文章编号:1000-5854(2026)05-0433-06

仙人掌图关于奇圈数的特征值重数的上界

王梦涛,　王　龙

(安徽理工大学 数学与大数据学院,安徽 淮南　232001)

摘　要:本文研究了仙人掌图的特征值重数上界问题.对于一个简单无向仙人掌图 G,其邻接矩阵的特征值 μ 的重数用 $m(G,\mu)$ 表示,G 中 n 阶奇圈的特征值组成的集合用 U 表示,即 $U=\{2\cos\frac{2k\pi}{n} \mid k=0,1,\cdots,n-1,n$ 是一个奇数$\}$.本文主要运用数学归纳法对多种仙人掌图进行分类讨论,证明了当 $\mu\notin U$ 时,都有 $m(G,\mu)\leqslant 2c_e(G)+c_o(G)+p(G)$,并给出了等号成立的充要条件,其中 $p(G)$、$c_o(G)$ 与 $c_e(G)$ 分别表示图 G 的悬挂点数、奇圈数与偶圈数.

关键词:仙人掌图;图的特征值;邻接矩阵;奇圈数

中图分类号:O 157.6　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.13763/j.cnki.jhebnu.nse.202601010

The upper bound of the multiplicity of eigenvalues by the number of odd cycles in a cactus

Wang Mengtao,　Wang Long

(School of Mathematics and Big Data,Anhui University of Science and Technology,Huainan Anhui　232001,China)

Abstract:This paper studies the problem of the upper bound on the multiplicity of eigenvalues of cactus.For a simple undirected cactus G, the multiplicity of an eigenvalue μ of its adjacency matrix is denoted by $m(G,\mu)$. The set consisting of eigenvalues of odd cycles of order n in G is denoted by U, that is $U=\{2\cos\frac{2k\pi}{n} \mid k=0,1,\cdots,n-1$, where n is an odd number$\}$.In this paper,we mainly use mathematical induction to classify and discuss various cactus graphs, and find that when $\mu\notin U$, it always holds that $m(G,\mu)\leqslant 2c_e(G)+c_o(G)+p(G)$ .We also give the necessary and sufficient conditions for the equality to hold,where $p(G)$,$c_o(G)$ and $c_e(G)$ denote the number of pendant vertices,the number of odd cycles and the number of even cycles in graph G respectively.

Key words:cactus; eigenvalues of graph; adjacency matrix; number of odd cycles

对于一个连通的无向图,其中任意 2 条简单回路最多共享一个公共顶点,即任意一条边至多包含在一个简单回路中,则称这种图为仙人掌图.本文中的研究对象是简单无向仙人掌图.令 $G=(V(G),E(G))$ 是一个仙人掌图,$V(G)$ 与 $E(G)$ 分别表示顶点集与边集.图 G 中顶点 v 的度用 $d_v(G)$ 表示,是指与点 v 相邻的顶点数量.当 $d_v(G)=1$ 时,点 v 是图 G 的一个悬挂点,也称为图 G 的叶节点(简称叶).与悬挂点相邻的点,称为图 G 的拟悬挂点,其中图 G 的悬挂点数与拟悬挂点数分别用 $p(G)$ 与 $q(G)$ 表示.如果一个仙人掌图里没有

收稿日期:2025-07-23;**修回日期**:2026-03-15

基金项目:安徽省自然科学基金(2308085MA02)

作者简介:王梦涛(2001-),男,安徽亳州人,硕士研究生,研究方向为代数图论.

通信作者:王梦涛(2001-),男,硕士研究生,研究方向为代数图论.E-mail:3461215578@qq.com

任何叶节点，则称其为无叶仙人掌图.当 $d_v(G)\geqslant 3$ 时，点 v 是图 G 的主顶点.对于一个连通图 G，圈的个数用 $c(G)=|E(G)|-|V(G)|+1$ 来表示.对于一个圈 C_n，当顶点数 n 是一个奇数(偶数)时，则称其为一个奇圈(偶圈).对于任意一个仙人掌图 G，其奇圈数与偶圈数分别用 $c_o(G)$ 与 $c_e(G)$ 来表示，显然 $c(G)=c_o(G)+c_e(G)$.

对于任意一个实数 μ，若 $A(G)$ 是图 G 的邻接矩阵，$V_G^\mu=\{\alpha\in R^n\mid A(G)\alpha=\mu\alpha\}$ 是 $A(G)$ 属于 μ 的特征子空间，图 G 关于特征值 μ 的重数用 $m(G,\mu)$ 表示，易得 $\dim(V_G^\mu)=m(G,\mu)$.对于 $V(G)$ 的一个子集 X，令 $Z_G^X=\{\alpha\in R^n\mid \alpha_x=0,\forall x\in X\}$，其中 α_x 是指 α 在 x 处的元素，即 $\dim(Z_G^X)=n-|X|$.

近年来，图 G 特征值重数上界问题的研究是图论领域的研究热点，文献[1-5]讨论了一些特定阶数的树的特征值重数上界的问题.文献[6]研究了任意连通图的零度与其圈数、悬挂点数之间的关系，并证明了如果 G 不是一个圈，则 $m(G,0)\leqslant 2c(G)+p(G)-1$.文献[7]将特征值 μ 的取值范围扩大到了任意实数，证明了 $m(G,\mu)\leqslant 2c(G)+p(G)$.文献[8]限制了特征值 $|\mu|\geqslant 2$，将任意连通图的特征值重数上界精确到了 $c(G)+q(G)$.在此基础上，文献[9-10]进一步开展了特征值重数相关研究.

本文中，笔者讨论了图 G 的特征值重数上界问题，并限制了特征值 $\mu\notin U$，其中 $U=\{2\cos\frac{2k\pi}{n}\mid k=0,1,\cdots,n-1,n$ 是一个奇数$\}$，在文献[7]的基础上将仙人掌图的特征值重数上界精确到了 $2c_e(G)+c_o(G)+p(G)$，并给出了该仙人掌图的特征值重数取到上界的充要条件，其中 $c_o(G)$ 与 $c_e(G)$ 分别表示仙人掌图的奇圈数与偶圈数.

1 相关引理

引理 1[11] 令 n 是一个正整数，则圈 C_n 的特征值为 $\left\{2\cos\frac{2k\pi}{n}\mid k=0,1,\cdots,n-1\right\}$.

引理 2[8] 设 G 是一个连通图，令 $Y\subseteq X$ 是 $V(G)$ 的子集，且 $|X|-|Y|=m$，则 $\dim(V_G^\mu\cap Z_G^Y)\leqslant\dim(V_G^\mu\cap Z_G^X)+m$，此外，$m(G,\mu)\leqslant\dim(V_G^\mu\cap Z_G^X)+|X|$.

引理 3[7] 设 T 是一个阶数不小于 2 的树，$p(T)$ 表示树 T 的悬挂点数，则 $m(T,\mu)\leqslant p(T)-1$.

对于一个圈数 $c(G)$ 不小于 1 的连通图 G，其最大的无叶导出子图称为图 G 的底座，记为 G°.显然，其中 G° 仍是连通的，且是唯一的.

引理 4[8] 设 G 是一个连通图，$p(G)$ 表示图 G 的悬挂点数，则 $m(G,\mu)\leqslant m(G^\circ,\mu)+p(G)$，其中 G° 是指 G 的底座.

引理 5[8] 设 G 是一个圈数 $c(G)\geqslant 1$ 的连通图，$P\neq\varnothing$ 是 G 的悬挂点集，如果 $\alpha\in V_G^\mu\cap Z_G^P$，则 $\alpha_v=0$ 与 $\alpha_u=0$，其中 v 是 G 的底座 G° 外的任意一点，u 是 G° 的一点.

引理 6[7] 设 G 是一个含有悬挂圈的无叶双圈图，则 $m(G,\mu)\leqslant 3$.

2 主要结果

定理 1 设 G 是一个无叶仙人掌图，则 $m(G,\mu)\leqslant 2c(G)$，当且仅当 G 是一个圈 C_n，且 $\mu\in\left\{2\cos\frac{2k\pi}{n}\mid k=0,1,\cdots,n-1\right\}\setminus\{\pm 2\}$ 时等号成立.

证 充分性.如果 G 是一个圈，由引理 1 易得 $m(G,\mu)\leqslant 2$，且当 $\mu\in\left\{2\cos\frac{2k\pi}{n}\mid k=0,1,\cdots,n-1\right\}\setminus\{\pm 2\}$ 时，$m(G,\mu)=2=2c(G)$.

必要性.如果图 G 不是一个圈，即当 $c(G)\geqslant 2$ 时，对 G 的圈数 $c(G)$ 运用数学归纳法来证明这个结论.当 $c(G)=2$ 时，由引理 6 得 $m(G,\mu)\leqslant 3=2c(G)-1<2c(G)$.当 $c(G)\geqslant 3$ 时，假设该结论对所有满足 $c(G)\leqslant k-1$ 的图均成立.当 $c(G)=k\geqslant 3$ 时，不妨将 G 的一个悬挂圈记为 H，圈 H 上的唯一一个主顶点记为 x，令 y 是距离 x 最近的一个主顶点，P_n 是一条以点 x 与 y 为端点的内部路径，构造 G 的子图 $G'=G-H-(P_n-y)$，易得 $c(G')=k-1$，且 G' 仍是一个无叶仙人掌图.令 $N'=\{x,u\}$，u 是 H 上与 x 相邻的任意一点.由引理 2 可知

$$m(G,\mu)\leqslant\dim(V_G^\mu\cap Z_G^{N'})+2. \tag{1}$$

对任意 $\alpha \in V_G^{\mu} \cap Z_G^{N'}$，因为 $\alpha_x = \alpha_u = 0$，易得，对任意 $w \in V(H + P_n)$ 均有 $\alpha_w = 0$.因为 $\alpha_y = 0$，有 $\alpha|_{G'} \in V_{G'}^{\mu}$，其中 $\alpha|_{G'}$ 是指 α 在 G' 顶点集上的限制.当 $\alpha|_{G'} = 0$ 时，可知 $\alpha = 0$，即

$$\dim(V_G^{\mu} \cap Z_G^{N'}) \leqslant \dim(V_{G'}^{\mu} \cap Z_{G'}^{y}). \tag{2}$$

由归纳假设可知

$$m(G', \mu) \leqslant 2(k-1) - 1 = 2k - 3. \tag{3}$$

因为

$$\dim(V_{G'}^{\mu} \cap Z_{G'}^{y}) \leqslant m(G', \mu), \tag{4}$$

联立(1)～(4)，得 $m(G, \mu) \leqslant 2k - 1 = 2c(G) - 1 < 2c(G)$.

由以上讨论可知，若要满足 $m(G, \mu) = 2c(G)$，则图 G 只可能是一个圈.当 G 是一个圈时，由引理 1 可知，如果 $\mu = \pm 2$，则 $m(G, \mu) < 2 = 2c(G)$，即若要满足式子 $m(G, \mu) = 2c(G)$，则特征值 $\mu \neq \pm 2$.

综上，若 $m(G, \mu) = 2c(G)$，则图 G 是一个圈，且特征值满足 $\mu \in \left\{2\cos\frac{2k\pi}{n} \mid k = 0, 1, \cdots, n-1\right\} \backslash \{\pm 2\}$.

引理 7 设 G 是一个无叶仙人掌图，如果特征值 $\mu \notin U$，且 $c_e(G) = c_o(G) = 1$，则 $m(G, \mu) \leqslant 2 = 2c_e(G) + c_o(G) - 1$.

证 在这种情况下，G 可以看作是由奇圈 C_1 的任意一点 x 与偶圈 C_2 的任意一点 y 通过路径 P_m 连接得到的双圈图，$m = 1$ 时，x 与 y 可以看作同一点.令 $N = \{y, u\}$，其中 u 是圈 C_2 上与 y 相邻的任意一点，对于任意 $\alpha \in V_G^{\mu} \cap Z_G^{N}$，由 $\alpha_y = \alpha_u = 0$，易得，对任意 $v \in V(C_2 + P)$ 均有 $\alpha_v = 0$ 成立.由 $\alpha_x = 0$，有 $\alpha|_{C_1} \in V_{C_1}^{\mu}$.因为 $\mu \notin U$，$V_{C_1}^{\mu} = 0$，所以 $\alpha = 0$.由引理 2 得 $m(G, \mu) \leqslant 2 = 2c_e(G) + c_o(G) - 1$，结论成立.

引理 8 设 G 是圈数 $c(G) \geqslant 3$ 的无叶仙人掌图，如果 G 只有一个奇圈 C_1，且其是一个悬挂圈，当特征值 $\mu \notin U$ 时，则 $m(G, \mu) \leqslant 2c_e(G) + c_o(G) - 1$.

证 将 C_1 上的唯一一个主顶点记为 x.设 M 是图 G 的主顶点集，y 是一个主顶点，满足 $1 \leqslant d(x, y) \leqslant d(x, z)$，其中 z 是 M 中的任意一点.x 与 y 之间的路径记为 P_n，当 $n = 1$ 时，x 与 y 可以看作同一点.构造 G 的子图 $G' = G - C_1 - (P_n - y)$，易得图 G' 是一个圈数不小于 2 的无叶仙人掌图.由引理 2 可以知道

$$m(G, \mu) \leqslant \dim(V_G^{\mu} \cap Z_G^{x}) + 1. \tag{5}$$

对任意 $\alpha \in V_G^{\mu}$，如果 $\alpha_x = 0$，有 $\alpha|_{C_1} \in V_{C_1}^{\mu}$.因为 $\mu \notin U$，有 $V_{C_1}^{\mu} = 0$，即对任意 $v \in V(C_1)$，均有 $\alpha_v = 0$ 成立.由 $A(G) = \mu\alpha$，易得，对任意 $w \in V(P_n)$，均有 $\alpha_w = 0$ 成立.因为 $\alpha_y = 0$，有 $\alpha|_{G'} \in V_{G'}^{\mu}$，当 $\alpha|_{G'} = 0$ 时，可知 $\alpha = 0$，即

$$\dim(V_G^{\mu} \cap Z_G^{x}) \leqslant \dim(V_{G'}^{\mu} \cap Z_{G'}^{y}). \tag{6}$$

由定理 1 可知

$$m(G', \mu) \leqslant 2c(G') - 1, \tag{7}$$

又因为

$$\dim(V_{G'}^{\mu} \cap Z_{G'}^{y}) \leqslant m(G', \mu), \tag{8}$$

$$c(G') = c_e(G). \tag{9}$$

联立(5)～(9)，得到 $m(G, \mu) \leqslant 2c_e(G) = 2c_e(G) + c_o(G) - 1$，结论成立.

引理 9 设 G 是圈数 $c(G) \geqslant 3$ 的无叶仙人掌图，如果 G 只有一个奇圈 C_1，当特征值 $\mu \notin U$ 时，则 $m(G, \mu) \leqslant 2c_e(G) + c_o(G) - 1$.

证 对奇圈 C_1 上的主顶点数 $|M_1|$ 进行数学归纳.当 $|M_1| = 1$ 时，奇圈 C_1 是一个悬挂圈，由引理 8 可知结论显然成立.

假设该结论对任意满足 $|M_1| \leqslant s - 1$ 的无叶仙人掌图成立.当 $|M_1| = s \geqslant 2$ 时，C_1 上的任意一个主顶点记为 x，令 H' 是 $G - x$ 的一个分支，$K' = G - V(H')$，令 $H = H' + x$，$K = K' + x$.不失一般性，假设这时 C_1 是 K 的奇圈，在 K 中 C_1 上的主顶点数 $|M_1| = s - 1$，且 K 是一个无叶仙人掌图，将 K 的偶圈数记为 $c_e(K) = c(K) - 1$，易得 $c_e(K) + c_e(H) = c_e(G)$.由引理 2 可知

$$m(G,\mu)\leqslant \dim(V_G^{\mu}\cap Z_G^{x})+1. \tag{10}$$

令 f 是一个从 $V_G^{\mu}\cap Z_G^{x}$ 映射到 $V_K^{\mu}\cap V_H^{\mu}$ 上的线性映射，对任意 $\alpha\in V_G^{\mu}\cap Z_G^{x}$，$f(\alpha)=(\alpha|_K,\alpha|_H)$ 都成立.如果 $\alpha\in V_G^{\mu}\cap Z_G^{x}$，则有 $\alpha|_K\in V_K^{\mu}\cap Z_K^{x}$ 与 $\alpha|_H\in V_H^{\mu}\cap Z_H^{x}$，这说明 f 的像包含在 $(V_K^{\mu}\cap Z_K^{x})\oplus(V_H^{\mu}\cap Z_H^{x})$ 中，其中 $(V_K^{\mu}\cap Z_K^{x})\oplus(V_H^{\mu}\cap Z_H^{x})$ 表示由空间 $V_K^{\mu}\cap Z_K^{x}$ 与空间 $V_H^{\mu}\cap Z_H^{x}$ 的直和所形成的新的空间.如果 $f(\alpha)=0$，则 $\alpha=0$.因此，

$$\dim(V_G^{\mu}\cap Z_G^{x})\leqslant \dim(V_K^{\mu}\cap Z_K^{x})+\dim(V_H^{\mu}\cap Z_H^{x}). \tag{11}$$

如果 $d_G(x)=3$，此时 x 是 H 的一个悬挂点.在 H 上距离 x 最近的主顶点记为 y，且 x 与 y 之间的路径记为 P_n.因为 $\alpha_x=0$，对任意 $w\in V(P_n)$ 均有 $\alpha_w=0$.构造一个无叶仙人掌图 $H^{\circ}=H-(P_n-y)$.因为 $\alpha_y=0$，有 $\alpha|_{H^{\circ}}\in V_{H^{\circ}}^{\mu}$.当 $\alpha|_{H^{\circ}}=0$ 时，可知 $\alpha=0$，即

$$\dim(V_H^{\mu}\cap Z_H^{x})\leqslant \dim(V_{H^{\circ}}^{\mu}\cap Z_{H^{\circ}}^{y}). \tag{12}$$

如果 H° 是一个偶圈，令 $Y=\{y,v\}$，其中 v 是在 H° 上与 y 相邻的任意一点.对任意的 $\beta\in V_{H^{\circ}}^{\mu}\cap Z_{H^{\circ}}^{y}$，易得 $\beta=0$.由引理 2 得

$$\dim(V_{H^{\circ}}^{\mu}\cap Z_{H^{\circ}}^{y})\leqslant \dim(V_{H^{\circ}}^{\mu}\cap Z_{H^{\circ}}^{y})+1=1\leqslant 2c(H^{\circ})-1. \tag{13}$$

反之，如果 H° 不是一个偶圈，则 $c(H^{\circ})\geqslant 2$.由定理 1 可知

$$\dim(V_{H^{\circ}}^{\mu}\cap Z_{H^{\circ}}^{y})\leqslant m(H^{\circ},\mu)\leqslant 2c(H^{\circ})-1. \tag{14}$$

无论哪种情况均可得到

$$\dim(V_{H^{\circ}}^{\mu}\cap Z_{H^{\circ}}^{y})\leqslant 2c(H^{\circ})-1. \tag{15}$$

综上，联立(12)和(15)得

$$\dim(V_H^{\mu}\cap Z_H^{x})\leqslant 2c(H^{\circ})-1=2c(H)-1=2c_{\mathrm{e}}(H)-1. \tag{16}$$

如果 $d_G(x)\geqslant 4$，此时 H 是一个无叶仙人掌图，该结论也不难得到，即(16)始终成立.

由归纳假设可知

$$m(K,\mu)\leqslant 2c_{\mathrm{e}}(K)+c_{\mathrm{o}}(K)-1. \tag{17}$$

即

$$\dim(V_K^{\mu}\cap Z_K^{x})\leqslant 2c_{\mathrm{e}}(K)+c_{\mathrm{o}}(K)-1. \tag{18}$$

综上所述，联立(10)、(11)、(16)和(18)，得 $m(G,\mu)\leqslant 2c_{\mathrm{e}}(G)+c_{\mathrm{o}}(G)-1$，结论成立.

引理 10 设 G 是一个奇圈数 $c_{\mathrm{o}}(G)\leqslant 1$ 的无叶仙人掌图，如果特征值 $\mu\notin U$，则 $m(G,\mu)\leqslant 2c_{\mathrm{e}}(G)+c_{\mathrm{o}}(G)$，其中 $c_{\mathrm{e}}(G)$ 是图 G 的偶圈数，当且仅当 G 是一个偶圈 C_n 且 $\mu\in\left\{2\cos\dfrac{2k\pi}{n}\mid k=0,1,\cdots,n-1\right\}\backslash(U\cup\{\pm 2\})$ 时等号成立.

证 充分性.当 G 是一个偶圈时，由引理 1 易得 $m(G,\mu)\leqslant 2=2c_{\mathrm{e}}(G)+c_{\mathrm{o}}(G)$，且当 $\mu\in\left\{2\cos\dfrac{2k\pi}{n}\mid k=0,1,\cdots,n-1\right\}\backslash(U\cup\{\pm 2\})$ 时等号成立.

必要性.下面讨论如果 G 不是一个偶圈的情况.当 $c_{\mathrm{o}}(G)=0$ 时，由于 G 不是一个偶圈，则 $c(G)\geqslant 2$.由定理 1 易得 $m(G,\mu)\leqslant 2c(G)-1=2c_{\mathrm{e}}(G)-1<2c_{\mathrm{e}}(G)+c_{\mathrm{o}}(G)$，结论成立.

反之 $c_{\mathrm{o}}(G)=1$，如果 $c(G)=1$，此时，G 是一个奇圈，易得 $m(G,\mu)=0<2c_{\mathrm{e}}(G)+c_{\mathrm{o}}(G)$，结论成立.如果 $c(G)=2$，由引理 7 得 $m(G,\mu)\leqslant 2<2c_{\mathrm{e}}(G)+c_{\mathrm{o}}(G)$，结论成立.当 $c(G)\geqslant 3$ 时，由引理 9 得 $m(G,\mu)\leqslant 2c_{\mathrm{e}}(G)+c_{\mathrm{o}}(G)-1<2c_{\mathrm{e}}(G)+c_{\mathrm{o}}(G)$，结论仍然成立.

由以上讨论可知，若想要满足 $m(G,\mu)=2c_{\mathrm{e}}(G)+c_{\mathrm{o}}(G)$，图 G 只可能是一个偶圈.当 G 是一个偶圈时，由引理 1 可知，如果 $\mu\in U\cup\{\pm 2\}$，则 $m(G,\mu)<2=2c_{\mathrm{e}}(G)+c_{\mathrm{o}}(G)$，即若要满足 $m(G,\mu)=2c_{\mathrm{e}}(G)+c_{\mathrm{o}}(G)$，则特征值 $\mu\notin U\cup\{\pm 2\}$.

综上，若 $m(G,\mu)=2c_{\mathrm{e}}(G)+c_{\mathrm{o}}(G)$，则图 G 是一个偶圈，且特征值满足 $\mu\in\left\{2\cos\dfrac{2k\pi}{n}\mid k=0,1,\cdots,n-1\right\}\backslash(U\cup\{\pm 2\})$.

定理 2 设 G 是一个无叶仙人掌图，如果特征值 $\mu \notin U$，则 $m(G,\mu) \leqslant 2c_e(G)+c_o(G)$，当且仅当 G 是一个偶圈 C_n 且 $\mu \in \left\{2\cos\frac{2k\pi}{n} \mid k=0,1,\cdots,n-1\right\} \backslash (U \cup \{\pm 2\})$ 时等号成立.

证 对仙人掌图 G 的奇圈数 $c_o(G)$ 做数学归纳法来证明这个结论.当奇圈数 $c_o(G) \leqslant 1$ 时，该结论由引理 10 可得.当奇圈数 $c_o(G) \geqslant 2$ 时，假设该结论对任意奇圈数不超过 $s-1$ 的这类无叶仙人掌图成立，不妨设 $c_o(G)=s \geqslant 2$.对 G 中任一个割点 x，令 H' 是 $G-x$ 的一个分支，构造 $H=H'+x$，$K=G-V(H')$，易得子图 H 与 K 中均含有奇圈，且有

$$c_o(G)=c_o(K)+c_o(H), \tag{19}$$

$$c_e(G)=c_e(K)+c_e(H). \tag{20}$$

由引理 2，易得

$$m(G,\mu) \leqslant \dim(V_G^\mu \cap Z_G^x)+1. \tag{21}$$

令 f 是一个从 $V_G^\mu \cap Z_G^x$ 映射到 $V_K^\mu \cap V_H^\mu$ 上的线性映射，满足 $f(\alpha)=(\alpha|_K,\alpha|_H)$，对任意 $\alpha \in V_G^\mu \cap Z_G^x$ 均成立.如果 $\alpha \in V_G^\mu \cap Z_G^x$，则有 $\alpha|_K \in V_K^\mu \cap Z_K^x$ 与 $\alpha|_H \in V_H^\mu \cap Z_H^x$，这说明 f 的像包含在 $(V_K^\mu \cap Z_K^x) \oplus (V_H^\mu \cap Z_H^x)$ 中.如果 $f(\alpha)=0$，则 $\alpha=0$.因此，

$$\dim(V_G^\mu \cap Z_G^x) \leqslant \dim(V_K^\mu \cap Z_K^x)+\dim(V_H^\mu \cap Z_H^x). \tag{22}$$

如果子图 H 与 K 均为无叶图，则 $1 \leqslant c_o(H) \leqslant s-1$，$1 \leqslant c_o(K) \leqslant s-1$，由归纳假设易得

$$m(H,\mu) \leqslant 2c_e(H)+c_o(H)-1, \tag{23}$$

$$m(K,\mu) \leqslant 2c_e(K)+c_o(K)-1. \tag{24}$$

联立(19)～(24)，得 $m(G,\mu) \leqslant 2c_e(G)+c_o(G)-1$.

如果子图 H 与 K 有一个不是无叶图，不失一般性，假设图 K 不是无叶图，x 是 K 的一个悬挂点，在 K 上距离 x 最近的主顶点记为 y，且 x 与 y 之间的路径记为 P，因为 $\alpha_x=0$，易得对任意 $w \in V(P)$，均有 $\alpha_w=0$ 成立.构造 $K^\circ=K-(P-y)$，此时 $c_o(K)=c_o(K^\circ)$，$c_e(K)=c_e(K^\circ)$.因为 $\alpha_y=0$，有 $\alpha|_{K^\circ} \in V_{K^\circ}^\mu$，当 $\alpha|_{K^\circ}=0$ 时，可知 $\alpha=0$，即

$$\dim(V_K^\mu \cap Z_K^x) \leqslant \dim(V_{K^\circ}^\mu \cap Z_{k^\circ}^y). \tag{25}$$

此时，K° 与 H 都是无叶仙人掌图，且 $1 \leqslant c_o(H) \leqslant s-1$，$1 \leqslant c_o(K^\circ) \leqslant s-1$，由归纳假设可得

$$\dim(V_H^\mu \cap Z_H^x) \leqslant m(H,\mu) \leqslant 2c_e(H)+c_o(H)-1, \tag{26}$$

$$\dim(V_K^\mu \cap Z_K^x) \leqslant \dim(V_{K^\circ}^\mu \cap Z_{K^\circ}^y) \leqslant 2c_e(K^\circ)+c_o(K^\circ)-1. \tag{27}$$

联立(19)～(22)与(25)～(27)，得 $m(G,\mu) \leqslant 2c_e(G)+c_o(G)-1$.

如果子图 H 与 K 都不是无叶图，重复上述操作，结论仍然成立.

定理 3 设 G 是一个仙人掌图，$p(G)$ 是图 G 的悬挂点数，如果特征值 $\mu \notin U$，则 $m(G,\mu) \leqslant 2c_e(G)+c_o(G)+p(G)$，当且仅当 G 是一个偶圈 C_n 且 $\mu \in \left\{2\cos\frac{2k\pi}{n} \mid k=0,1,\cdots,n-1\right\} \backslash (U \cup \{\pm 2\})$ 时等号成立.

证 如果 G 是一棵树，由引理 3 得 $m(T,\mu) \leqslant p(G)-1 < 2c_e(G)+c_o(G)+p(G)$.

如果 G 是一个偶圈.易得 $m(G,\mu) \leqslant 2=2c_e(G)+c_o(G)$，当且仅当 $\mu \in \left\{2\cos\frac{2k\pi}{n} \mid k=0,1,\cdots,n-1\right\} \backslash (U \cup \{\pm 2\})$ 时等号成立.

如果 G 不是一个偶圈，且 G° 也不是一个偶圈.由引理 4 易得 $m(G,\mu) \leqslant m(G^\circ,\mu)+p(G)$，由定理 2 易得 $m(G^\circ,\mu) \leqslant 2c_e(G)+c_o(G)-1$，即 $m(G,\mu) \leqslant 2c_e(G)+c_o(G)+p(G)-1 < 2c_e(G)+c_o(G)+p(G)$.

如果 G 不是一个偶圈，但 G° 是一个偶圈，至少有一个点 $x \in V(G^\circ)$ 是 G 的主顶点.令 P 是其悬挂点集.对任意 $\alpha \in V_G^\mu \cap Z_G^P$，由引理 5 得，$\alpha_x=0$，$\alpha_w=0$，其中 w 是 G° 外任意一点.令点 $y \in V(G^\circ)$ 与点 x 相邻，且 $\alpha_y=0$，易得对任意点 $v \in V(G^\circ)$，$\alpha_v=0$ 均成立.由于 $\alpha=0$，通过引理 2 得 $m(G,\mu) \leqslant p(G)+1 < 2c_e(G)+c_o(G)+p(G)$.

3 结 论

通过对连通图 G 与特征值 μ 进行限制，精确了仙人掌图特征值重数的上界，并对能取得上界的仙人掌图进行了刻画.这一结果是否可以推广到其他图中，以及对使 $m(G,\mu)=2c_e(G)+c_o(G)+p(G)-1$ 成立的仙人掌图的刻画，还需进一步讨论研究.

参考文献：

[1] Rowlinson P.On multiple eigenvalues of trees[J].Linear Algebra and Its Applications,2010,432(11):3007-3011.DOI:10.1016/j.laa.2010.01.003.

[2] Wong D,Zhou Q,Tian F L.On the multiplicity of eigenvalues of trees[J].Linear Algebra and Its Applications,2020,593:180-187.DOI:10.1016/j.laa.2020.02.004.

[3] Tian F L,Wang Y J.On the multiplicity of positive eigenvalues of a graph[J].Linear Algebra and Its Applications,2022,652:105-124.DOI:10.1016/j.laa.2022.07.008.

[4] Zhang Y S,Zhou Q,Wong D.A note on the multiplicities of the eigenvalues of a tree[J].Linear Algebra and Its Applications,2022,652:97-104.DOI:10.1016/j.laa.2022.07.006.

[5] Du Z B,Huang Y H.The multiplicity of eigenvalues of trees[J].Linear Algebra and Its Applications,2022,654:56-68.DOI:10.1016/j.laa.2022.08.018.

[6] Ma X B,Wong D,Tian F L.Nullity of a graph in terms of the dimension of cycle space and the number of pendant vertices[J].Discrete Applied Mathematics,2016,215:171-176.DOI:10.1016/j.dam.2016.07.010.

[7] Wang L,Wei L L,Jin Y R.The multiplicity of an arbitrary eigenvalue of a graph in terms of cyclomatic number and number of pendant vertices[J].Linear Algebra and Its Applications,2020,584:257-266.DOI:10.1016/j.laa.2019.09.013.

[8] Zhen W H,Wong D,Zhang Y S.Eigenvalue multiplicity of graphs with given cyclomatic number and given number of quasi-pendant vertices[J].Discrete Applied Mathematics,2024,347:23-29.DOI:10.1016/j.dam.2023.12.029.

[9] 周奇.图的特征值重数与若干结构参数的关系[D].徐州：中国矿业大学，2023.DOI:10.27623/d.cnki.gzkyu.2023.000501.
Zhou Qi.Relations between multiplicity of eigenvalues and several structural parameters of graphs[D].Xuzhou:China University of Mining and Technology,2023.

[10] 张元帅.图的特征值重数和一些结构参数的关系[D].徐州：中国矿业大学，2024.DOI:10.27623/d.cnki.gzkyu.2024.000220.
Zhang Yuanshuai.The relationship between the multiplicity of eigenvalues and structural parameters of a graph[D].Xuzhou:China University of Mining and Technology,2024.

[11] Brouwer A E,Haemers W H.Spectra of graphs[M].New York:Springer,2012:1-250.

（责任编辑　赵静慧）