & \sum_{j=1}^{k-1} c_j \int \partial_t^{k-j+1}(|\mathbf{u}|^{p-3}) \partial_t^j(|\mathbf{u}|^2) \partial_t^k(|\mathbf{u}|^2) \mathrm{d} \mathbf{x} + \\ & \sum_{j=1}^{k-1} c_j \int \partial_t^{k-j}(|\mathbf{u}|^{p-3}) \partial_t^{j+1}(|\mathbf{u}|^2) \partial_t^k(|\mathbf{u}|^2) \mathrm{d} \mathbf{x} + \\ & \sum_{j=1}^k c_j \int \partial_t^k(|\mathbf{u}|^{p-1}) \partial_t^j \mathbf{u} \partial_t^{k+1-j} \overline{\mathbf{u}} \mathrm{d} \mathbf{x}, \end{aligned}$$

其中 $c_j \in \mathbb{R}$ 表示常数, 且在不同之处可取不同值.

证明: 注意到

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mathrm{i} \partial_t^{k+1} \mathbf{u}, \partial_t^k \mathbf{u}) &= \operatorname{Re}(\partial_t^k(-\Delta \mathbf{u}), \partial_t^k \mathbf{u}) + \operatorname{Re}(\partial_t^k(|\mathbf{u}|^{p-1}), \partial_t^k \mathbf{u}) = \\ & \|\partial_t^k \nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \operatorname{Re}(\partial_t^k(|\mathbf{u}|^{p-1}), \partial_t^k \mathbf{u}), \end{aligned} \quad (28)$$

基于恒等式(28), 并对时间求导, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t}(\|\partial_t^k \nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \operatorname{Re}(\partial_t^k(|\mathbf{u}|^{p-1}), \partial_t^k \mathbf{u})) = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \|\partial_t^{k+1} \nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \operatorname{Re}(\partial_t^{k+1}(|\mathbf{u}|^{p-1} \mathbf{u}), \partial_t^k \mathbf{u}). \quad (29)$$

首先, 处理式(29)右端的第二项:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\partial_t^{k+1}(|\mathbf{u}|^{p-1} \mathbf{u}), \partial_t^k \mathbf{u}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \operatorname{Re}(\partial_t^k(|\mathbf{u}|^{p-1} \mathbf{u}), \partial_t^k \mathbf{u}) - \operatorname{Re}(\partial_t^k(|\mathbf{u}|^{p-1} \mathbf{u}), \partial_t^{k+1} \mathbf{u}) = \\ & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \operatorname{Re}(\partial_t^k(|\mathbf{u}|^{p-1} \mathbf{u}), \partial_t^k \mathbf{u}) - \operatorname{Re}(\partial_t^k(|\mathbf{u}|^{p-1}) \mathbf{u}, \partial_t^{k+1} \mathbf{u}) - \\ & \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \int |\mathbf{u}|^{p-1} |\partial_t^k \mathbf{u}|^2 \mathrm{d} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \int \partial_t(|\mathbf{u}|^{p-1}) |\partial_t^k \mathbf{u}|^2 \mathrm{d} \mathbf{x} + \\ & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{k-1} c_j (\partial_t^j \mathbf{u} \partial_t^{k-j}(|\mathbf{u}|^{p-1}), \partial_t^k \mathbf{u})\right) - \operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{k-1} c_j (\partial_t^{j+1} \mathbf{u} \partial_t^{k-j}(|\mathbf{u}|^{p-1}), \partial_t^k \mathbf{u})\right) - \\ & \operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{k-1} c_j (\partial_t^j \mathbf{u} \partial_t^{k-j+1}(|\mathbf{u}|^{p-1}), \partial_t^k \mathbf{u})\right). \end{aligned} \quad (30)$$

其次, 处理式(30)右端的第二项:

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re}(\partial_t^k(|\mathbf{u}|^{p-1}) \mathbf{u}, \partial_t^{k+1} \mathbf{u}) &= -\frac{1}{2} \int \partial_t^k(|\mathbf{u}|^{p-1}) \partial_t^{k+1}(|\mathbf{u}|^2) \mathrm{d} \mathbf{x} + \\ & \sum_{j=1}^k c_j \int \partial_t^k(|\mathbf{u}|^{p-1}) \partial_t^j \mathbf{u} \partial_t^{k+1-j} \overline{\mathbf{u}} \mathrm{d} \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (31)$$

再注意到

$$\partial_t^k(|\mathbf{u}|^{p-1}) = \frac{1}{2}(p-1) \partial_t^{k-1}(\partial_t(|\mathbf{u}|^2)|\mathbf{u}|^{p-3}),$$

从而可将恒等式(31)推进为

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re}(\partial_t^k(|\mathbf{u}|^{p-1}) \mathbf{u}, \partial_t^{k+1} \mathbf{u}) &= -\frac{p-1}{8} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \int |\mathbf{u}|^{p-3} |\partial_t^k(|\mathbf{u}|^2)|^2 \mathrm{d} \mathbf{x} + \\ & \frac{p-1}{8} \int \partial_t(|\mathbf{u}|^{p-3}) |\partial_t^k(|\mathbf{u}|^2)|^2 \mathrm{d} \mathbf{x} + \\ & \sum_{j=1}^{k-1} c_j \int \partial_t^{k-j}(|\mathbf{u}|^{p-3}) \partial_t^j(|\mathbf{u}|^2) \partial_t^{k+1}(|\mathbf{u}|^2) \mathrm{d} \mathbf{x} + \\ & \sum_{j=1}^k c_j \int \partial_t^k(|\mathbf{u}|^{p-1}) \partial_t^j \mathbf{u} \partial_t^{k+1-j} \overline{\mathbf{u}} \mathrm{d} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

进而通过分析可得

$$-\operatorname{Re}(\partial_t^k(|\mathbf{u}|^{p-1}) \mathbf{u}, \partial_t^{k+1} \mathbf{u}) = -\frac{p-1}{8} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \int |\mathbf{u}|^{p-3} |\partial_t^k(|\mathbf{u}|^2)|^2 \mathrm{d} \mathbf{x} + \frac{p-1}{8} \int \partial_t(|\mathbf{u}|^{p-3}) |\partial_t^k(|\mathbf{u}|^2)|^2 \mathrm{d} \mathbf{x} +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{k-1} c_j \int \partial_t^{k-j} (|u|^{p-3}) \partial_t^j (|u|^2) \partial_t^k (|u|^2) dx + \\
& \sum_{j=1}^k c_j \int \partial_t^{k-j+1} (|u|^{p-3}) \partial_t^j (|u|^2) \partial_t^k (|u|^2) dx + \\
& \sum_{j=1}^{k-1} c_j \int \partial_t^{k-j} (|u|^{p-3}) \partial_t^{j+1} (|u|^2) \partial_t^k (|u|^2) dx + \\
& \sum_{j=1}^k c_j \int \partial_t^k (|u|^{p-1}) \partial_t^j u \partial_t^{k+1-j} \bar{u} dx.
\end{aligned}$$

证毕.

综上所述, 本文通过构造修正能量泛函, 研究了 NLS 高阶 Sobolev 范数的时间增长性. 在二维情形下, 基于三次非线性项结果, 建立了任意高阶非线性项的多项式时间界.

参 考 文 献

- [1] BOURGAIN J. Global Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations [M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1999: 28-33.
- [2] BOURGAIN J. On Growth of Sobolev Norms in Linear Schrödinger Equations with Smooth Time Dependent Potential [J]. Journal D'Analyse Mathématique, 1999, 77(1): 315-348.
- [3] CHEN Q L, DENG M M. On the Growth of High Sobolev Norms of the Fourth-Order Schrödinger Equation [J]. Differential and Integral Equations, 2023, 36(7/8): 661-678.
- [4] BOURGAIN J. Fourier Transform Restriction Phenomena for Certain Lattice Subsets and Applications to Nonlinear Evolution Equations. II. The KdV-Equation [J]. Geometric and Functional Analysis, 1993, 3(3): 209-262.
- [5] DUCA A, NERSESYAN V. Bilinear Control and Growth of Sobolev Norms for the Nonlinear Schrödinger Equation [J]. Journal of the European Mathematical Society, 2025, 27(6): 2603-2622.
- [6] CHENG X, GUO C Y, ZHENG Y R. The Limit Theory of Energy-Critical Complex Ginzburg-Landau Equation [J]. Acta Mathematica Sinica (English Series), 2025, 41(12): 3003-3019.
- [7] GUARDIA M, HAUS E, PROCESI M. Growth of Sobolev Norms for the Analytic NLS on T^2 [J]. Advances in Mathematics, 2016, 301: 615-692.
- [8] LIU Y Y, ZHAO L G. Normalized Solutions for Schrödinger Equations with General Nonlinearities on Bounded Domains [J]. Journal of Geometric Analysis, 2025, 35(2): 54-1-54-32.
- [9] BURQ N, GÉRARD P, TZVETKOV N. Strichartz Inequalities and the Nonlinear Schrödinger Equation on Compact Manifolds [J]. American Journal of Mathematics, 2004, 126(3): 569-605.
- [10] ZHONG S. The Growth in Time of Higher Sobolev Norms of Solutions to Schrödinger Equations on Compact Riemannian Manifolds [J]. Journal of Differential Equations, 2008, 245(2): 359-376.
- [11] KOCH H, TATARU D. Conserved Energies for the Cubic Nonlinear Schrödinger Equation in One Dimension [J]. Duke Mathematical Journal, 2018, 167(17): 3207-3313.

(责任编辑: 赵立芹)