文章编号:1000-1638(2026)05-0493-08 DOI:10.13484/j.nmgdxxbzk.20260505

混合单侧后移算子*

荣 祯

(内蒙古财经大学统计与数学学院,呼和浩特 010070)

摘要:考虑可桶拓扑序列空间和超可桶拓扑序列空间上的混合单侧后移算子,完成两类空间上混合单侧后移算子的刻画分析。首先,利用可桶空间中的Banach-Steinhaus定理,在可桶拓扑序列空间上刻画了混合单侧后移算子。其次,在超可桶空间中建立了相应的Banach-Steinhaus定理,然后借助此定理在超可桶拓扑序列空间上刻画了混合单侧后移算子。

关键词:混合算子;可桶空间;超可桶空间;拓扑序列空间;单侧后移算子

中图分类号:O177.2 **文献标志码**:A

人们对超循环算子的研究起源于不变子集问题。不变子集问题至今仍未解决,该问题探讨在任意无限维可分Hilbert空间上,每个连续线性算子是否都存在非平凡的不变闭子集。容易知道,Banach空间X上的连续线性算子S不存在非平凡不变闭子集当且仅当X中的每个非零向量μ都是超循环的,即μ的轨道$\left\{S^n\mu:n\in\mathbb{N}\right\}$在$X$中稠密,其中$\mathbb{N}$表示非负整数集合。

超循环算子最著名的例子是由Birkhoff[1]、Maclane[2]和Rolewicz[3]给出的。Birkhoff[1]证明了整函数空间$H(\mathbb{C})$上的平移算子是超循环的,Maclane[2]证明了$H(\mathbb{C})$上的微分算子是超循环的,Rolewicz[3]研究了$l^p(1\leqslant p<+\infty)$或者$c_0$上的超循环后移算子。自此以后,超循环后移算子、混合后移算子、弱混合后移算子以及混沌后移算子得到了广泛研究。Salas[4]证明了存在一个超循环双侧加权后移算子其共轭也是超循环的。Salas[5]刻画了$l^2(\mathbb{Z})$上的超循环加权双侧后移算子。Grosse[6]刻画了F拓扑序列空间上的超循环以及混沌加权后移算子。Martínez-Giménez等[7]在一类序列空间上刻画了混沌加权后移算子。Costakis等[8]刻画了l^2和$l^2(\mathbb{Z})$上的混合加权单侧与双侧后移算子。Chan等[9]构造了一个弱超循环双侧后移算子而非范数超循环。Grosse-Erdmann等[10]刻画了Fréchet拓扑序列空间上的超循环、混合、弱混合以及混沌加权单侧与双侧后移算子。Rong等[11]刻画了序列完备拓扑序列空间上的混沌加权单侧后移算子。后移算子在线性动力系统的研究中扮演着重要角色。后移算子之所以受到关注,是因为许多经典算子(例如微分算子)都可以被视为这类算子。

本文刻画了可桶拓扑序列空间和超可桶拓扑序列空间上的混合无加权单侧后移算子,然后借助一个简单的共轭变换,刻画了可桶拓扑序列空间和超可桶拓扑序列空间上的混合加权单侧后移算子,推广了Grosse-Erdmann等[10]的相关结果。

1 预备知识

设$\mathbb{N}$表示非负整数集合,$\mathbb{N}^*$表示正整数集合,$\mathbb{Z}$表示整数集合,$\mathbb{K}$表示实数域$\mathbb{R}$或者复数域$\mathbb{C}$,$\mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}$表示从$\mathbb{N}^*$到$\mathbb{K}$的映射构成的集合。对于每个$n\in\mathbb{N}^*$,设$e_n$表示第$n$项为1、其余所有项均为0的数列。

* **收稿日期**:2025-11-03;**修回日期**:2026-01-12

基金项目:国家自然科学基金项目(12261063)

作者简介:荣 祯(1983—),男,湖北安陆人,副教授,博士。主要从事泛函分析和动力系统研究。E-mail:rongzhenboshi@sina.com

在Fréchet拓扑序列空间上的混合无加权和加权单侧后移算子情形下,Grosse-Erdmann等[10]分别得到了定理1和定理2。

定理1[10] 设X是Fréchet拓扑序列空间,其中$(e_n)_{n=1}^{\infty}$构成一组基。假设无加权单侧后移算子T是X上的线性算子,其中

$$T(u_1,u_2,u_3,\cdots)=(u_2,u_3,u_4,\cdots)$$

则T是混合的当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}e_n=0$。

定理2[10] 设X是Fréchet拓扑序列空间,其中$(e_n)_{n=1}^{\infty}$构成一组基。设$\nu=(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$是一个由非零数构成的数列。假设加权单侧后移算子$T_\nu$是$X$上的线性算子,其中

$$T_\nu(u_1,u_2,u_3,\cdots)=(\nu_2u_2,\nu_3u_3,\nu_4u_4,\cdots)$$

则T_ν是混合的当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\nu_i\right)^{-1}e_n=0$。

Fréchet拓扑序列空间是一类特殊的拓扑序列空间,其拓扑可由某个完备度量诱导生成。但是在实际应用中,存在许多拓扑序列空间,它们的拓扑不具备可度量化性质。因此,尝试刻画任意拓扑序列空间上的混合加权单侧后移算子成为一项基础研究工作。

在可桶拓扑序列空间上的混合无加权和加权单侧后移算子情形下,证明了如下结论。

定理3 设X是可桶拓扑序列空间,其中$(e_n)_{n=1}^{\infty}$构成一组基。假设无加权单侧后移算子T是X上的连续线性算子,其中

$$T(u_1,u_2,u_3,\cdots)=(u_2,u_3,u_4,\cdots)$$

则T是混合的当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}e_n=0$。

定理4 设X是可桶拓扑序列空间,其中$(e_n)_{n=1}^{\infty}$构成一组基。设$\nu=(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$是一个由非零数构成的数列。假设加权单侧后移算子$T_\nu$是$X$上的连续线性算子,其中

$$T_\nu(u_1,u_2,u_3,\cdots)=(\nu_2u_2,\nu_3u_3,\nu_4u_4,\cdots)$$

则T_ν是混合的当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\nu_i\right)^{-1}e_n=0$。

显然,定理3和定理4依次推广了定理1和定理2。

在超可桶拓扑序列空间上的混合无加权和加权单侧后移算子情形下,证明了如下结论。

定理5 设X是超可桶拓扑序列空间,其中$(e_n)_{n=1}^{\infty}$构成一组基。假设无加权单侧后移算子T是X上的连续线性算子,其中

$$T(u_1,u_2,u_3,\cdots)=(u_2,u_3,u_4,\cdots)$$

则T是混合的当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}e_n=0$。

定理6 设X是超可桶拓扑序列空间,其中$(e_n)_{n=1}^{\infty}$构成一组基。设$\nu=(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$是一个由非零数构成的数列。假设加权单侧后移算子$T_\nu$是$X$上的连续线性算子,其中

$$T_\nu(u_1,u_2,u_3,\cdots)=(\nu_2u_2,\nu_3u_3,\nu_4u_4,\cdots)$$

则T_ν是混合的当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\nu_i\right)^{-1}e_n=0$。

可以看出,定理5和定理6依次推广了定理1和定理2。

定义1[12] 设X是数域$\mathbb{K}$上的线性空间,且X上赋予了一个拓扑T,使得加法运算与数乘运算均为连续运算,则称有序对(X,T)为拓扑线性空间,并称该拓扑T为X上的线性拓扑。

定义2[12] 设X是拓扑线性空间,S是X上的连续线性算子。若存在X中的元素μ,使得μ的轨道$\{S^n\mu:n\in\mathbb{N}\}$在$X$中稠密,则称$S$为超循环算子。若对$X$中任意两个非空开子集$U$、$V$,都存在某个正整数$N$,使得对于所有满足$n\geqslant N$的整数$n$,均有$S^n(U)\cap V\neq\varnothing$,则称$S$为混合算子。

定义3[12] 设X是线性空间,A是X的子集。若对于任意满足$0\leqslant t\leqslant1$且$s+t=1$的实数s、t,

都有 $sA+tA\subseteq A$，则称 A 为凸集；若对于任意满足 $|t|\leqslant 1$ 的数 t，都有 $tA\subseteq A$，则称 A 为平衡集；若 A 既是平衡集又是凸集，则称 A 为绝对凸集。若对于任意的 $x\in X$，存在 $\varepsilon>0$ 使得当 $|t|<\varepsilon$ 时，有 $tx\in A$，则称 A 为吸收集。

定义 4[12]　设 X 是拓扑线性空间。若零元 0 的每个邻域都包含一个零元 0 的凸邻域，则称 X 为局部凸空间。若 X 的拓扑可由某个完备度量诱导产生，则称 X 为 F 空间。若 X 是局部凸的 F 空间，则称 X 为 Fréchet 空间。若 X 是 $\mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}$ 的线性子空间，且 X 中的收敛蕴含按坐标收敛，则称 X 为拓扑序列空间。

定义 5[12]　若拓扑线性空间 X 的子集 A 是一个绝对凸吸收闭集，则称 A 为一个桶。若一个局部凸空间中，每个桶都是零元 0 的邻域，则称该局部凸空间为可桶空间。众所周知，每个第二纲的局部凸空间都是可桶空间。特别地，每个 Fréchet 都是可桶空间。

定义 6[12]　设 $\mathfrak{T}$、$\mathfrak{T}^*$ 是线性空间 X 上的两个线性拓扑。若 $\mathfrak{T}^*$ 有一个零元 0 的邻域基，且该邻域基中的每个成员都是 $\mathfrak{T}$ 闭集，则称 $\mathfrak{T}^*$ F-链接于 $\mathfrak{T}$。若拓扑线性空间 $(X,\mathfrak{T})$ 满足：$\mathfrak{T}$ 包含所有 F-链接于 $\mathfrak{T}$ 的线性拓扑，则称该拓扑线性空间 $(X,\mathfrak{T})$ 为超可桶空间。众所周知，每个第二纲的拓扑线性空间都是超可桶空间[13]。特别地，每个 F 空间都是超可桶空间。此外，存在是可桶空间但非超可桶空间的例子，同时也存在是超可桶空间但非可桶空间的例子。

定义 7[12]　在拓扑线性空间 X 中，若序列 $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ 满足：对于 X 中的每一个元素 μ，都存在唯一的表达式 $\mu=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\mu_n$（其中 $\alpha_n\in\mathbb{K}$，$n\geqslant 1$），则称该序列 $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ 为 X 的基。

定义 8[12]　若拓扑线性空间 X 的子集 A 满足：对零元 0 的每个邻域 U，都存在 $\varepsilon>0$，使得当 $|t|<\varepsilon$ 时，总有 $tA\subseteq U$，则称 A 为有界集。众所周知，拓扑线性空间中的每个收敛序列都是有界的。

定义 9[12]　设 X、Y 是两个拓扑线性空间，$\mathfrak{F}$ 是一族从 X 到 Y 的线性映射。若对于 Y 中零元 0 的每个邻域 V，都存在 X 中零元 0 的一个邻域 U，使得对于任意的 $f\in\mathfrak{F}$，总有 $f(U)\subseteq V$，则称 $\mathfrak{F}$ 是等度连续的。

2　可桶拓扑序列空间上的混合单侧后移算子

本节对可桶拓扑序列空间上的混合单侧后移算子进行刻画，需要下述的 Banach-Steinhaus 定理[12]。

定理 7[12]　设 X 是可桶空间，Y 是局部凸空间，$\mathfrak{F}$ 是一族从 X 到 Y 的连续线性映射。若对于每个 $\mu\in X$，总有 $\mathfrak{F}(\mu)=\{f(\mu):f\in\mathfrak{F}\}$ 是 Y 中的有界集，则 $\mathfrak{F}$ 是等度连续的。

首先研究可桶拓扑序列空间上的无加权单侧后移算子，然后借助一个简单的共轭变换，其结果可直接推广到可桶拓扑序列空间上的所有加权单侧后移算子。

定理 8[10]　设 X 是拓扑线性空间，S 是 X 上的连续线性算子。若存在 X 的稠密子集 X_0、Y_0 以及映射 $F:Y_0\to Y_0$，使得对于任意的 $\mu\in X_0$，$\nu\in Y_0$，有

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}S^n\mu=0$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}F^n\nu=0$；

（3）$SF\nu=\nu$；

则 S 是混合的。

命题 1　设 X 是拓扑序列空间，其中 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ 构成一组基。假设无加权单侧后移算子 T 是 X 上的连续线性算子，其中

$$T(u_1,u_2,u_3,\cdots)=(u_2,u_3,u_4,\cdots)$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}e_n=0$，则 T 是混合的。

证明 由于$(e_n)_{n=1}^{\infty}$为X的基且X中的收敛蕴含按坐标收敛,因此,对于任意的$\mu=(u_n)_{n=1}^{\infty}\in X$有$\mu=\sum_{n=1}^{\infty}u_n e_n$,因此$\mathrm{span}\{e_n:n\geqslant 1\}$在$X$中稠密,$\mathrm{span}\{e_n:n\geqslant 1\}$为由$\{e_n:n\geqslant 1\}$所张成的线性子空间。取$X_0=Y_0=\mathrm{span}\{e_n:n\geqslant 1\}$,对于映射$F:Y_0\to Y_0$,取无加权单侧前移算子,$F$定义为

$$F(u_1,u_2,u_3,\cdots)=(0,u_1,u_2,\cdots)$$

(1) 对于任意的$\mu\in X_0$,当n充分大时,$T^n\mu=0$,则$\lim_{n\to\infty}T^n\mu=0$。

(2) 对于任意的$\nu\in Y_0$,将证明$\lim_{n\to\infty}F^n\nu=0$。

首先证明对于每个正整数j,有$\lim_{n\to\infty}F^n e_j=0$。由于$F^n e_j=e_{j+n}$且$\lim_{n\to\infty}e_n=0$,则$\lim_{n\to\infty}F^n e_j=0$。接下来证明对于任意的$\nu\in Y_0$,有$\lim_{n\to\infty}F^n\nu=0$。设$\nu\in Y_0$,因此存在一个正整数$m$以及$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in\mathbb{K}$使得$\nu=\alpha_1 e_1+\cdots+\alpha_m e_m$。由于对于任意$1\leqslant j\leqslant m$都有$\lim_{n\to\infty}F^n e_j=0$,则当$n\to\infty$时,$F^n\nu=\alpha_1F^n e_1+\cdots+\alpha_mF^n e_m\to 0$。

(3) 对于任意的$\nu\in Y_0$,有$TF\nu=\nu$。

综上所述,定理8中的条件(1)—(3)都成立,故T是混合的。

例1 记$\sigma(c_0,l^1)$是c_0的弱拓扑,关于弱拓扑的更多细节见文献[14]。显然,$(c_0,\sigma(c_0,l^1))$是一个拓扑序列空间且$(e_n)_{n=1}^{\infty}$构成一组基。由于$(c_0,\|\cdot\|_{\infty})$是无穷维的Banach空间,c_0的弱拓扑不可度量化,因此,$(c_0,\sigma(c_0,l^1))$不是Fréchet拓扑序列空间。显然,无加权单侧后移算子$T:(c_0,\sigma(c_0,l^1))\to(c_0,\sigma(c_0,l^1))$是连续的。最后得到结论,当$n\to\infty$时,在空间$(c_0,\sigma(c_0,l^1))$中$e_n\to 0$。对于每个$(\beta_k)_{k=1}^{\infty}\in l^1$,有$\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$,则当$n\to\infty$时,在空间$(c_0,\sigma(c_0,l^1))$中$e_n\to 0$。由命题1可知,无加权单侧后移算子$T:(c_0,\sigma(c_0,l^1))\to(c_0,\sigma(c_0,l^1))$是混合的。

例2 记$\sigma(l^{\infty},l^1)$是l^{∞}的弱*拓扑,关于弱*拓扑的更多细节见文献[14]。$(l^{\infty},\sigma(l^{\infty},l^1))$是一个拓扑序列空间且$(e_n)_{n=1}^{\infty}$构成一组基。由于$(l^1,\|\cdot\|_1)$是无穷维的Banach空间,$(l^1)^*$的弱*拓扑不可度量化,因此,$\sigma(l^{\infty},l^1)$不可度量化,$(l^{\infty},\sigma(l^{\infty},l^1))$不是Fréchet拓扑序列空间。显然,无加权单侧后移算子$T:(l^{\infty},\sigma(l^{\infty},l^1))\to(l^{\infty},\sigma(l^{\infty},l^1))$是连续的。最后得到结论,当$n\to\infty$时,在空间$(l^{\infty},\sigma(l^{\infty},l^1))$中$e_n\to 0$。对于每个$(\beta_k)_{k=1}^{\infty}\in l^1$,有$\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$。当$n\to\infty$时,在空间$(l^{\infty},\sigma(l^{\infty},l^1))$中$e_n\to 0$。由命题1可知,无加权单侧后移算子$T:(l^{\infty},\sigma(l^{\infty},l^1))\to(l^{\infty},\sigma(l^{\infty},l^1))$是混合的。

命题2 设X是可桶拓扑序列空间,其中$(e_n)_{n=1}^{\infty}$构成一组基。假设无加权单侧后移算子T是X上的混合线性算子,其中

$$T(u_1,u_2,u_3,\cdots)=(u_2,u_3,u_4,\cdots)$$

则$\lim_{n\to\infty}e_n=0$。

证明 只需证明对于零元0的任意邻域U,存在正整数N使得当$n>N$时有$e_n\in U$。

由于X是拓扑线性空间,加法运算是连续的,故存在零元0的一个邻域V_1使得$V_1+V_1\subseteq U$,其中$V_1+V_1=\{x+y:x,y\in V_1\}$。由于拓扑线性空间中零元0的每个邻域都包含零元0的一个平衡邻域(见文献[12]),可以选取零元0的一个平衡邻域V使得$V\subseteq V_1$,则$V+V\subseteq U$。

对于每个正整数n,在X上定义一个连续线性算子f_n,$f_n(\mu)=u_n e_n$,其中$\mu=(u_k)_{k=1}^{\infty}\in X$。由于$(e_k)_{k=1}^{\infty}$为$X$的基且$X$中的收敛蕴含按坐标收敛,则对于任意的$\mu=(u_k)_{k=1}^{\infty}\in X$有$\mu=\sum_{k=1}^{\infty}u_k e_k$。对于任意的$\mu=(u_k)_{k=1}^{\infty}\in X$,序列$(u_k e_k)_{k=1}^{\infty}$在$X$中收敛于0。故对于每个$\mu\in X$,$\{f_n(\mu):n\geqslant 1\}$是$X$中的有界集。由定理7可知,存在零元0的一个开邻域$W$,使得对于任意的正整数$n$,总有$f_n(W)\subseteq V$。由于$X$中的收敛蕴含按坐标收敛,从而存在零元0的一个开邻域Q,使得对于任意$\mu=(u_k)_{k=1}^{\infty}\in Q$,总有

$|u_1|\leqslant\frac{1}{2}$。由于$T$是混合的,从而存在某个正整数$N$,使得当$n>N$时,总有$T^{n-1}(W)\bigcap(e_1+Q)\neq\varnothing$。接下来证明当$n>N$时,有$e_n\in U$。对于每个$n>N$,可以选取$\mu_n\in W$使得$T^{n-1}(\mu_n)\in e_1+Q$。设$\mu_n=(u_{n,k})_{k=1}^{\infty}$,从而$T^{n-1}(\mu_n)=(u_{n,n},u_{n,n+1},\cdots)$。由于$\mu_n\in W$且$T^{n-1}(\mu_n)\in e_1+Q$,有$u_{n,n}e_n\in V$且$|u_{n,n}-1|\leqslant\frac{1}{2}$。由于$|u_{n,n}-1|\leqslant\frac{1}{2}$,有$|u_{n,n}|\geqslant\frac{1}{2}$且$|u_{n,n}^{-1}-1|=|\frac{1-u_{n,n}}{u_{n,n}}|\leqslant1$,则

$$e_n=(u_{n,n}^{-1}-1)u_{n,n}e_n+u_{n,n}e_n\in(u_{n,n}^{-1}-1)V+V$$

由于V是平衡的,$(u_{n,n}^{-1}-1)V\subseteq V$,因此,有$e_n\in V+V$。注意到$V+V\subseteq U$,故当$n>N$时,$e_n\in U$。

利用命题1和命题2,可直接得到定理3。

例 3　设φ为满足$\{k\in\mathbb{N}^*:u_k\neq0\}$为有限集的数列$\mu=(u_k)_{k=1}^{\infty}$的全体,记$B$为$\varphi$中所有绝对凸吸收集组成的集族,则在$\varphi$上存在唯一的局部凸拓扑,使得$B$成为该拓扑下零元0的邻域基,将这个唯一的局部凸拓扑记为$\mathfrak{T}$,并称之为φ上的最大局部凸拓扑。最大局部凸拓扑的更多细节见文献[12]。例3中将证明无加权单侧后移算子$T:(\varphi,\mathfrak{T})\to(\varphi,\mathfrak{T})$不是混合的。

显然,$(\varphi,\mathfrak{T})$是可桶拓扑序列空间,其中$(e_n)_{n=1}^{\infty}$构成一组基。由于φ是无穷维向量空间,故$(\varphi,\mathfrak{T})$不可度量化[12]。因此,$(\varphi,\mathfrak{T})$不是Fréchet拓扑序列空间。又因为从$(\varphi,\mathfrak{T})$到任意局部凸空间的每一个线性映射都是连续的,所以无加权单侧后移算子$T:(\varphi,\mathfrak{T})\to(\varphi,\mathfrak{T})$是连续的。最后得出结论,序列$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$在$(\varphi,\mathfrak{T})$中不收敛于0。假设当$n\to\infty$时,在$(\varphi,\mathfrak{T})$中$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于0,那么对于$\varphi$上的任意局部凸拓扑$\tau$,当$n\to\infty$时,在$(\varphi,\tau)$中$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于0。特别地,当$n\to\infty$时,在$(\varphi,\|\cdot\|)$中$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于0,其中$\varphi$上的范数$\|\cdot\|$定义为$\|\mu\|=\sup\limits_{k\geqslant1}|u_k|(\mu=(u_k)_{k=1}^{\infty}\in\varphi)$。但事实上,$\|e_n\|=1$,即$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$在$(\varphi,\|\cdot\|)$中并不收敛于0,这就产生了矛盾。因此,$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$在$(\varphi,\mathfrak{T})$中不收敛于0。根据定理3可知,无加权单侧后移算子$T:(\varphi,\mathfrak{T})\to(\varphi,\mathfrak{T})$不具有混合性。

通过适当的共轭变换,将目前得到的结果可推广到任意加权单侧后移算子上。

设$\nu=(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$是一个由非零数构成的数列。设$(X,\mathfrak{T})$是一个拓扑序列空间,$T_\nu$为$(X,\mathfrak{T})$上的加权单侧后移算子,其中

$$T_\nu(u_1,u_2,u_3,\cdots)=(\nu_2u_2,\nu_3u_3,\nu_4u_4,\cdots)$$

定义新的权序列为

$$w_n=(\prod_{i=1}^{n}\nu_i)^{-1},n\geqslant1$$

并考虑如下序列空间

$$X_w=\{(u_n)_{n=1}^{\infty}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}:(u_nw_n)_{n=1}^{\infty}\in X\}$$

显然,无加权单侧后移算子T是X_w上的线性算子。事实上,若$(u_n)_{n=1}^{\infty}\in X_w$,则$(u_nw_n)_{n=1}^{\infty}\in X$。由于$T_\nu$是$X$上的线性算子,故$(\nu_{n+1}u_{n+1}w_{n+1})_{n=1}^{\infty}\in X$。注意到$\nu_{n+1}u_{n+1}w_{n+1}=u_{n+1}w_n$,因此$(u_{n+1}w_n)_{n=1}^{\infty}\in X$,进而可得$(u_{n+1})_{n=1}^{\infty}\in X_w$,这表明无加权单侧后移算子$T$是$X_w$上的线性算子。

定义映射$\phi_w:X_w\to X$为$\phi_w((u_n)_{n=1}^{\infty})=(u_nw_n)_{n=1}^{\infty}$,显然,该映射是一个线性同构映射,可利用$\phi_w$将$X$上的拓扑转移到$X_w$上。记$\mathfrak{T}_w=\{U\subseteq X_w:\phi_w(U)\in\mathfrak{T}\}$。显然,$\mathfrak{T}_w$是$X_w$上的一个拓扑。由于$(X,\mathfrak{T})$是拓扑序列空间,故$(X_w,\mathfrak{T}_w)$也是拓扑序列空间;若$(X,\mathfrak{T})$是可桶空间,则$(X_w,\mathfrak{T}_w)$也是可桶空间;若$(e_n)_{n=1}^{\infty}$是$(X,\mathfrak{T})$的一组基,则$(e_n)_{n=1}^{\infty}$同样是$(X_w,\mathfrak{T}_w)$的一组基。最后,经过简单计算可得$T_\nu\circ\phi_w=\phi_w\circ T$。因此,$T_\nu:(X,\mathfrak{T})\to(X,\mathfrak{T})$连续当且仅当$T:(X_w,\mathfrak{T}_w)\to(X_w,\mathfrak{T}_w)$连续;$T_\nu:(X,\mathfrak{T})\to(X,\mathfrak{T})$是混合的当且仅当$T:(X_w,\mathfrak{T}_w)\to(X_w,\mathfrak{T}_w)$是混合的。

下面证明定理4。由于X是可桶拓扑序列空间且$(e_n)_{n=1}^{\infty}$是X的一组基,因此X_w也是可桶拓扑序列空间且$(e_n)_{n=1}^{\infty}$是X_w的一组基。由于加权单侧后移算子T_ν是X上的连续线性算子,因此无加权单侧后

移算子 T 也是 X_ω 上的连续线性算子。于是 $T_\nu: X\to X$ 是混合的,当且仅当 $T: X_\omega\to X_\omega$ 是混合的。再由定理3可知,$T: X_\omega\to X_\omega$ 是混合的当且仅当在 X_ω 中 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于0。注意到映射 $\phi_\omega: X_\omega\to X$ 是一个线性同胚映射,从而在 X_ω 中 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于0当且仅当在 X 中 $\{\phi_\omega(e_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于0。又由于 $\phi_\omega(e_n)=(\prod_{i=1}^{n}\nu_i)^{-1}e_n$,于是在 X_ω 中 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于0当且仅当在 X 中 $\{(\prod_{i=1}^{n}\nu_i)^{-1}e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于0,由此得证,$T_\nu: X\to X$ 是混合的当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}(\prod_{i=1}^{n}\nu_i)^{-1}e_n=0$。

3 超可桶拓扑序列空间上的混合单侧后移算子

本节刻画超可桶拓扑序列空间上的混合单侧后移算子。首先,将在超可桶空间中给出定理7的一个类似结论。

定理9[12] 设 X 是线性空间,B 为 X 的非空子集构成的非空集族,且 B 满足以下性质:

(1) B 中的每个成员都是平衡且吸收的;

(2) 若 $U\in B$,则存在 $V\in B$ 使得 $V+V\subseteq U$;

(3) 若 U_1、$U_2\in B$,则存在 $U_3\in B$ 使得 $U_3\subseteq U_1\cap U_2$;

则在 X 上存在唯一的线性拓扑,使得 B 成为该拓扑下零元0的邻域基。

定理10 设 $(X,\mathfrak{T})$ 是超可桶空间,Y 是局部凸空间,$\mathfrak{F}$ 是一族从 $(X,\mathfrak{T})$ 到 Y 的连续线性映射。若对于每个 $\mu\in X$,总有 $\mathfrak{F}(\mu)=\{f(\mu): f\in\mathfrak{F}\}$ 是 Y 中的有界集,则 $\mathfrak{F}$ 是等度连续的。

证明 设 V 为 Y 中零元0的一个邻域,将证明存在 $(X,\mathfrak{T})$ 中零元0的一个邻域 U,使得对于每个 $f\in\mathfrak{F}$,总有 $f(U)\subseteq V$。由于拓扑线性空间中零元0的每个邻域都包含零元0的一个闭平衡邻域[12],因此可在 Y 中选取零元0的一个闭平衡邻域 W,使得 $W\subseteq V$。接下来将证明存在 $(X,\mathfrak{T})$ 中零元0的一个邻域 U,使得对于每个 $f\in\mathfrak{F}$,总有 $f(U)\subseteq W$。令 $U=\bigcap\limits_{f\in\mathfrak{F}}f^{-1}(W)$,则对于每个 $f\in\mathfrak{F}$,有 $f(U)\subseteq W$。断言 U 是 $(X,\mathfrak{T})$ 中零元0的一个邻域,记

$$B=\{\bigcap_{f\in\mathfrak{F}}f^{-1}(P): P\text{是}Y\text{中零元0的一个闭平衡邻域}\}$$

则 B 满足以下性质:

(1) B 中的每个成员在 $(X,\mathfrak{T})$ 中都是闭集。设 P 为 Y 中零元0的一个闭平衡邻域,由于每个 $f\in\mathfrak{F}$ 都连续,故 $f^{-1}(P)$ 在 $(X,\mathfrak{T})$ 中是闭集。因此,$\bigcap\limits_{f\in\mathfrak{F}}f^{-1}(P)$ 在 $(X,\mathfrak{T})$ 中是闭集。

(2) B 中的每个成员都是平衡且吸收的。设 P 为 Y 中零元0的一个闭平衡邻域,因为 P 是平衡集,故 $\bigcap\limits_{f\in\mathfrak{F}}f^{-1}(P)$ 是平衡集。接下来将证明 $\bigcap\limits_{f\in\mathfrak{F}}f^{-1}(P)$ 是吸收集。对于任意 $\mu\in X$,由于集合 $\mathfrak{F}(\mu)=\{f(\mu): f\in\mathfrak{F}\}$ 在 Y 中是有界的,故存在 $\varepsilon>0$,使得当 $|t|<\varepsilon$ 时,有 $t\mathfrak{F}(\mu)\subseteq P$。因此,当 $|t|<\varepsilon$ 时,$t\mu\in\bigcap\limits_{f\in\mathfrak{F}}f^{-1}(P)$,这表明 $\bigcap\limits_{f\in\mathfrak{F}}f^{-1}(P)$ 是吸收集。

(3) 设 P 为 Y 中零元0的一个闭平衡邻域,证明存在 Y 中零元0的一个闭平衡邻域 Q,使得

$$\bigcap_{f\in\mathfrak{F}}f^{-1}(Q)+\bigcap_{f\in\mathfrak{F}}f^{-1}(Q)\subseteq\bigcap_{f\in\mathfrak{F}}f^{-1}(P)$$

由于 Y 是拓扑线性空间,向量加法是一个从 $Y\times Y$ 到 Y 的连续运算,故存在 Y 中零元0的一个邻域 P_1,使得 $P_1+P_1\subseteq P$。又由于拓扑线性空间中零元0的每个邻域都包含一个零元0的闭平衡邻域[12],因此,可在 Y 中选取零元0的一个闭平衡邻域 Q,使得 $Q\subseteq P_1$。由此可得 $Q+Q\subseteq P$,进而有 $\bigcap\limits_{f\in\mathfrak{F}}f^{-1}(Q)+\bigcap\limits_{f\in\mathfrak{F}}f^{-1}(Q)\subseteq\bigcap\limits_{f\in\mathfrak{F}}f^{-1}(P)$。

(4) 设 P、Q 为 Y 中零元0的两个闭平衡邻域,则 $P\bigcap Q$ 也是 Y 中零元0的一个闭平衡邻域,且满足

$$(\bigcap_{f\in\mathfrak{F}} f^{-1}(P))\bigcap(\bigcap_{f\in\mathfrak{F}} f^{-1}(Q))=\bigcap_{f\in\mathfrak{F}} f^{-1}(P\bigcap Q)\in B$$

由定理9可知，在X上存在唯一的线性拓扑$\mathfrak{T}^*$，使得B成为该拓扑下零元0的邻域基。显然，$\mathfrak{T}^*F$-链接于$\mathfrak{T}$。由于$(X,\mathfrak{T})$是超可桶空间，故有$\mathfrak{T}^*\subseteq\mathfrak{T}$。注意到$U=\bigcap_{f\in\mathfrak{F}} f^{-1}(W)\in B$，因此，$U$是$(X,\mathfrak{T})$中零元0的一个邻域。

接下来，首先研究超可桶拓扑序列空间上的无加权单侧后移算子，通过一个简单的共轭变换，其结果可直接推广到超可桶拓扑序列空间上的所有加权单侧后移算子。

命题3　设X是超可桶拓扑序列空间，其中$(e_n)_{n=1}^{\infty}$构成一组基。假设无加权单侧后移算子T是X上的混合线性算子，其中

$$T(u_1,u_2,u_3,\cdots)=(u_2,u_3,u_4,\cdots)$$

则$\lim\limits_{n\to\infty} e_n=0$。

若对连续线性算子$f_n(\mu)=u_ne_n(\mu=(u_k)_{k=1}^{\infty}\in X)$应用定理10，则命题3的证明过程与命题2完全一致，因此省略其证明。利用命题1和命题3，可直接得到定理5。若利用定理4中的共轭变换与定理5，则定理6的证明过程与定理4完全一致，因此省略其证明。

例4　设$0<p<1$，空间l^p定义为所有满足$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k|^p<+\infty$的数列$\mu=(u_k)_{k=1}^{\infty}$构成的集合。$l^p$中的度量定义为

$$d(\mu,\nu)=\sum_{k=1}^{\infty}|u_k-\nu_k|^p\ (\forall\mu=(u_k)_{k=1}^{\infty},\nu=(\nu_k)_{k=1}^{\infty}\in l^p)$$

证明加权单侧后移算子$T_\nu:(l^p,d)\to(l^p,d)$是混合算子，其中$\nu=(\nu_k)_{k=1}^{\infty}$是由非零数构成的有界数列，且满足$\lim\limits_{k\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{k}|\nu_i|=+\infty$。显然，$(l^p,d)$是$F$序列空间，且为超可桶空间。由于$(l^p,d)$不是局部凸空间[12]，因此$(l^p,d)$既不是Fréchet序列空间，也不是可桶空间。此外，$(e_k)_{k=1}^{\infty}$是(l^p,d)的一组基。易知，加权单侧后移算子$T_\nu:(l^p,d)\to(l^p,d)$是连续的。由于$\lim\limits_{k\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{k}|\nu_i|=+\infty$，故当$k\to\infty$时，$(\prod\limits_{i=1}^{k}\nu_i)^{-1}e_k$在$(l^p,d)$中收敛于0。由定理6可知，加权单侧后移算子$T_\nu:(l^p,d)\to(l^p,d)$是混合算子。

参考文献：

[1] Birkhoff G D. Démonstration d′un théorème élémentaire sur les fonctions entières[J]. Comptes Rendus de l′Académie des Sciences, 1929, 189: 473-475.

[2] Maclane G R. Sequences of derivatives and normal families[J]. Journal d′Analyse Mathématique, 1952, 2(1): 72-87.

[3] Rolewicz S. On orbits of elements[J]. Studia Mathematica, 1969, 32: 17-22.

[4] Salas H. A hypercyclic operator whose adjoint is also hypercyclic[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1991, 112(3): 765-770.

[5] Salas H N. Hypercyclic weighted shifts[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1995, 347(3): 993-1004.

[6] Grosse E K. Hypercyclic and chaotic weighted shifts[J]. Studia Mathematica, 2000, 139(1): 47-68.

[7] Martínez-Giménez F, Peris A. Chaos for backward shift operators[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, 2002, 12(8): 1703-1715.

[8] Costakis G, Sambarino M. Topologically mixing hypercyclic operators[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2004, 132: 385-389.

[9] Chan K C, Sanders R. A weakly hypercyclic operator that is not norm hypercyclic[J]. Journal of Operator Theory, 2004, 52: 39-59.

[10] Grosse-Erdmann K G, Manguilot A P. Linear chaos[M]. Heidelberg: Springer, 2011.

[11] Rong Z, Luo C, He F, et al. Chaotic unilateral weighted backward shifts on sequentially complete topological sequence spaces[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2022, 38(7): 1285-1293.

[12] Wilansky A. Modern methods in topological vector spaces[M]. New York: McGraw-Hill, 2013.

[13] Waelbroeck L. Topological vector spaces and algebras[M]. Heidelberg: Springer, 1971.

[14] Megginson R E. An introduction to Banach space theory[M]. Heidelberg: Springer, 1998.

(责任编委 李 宏)

Mixing Unilateral Backward Shifts

RONG Zhen

(*College of Statistics and Mathematics, Inner Mongolia University of Finance and Economics, Hohhot* 010070, *China*)

Abstract: Mixed unilateral backward shift operators defined on barreled and ultrabarreled topological sequence spaces are mainly considered, and their characterization and analysis on these two classes of spaces are accomplished. Firstly, the mixed unilateral backward shift operators on barreled topological sequence spaces are characterized by virtue of the Banach-Steinhaus theorem for barreled spaces. Secondly, the corresponding Banach-Steinhaus theorem is first established in ultrabarreled spaces, and then the theorem is applied to characterize the mixed unilateral backward shift operators on ultrabarreled topological sequence spaces.

Key words: mixing operators; barrelled spaces; ultrabarrelled spaces; topological sequence spaces; unilateral backward shifts