doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024129

共生种群的有限时间稳定性分析及最优捕获算法

张双红，徐袁媛
（吉林师范大学 数学与计算机学院，吉林 四平 136000）

摘要：针对共生种群在有限时间内的最优捕获问题，通过讨论共生种群的有限时间稳定性，并利用 Pontryagin 极大值原理及 Hamilton 函数方法，给出共生种群的最优捕获策略. 首先，基于养殖过程的数据信息对共生生物生长过程建立非线性模型，并在保证生态环境平衡的条件下，深入分析共生生长过程和共生系统的有限时间稳定性，给出了严格的证明过程；其次，应用基于 Lyapunov 方法的 Pontryagin 极大值原理推导出一种最优采收方法，并得到了最优采收解的一般算法；最后，用仿真对比实验结果证明该算法的有效性.

关键词：共生种群；水产养殖；有限时间稳定；最优捕获；Pontryagin 极大值原理
中图分类号：TP391 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2024)06-1411-08

Finite-Time Stability Analysis and Optimal Harvesting Algorithm of Symbiotic Populations

ZHANG Shuanghong, XU Yuanyuan
(*College of Mathematics and Computer, Jilin Normal University, Siping* 136000, *Jilin Province, China*)

Abstract: Aiming at the problem of optimal harvesting of symbiotic populations in finite time, we proposed the optimal harvesting strategy for symbiotic populations by discussing finite-time stability of symbiotic populations, utilizing Pontryagin maximum principle and Hamilton function method. Firstly, a nonlinear model of the growth process of symbiotic organisms was established based on the data information of the breeding process. Under the condition of ensuring the balance of ecological environment, the finite time stability of the symbiotic growth process and the symbiotic system was deeply analyzed, and a strict proof process was given. Secondly, an optimal harvesting method was derived by applying Pontryagin maximization principle based on Lyapunov method, and the general algorithm of optimal harvesting solution was obtained. Finally, the effectiveness of the proposed algorithm was proved by using simulation and comparative experimental results.

Keywords: symbiotic population; aquaculture; finite-time stability; optimal harvesting; Pontryagin maximum principle

共生关系是自然界中两种生物共同生存的一种关系，可分为互利共生、竞争共生和偏利共生等[1-2]. 在水产养殖业中，共生关系常应用于 2～3 个种群以获得更高的产量[3-4]，目前，对共生系统的性质及最优捕获策略的研究已有许多结果[5-13]. 在对具有共生关系的种群进行混合养殖的过程中发

收稿日期：2024-04-02.

第一作者简介：张双红(1977—)，女，汉族，博士，副教授，从事生物数学和最优控制的研究，E-mail：zsh@jlnu.edu.cn.

基金项目：吉林省创新创业人才基金(批准号：2023QN31)、吉林省自然科学基金(批准号：YDZJ202301ZYTS157；20240304097SF)和吉林省发展和改革委员会创新项目(批准号：2021C038-7).

现，若其中某一种群受到病虫害威胁或受到环境污染等因素的影响，则其他种群也会随之受到影响，将会给养殖者造成巨大的经济损失[14]. Pontryagin 极大值原理是提供最优控制策略的有效方法[15-19]，但其在毒素环境下共生种群的研究中却应用较少. 本文基于实际养殖情况，建立毒素影响下的共生种群模型，研究其生态平衡及系统的有限时间稳定性，并利用基于 Lyapunov 方法的 Pontryagin 极大值原理，为养殖者提出毒素清理条件下共生种群的最优捕获策略. 最后，通过实例仿真验证本文结论的实用性和有效性.

1 问题描述

本文以在有限养殖区域内混合养殖具有共生关系的种群为研究背景，对养殖环境中出现病虫害毒素的情形进行分析讨论，建立非线性模型，得到共生种群在病虫害条件下的捕获模型如下：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}&=x(t)[a_{11}-a_{12}x(t)+a_{13}y(t)]-\alpha E_1(t)x(t),\\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}&=y(t)[b_{11}-b_{12}y(t)-b_{13}z(t)]-\beta E_2(t)y(t),\\ \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}&=z(t)[c_{11}-c_{12}z(t)+c_{13}y(t)]-\gamma E_3(t)z(t),\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $x(t)$和 $y(t)$分别表示 t 时刻种群 1 和种群 2 的养殖数量，$z(t)$表示 t 时刻养殖环境中病虫害毒素的数量，a_{11},b_{11}分别表示养殖者对种群 1 和种群 2 的最初投放数量，c_{11}表示养殖环境中滋生病虫害的初始密度. 此外，由于多数共生种群的混合养殖都是在有限养殖区域内进行的，因此根据有限空间增长模型理论，设其自限系数为 a_{12},b_{12},c_{12}. 在养殖过程中，除养殖户供给种群 1 的营养外，种群 2 也会为种群 1 提供营养，从而使种群 1 数量增长，该系数用 a_{13}表示. 同时，病虫害也会在某一种群中汲取营养. 假设病虫害在种群 2 中获取营养，将由此增加的病虫害数量系数设为 c_{13}，种群 2 由此使自身数量减少的系数设为 b_{13}. 在 t 时刻，养殖者对种群 1 的捕获努力量用 $E_1(t)$表示，对种群 2 的捕获努力量用 $E_2(t)$表示，对病虫害的清除努力量用 $E_3(t)$表示. 设种群 1 的捕获系数为 α，种群 2 的捕获系数为 β，病虫害的消除系数为 γ. $\alpha E_1(t)$和 $\beta E_2(t)$ 分别为种群 1 和种群 2 的捕获率，$\gamma E_3(t)$为病虫害的清除率.

注 1 根据养殖过程中的实际情况，本文做如下假设：

(H) $a_{11}>\alpha E_1$，$b_{11}>\beta E_2$，$c_{11}>\gamma E_3$.

2 主要结果

下面讨论共生种群系统在病虫害条件下的稳定性及其最优捕获策略.

定理 1 若

$$c_{12}(b_{11}-\beta E_2)-b_{13}(c_{11}-\gamma E_3)>0\tag{2}$$

成立，则系统(1)有两个非灭绝平衡点：一个病虫害清除平衡点和一个正平衡点.

证明：计算得到系统(1)有如下 8 个平衡点：

$$P_1(0,0,0),\quad P_2\left(0,0,\frac{c_{11}-\gamma E_3}{c_{12}}\right),\quad P_3\left(\frac{a_{11}-\alpha E_1}{a_{12}},0,0\right),$$

$$P_4\left(\frac{a_{11}-\alpha E_1}{a_{12}},0,\frac{c_{11}-\gamma E_3}{c_{12}}\right),\quad P_5\left(0,\frac{b_{11}-\beta E_2}{b_{12}},0\right),$$

$$P_6\left(0,\frac{c_{12}(b_{11}-\beta E_2)-b_{13}(c_{11}-\gamma E_3)}{b_{12}c_{12}+b_{13}c_{13}},\frac{c_{13}(b_{11}-\beta E_2)+b_{12}(c_{11}-\gamma E_3)}{b_{12}c_{12}+b_{13}c_{13}}\right),$$

$$P_7\left(\frac{b_{12}(a_{11}-\alpha E_1)+a_{13}(b_{11}-\beta E_2)}{a_{12}b_{12}},\frac{b_{11}-\beta E_2}{b_{12}},0\right),\quad P_8(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}),$$

其中

$$\tilde{x}=\frac{(b_{12}c_{12}+b_{13}c_{13})(a_{11}-\alpha E_1)}{a_{12}b_{12}c_{12}+a_{12}b_{13}c_{13}}+\frac{a_{13}c_{12}(b_{11}-\beta E_2)-a_{13}b_{13}(c_{11}-\gamma E_3)}{a_{12}b_{12}c_{12}+a_{12}b_{13}c_{13}},$$

$$\tilde{y}=\frac{c_{12}(b_{11}-\beta E_2)-b_{13}(c_{11}-\gamma E_3)}{b_{12}c_{12}+b_{13}c_{13}},$$

$$\tilde{z}=\frac{c_{13}(b_{11}-\beta E_2)+b_{12}(c_{11}-\gamma E_3)}{b_{12}c_{12}+b_{13}c_{13}}.$$

显然，P_7 和 P_8 为系统(1)的非灭绝平衡点.

下面对非灭绝平衡点的稳定性进行分析. 平衡点 P_7 的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix}-a_{12}x & a_{13}x & 0\\ b_{13}y & -b_{12}y & -b_{14}y\\ 0 & 0 & -c_{12}z\end{pmatrix},$$

其中 $x=\frac{b_{12}(a_{11}-\alpha E_1)+a_{13}(b_{11}-\beta E_2)}{a_{12}b_{12}}$，$y=\frac{b_{11}-\beta E_2}{b_{12}}$，$z=0$. 显然平衡点 P_7 是不稳定的. 由假设(H)及条件(2)可知 P_8 为系统(1)的正平衡点. 证毕.

在考虑实际应用的情况下，若使生态经济系统有研究价值，就要保证该系统在有限时间内达到稳定状态，因此下面继续探讨平衡点 P_8 的有限时间稳定性.

定义 1[20]　如果存在一个原点的开邻域 $N\subseteq D$ 和沉降时间函数 T：$N\backslash\{0\}\to(0,\infty)$，使下列结论成立，则称原点是系统 $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=f(x)$ 的有限时间内稳定点.

1) 在有限时间内收敛：即对每个 $x\in N\backslash\{0\}$，ψ^x 是定义在 $t\in[0,T(x))$ 上的函数，对 $\psi^x(t)\in N\backslash\{0\}$ 有 $t\in[0,T(x))$，$\lim\limits_{t\to T(x)}\psi^x(t)=0$.

2) Lyapunov 稳定性：对每个开邻域 U_ε 存在一个 N 的包含 0 的开子集 U_δ，使得对每个 $x\in U_\delta\backslash\{0\}$ 及 $t\in[0,T(x))$，都有 $\psi^x\in U_\varepsilon$.

引理 1[21]　对于系统 $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=f(x)$，存在一个连续函数 V：$N\to\mathbb{R}$ 和一个正定函数 r：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$，使得下列结论成立：

1) $V(x(t),t)$是正定的；

2) $\frac{\mathrm{d}V(x(t),t)}{\mathrm{d}t}\leqslant -rV(x(t),t)$，$\forall(x(t),t)\in N\times I$；

3) 存在一个实数 $\varepsilon>0$，使得 $\int_0^\varepsilon\frac{\mathrm{d}p}{r(p)}<+\infty$，并使得 $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=f(x)$ 有限时间内是稳定的，沉降时间函数为

$$T_0(t_0,x_0)\leqslant(t^*-t_0)+\int_0^{V_x((t^*),t^*)}\frac{\mathrm{d}p}{r(p)},$$

其中 t_0 为初始时间，时间点 t^* 保证了 $V(x(t^*),t^*)\in[0,\varepsilon]$.

考虑系统(1)唯一的正平衡点 $P_8(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$，令 $\boldsymbol{Z}(t)=(z_1(t),z_2(t),z_3(t))^{\mathrm{T}}$，其中 $z_1(t)=x-\tilde{x}$，$z_2(t)=y-\tilde{y}$，$z_3(t)=z-\tilde{z}$. 于是，系统(1)可变换成如下等价形式：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z_1(t)}{\mathrm{d}t}&=(z_1(t)+\tilde{x})[a_{11}-a_{12}(z_1(t)+\tilde{x})+a_{13}(z_2(t)+\tilde{y})-\alpha E_1],\\ \frac{\mathrm{d}z_2(t)}{\mathrm{d}t}&=(z_2(t)+\tilde{y})[b_{11}-b_{12}(z_2(t)+\tilde{y})-b_{13}(z_3(t)+\tilde{z})-\beta E_2],\\ \frac{\mathrm{d}z_3(t)}{\mathrm{d}t}&=(z_3(t)+\tilde{z})[c_{11}-c_{12}(z_3(t)+\tilde{z})+c_{13}(z_2(t)+\tilde{y})-\gamma E_3].\end{aligned}\tag{3}$$

定理 2　系统(3)是有限时间稳定的，且稳定时间函数：

$$T_0(t_0,Z_0)\leqslant(t^*-t_0)+\int_0^{V(\boldsymbol{Z}(t^*),t^*)}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)}{r(\boldsymbol{Z}(t))},\tag{4}$$

其中对于实数 $\varepsilon>0$，在时刻 t^* 使得 $V(\boldsymbol{Z}(t^*),t^*)\in[0,\varepsilon]$成立.

证明：设函数 $V(\boldsymbol{Z}(t),t)=\frac{(z_3(t)+\tilde{z})^{2/3}}{c_{11}-\gamma E_3}$，当$(z_3(t)+\tilde{z})\in N\backslash\{0\}$时，可得 $V(\boldsymbol{Z}(t),t)>0$. 令

$$r(\boldsymbol{Z}(t))=\frac{2}{3}[k_1(z_3(t)+\tilde{z})-(c_{11}-\gamma E_3)]>0,$$

其中

$$c_{11}-\gamma E_3<k_2(z_3(t)+\tilde{z})<k_1(z_3(t)+\tilde{z})<c_{12}(z_3(t)+\tilde{z})-c_{13}(z_2(t)+\tilde{y}).$$

于是可得

$$-r(\boldsymbol{Z}(t))V(\boldsymbol{Z}(t),t)=\frac{2}{3}(z_3(t)+\tilde{z})^{2/3}-\frac{2}{3}\frac{k_1(z_3(t)+\tilde{z})}{c_{11}-\gamma E_3}(z_3(t)+\tilde{z})^{2/3}.$$

同时又有

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{Z}(t),t)}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{3}(z_3(t)+\tilde{z})^{2/3}-\frac{2}{3}\frac{c_{12}(z_3(t)+\tilde{z})-c_{13}(z_2(t)+\tilde{y})}{c_{11}-\gamma E_3}(z_3(t)+\tilde{z})^{2/3}.$$

因此可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{Z}(t),t)}{\mathrm{d}t}+r(\boldsymbol{Z}(t))V(\boldsymbol{Z}(t),t)=&\ \frac{2}{3}(z_3(t)+\tilde{z})^{2/3}-\frac{2}{3}\frac{c_{12}(z_3(t)+\tilde{z})-c_{13}(z_2(t)+\tilde{y})}{c_{11}-\gamma E_3}(z_3(t)+\tilde{z})^{2/3}-\\&\frac{2}{3}(z_3(t)+\tilde{z})^{2/3}+\frac{2}{3}\frac{k_1(z_3(t)+\tilde{z})}{c_{11}-\gamma E_3}(z_3(t)+\tilde{z})^{2/3}<0,\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{Z}(t),t)}{\mathrm{d}t}\leqslant-r(\boldsymbol{Z}(t))V(\boldsymbol{Z}(t),t).$$

又由于

$$V(\boldsymbol{Z}(t),t)=\frac{(z_3(t)+\tilde{z})^{2/3}}{c_{11}-\gamma E_3},\qquad(z_3(t)+\tilde{z})\in N,$$

因此对于实数 $\varepsilon>0$，存在某时刻 t^* 使得 $V(\boldsymbol{Z}(t^*),t^*)\in[0,\varepsilon]$成立. 记

$$k_1(z_3(t)+\tilde{z})=K_1,\qquad k_2(z_3(t)+\tilde{z})=K_2,$$

则有

$$\begin{aligned}\int_0^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)}{r(\boldsymbol{Z}(t))}=&\int_0^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)}{(2/3)[k_1(z_3(t)+\tilde{z})-(c_{11}-\gamma E_3)]}\leqslant\\&\int_0^{\varepsilon}\frac{3\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)}{2[k_1(z_3(t)+\tilde{z})-k_2(z_3(t)+\tilde{z})]}=\int_0^{\varepsilon}\frac{3\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)}{2(K_1-K_2)}<+\infty.\end{aligned}$$

综上由引理 1 可知，系统(3)在有限时间内保持稳定，且稳定时间函数为式(4). 证毕.

3 最优捕获策略

下面基于 Pontryagin 极大值原理，并考虑养殖环境存在毒素或病虫害的情况，给出共生种群的最优采收策略.

记 c_1,c_2 分别为每单位种群 1、种群 2 的捕获努力量 $E_1(t)$和 $E_2(t)$所需的投入成本，c_3 为每单位环境毒素或病虫害清除努力量 $E_3(t)$所需的投入成本. 设养殖过程中经营者可投入成本的最大值为 M，则根据养殖的实际情况成本变量应符合如下关系：

$$0\leqslant\int_{t_0}^{T}[c_1E_1(t)+c_2E_2(t)+c_3E_3(t)]\mathrm{d}t\leqslant M.\tag{5}$$

在养殖过程的 t 时刻，经济种群的总捕获量分为以下两部分：种群 1 的总捕获量 $\alpha E_1(t)x$ 和种群 2 的总捕获量 $\beta E_2(t)y$. 设市场上种群 1 和种群 2 的单位平均价格为 b. 根据经济学原理，供求关系对价格产生影响. 假设当捕获量较高时，供过于求导致的价格下降金额记为 a，则养殖经营者在时刻 t 的净收入为

$$R=b[\alpha E_1(t)x+\beta E_2(t)y)]-a\alpha^2E_1^2(t)x^2-c_1E_1(t)-c_2E_2(t)-c_3E_3(t),\qquad b>a>0.\tag{6}$$

于是，符合模型中考虑影响因素的最大净利润可表示为 $\int_{t_0}^{T}\mathrm{e}^{-\delta t}R\,\mathrm{d}t$，即最优采收策略的目标函数为

$$J=\int_{t_0}^{T}\mathrm{e}^{-\delta t}R\,\mathrm{d}t,\tag{7}$$

其中 δ 为贴现率.

注 2　本文假设种群 1 的单价比种群 2 的单价高很多，因此在目标函数中忽略由于种群 2 捕获量高低而产生的市场价格浮动.

下面考虑系统(5)的最优控制问题：

$$\max_{E_1,E_2,E_3}\int_{t_0}^{T}\mathrm{e}^{-\delta t}R\,\mathrm{d}t,$$

其中 $x(t),y(t),z(t)$ 有如下初值：$x(0)>0$，$y(0)>0$，$z(0)>0$. 记 $E_1(t)=E_1$，$E_2(t)=E_2$，$E_3(t)=E_3$ 符合条件. 因此，系统(1)的 Hamilton 函数为

$$\begin{aligned}H(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\Lambda},E_1,E_2,E_3,t)=&-\mathrm{e}^{\delta t}[b(\alpha E_1x+\beta E_2y)-a\alpha^2E_1^2x^2-c_1E_1-c_2E_2-c_3E_3]+\\&\lambda_1[x(a_{11}-a_{12}x+a_{13}y)-\alpha E_1x]+\lambda_2[y(b_{11}-b_{12}y-b_{13}z)-\beta E_2y]+\\&\lambda_3[z(c_{11}-c_{12}z+c_{13}y)-\gamma E_3z],\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{X}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\Lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$.

令现值伴随向量为 $\boldsymbol{q}_i(t)=\mathrm{e}^{\delta t}\lambda_i(t)$，并且记 $\boldsymbol{Q}=(q_1,q_2,q_3)$，于是，原始 Hamilton 函数可写成如下形式：

$$\begin{aligned}\widetilde{H}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Q},E_1,E_2,E_3)=\mathrm{e}^{\delta t}H(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\Lambda},E_1,E_2,E_3,t)=&\\[b(\alpha E_1x+\beta E_2y)-a\alpha^2E_1^2x^2-c_1E_1-c_2E_2-c_3E_3]+&\\q_1[x(a_{11}-a_{12}x+a_{13}y)-\alpha E_1x]+q_2[y(b_{11}-b_{12}y-b_{13}z)-\beta E_2y]+&\\q_3[z(c_{11}-c_{12}z+c_{13}y)-\gamma E_3z].&\end{aligned}$$

由于控制方程为

$$\frac{\partial\widetilde{H}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Q},E_1,E_2,E_3)}{\partial E_i}=0,\qquad i=1,2,3.\tag{8}$$

因此由式(8)可得如下解：

$$q_2=\frac{b\beta y-c_2}{\beta y},\tag{9}$$

$$q_3=-\frac{c_3}{\gamma z},\tag{10}$$

$$E_1=\frac{b\alpha x-c_1-q_1\alpha x}{2\mathrm{a}_1\alpha^2x^2}.\tag{11}$$

将式(10)代入 Hamilton 方程，可得 Hamilton 方程的新形式. 由 Pontryagin 极大值原理，经典 Hamilton 方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\widetilde{H}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Q},E_1,E_2)}{\partial\boldsymbol{Q}},\tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial\widetilde{H}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Q},E_1,E_2)}{\partial\boldsymbol{X}}+\delta\boldsymbol{Q}.\tag{13}$$

再由式(9)～(13)可得如下解：

$$y=\frac{-B+\sqrt{B^2+4AC}}{2A},\tag{14}$$

$$Z=\frac{c_{11}+c_{13}y}{c_{12}},\tag{15}$$

$$q_1=\frac{c_1(c_1/(\alpha x)-b)}{2a\alpha x^2(a_{11}-2a_{12}x+a_{13}y-\delta)-c_1},\tag{16}$$

$$E_2=\frac{c_{12}(b_{11}-b_{12}y)-b_{13}(c_{11}+c_{13}y)}{\beta c_{12}},\tag{17}$$

其中

$$A=\beta\gamma bb_{13}c_{13},$$

$$B=\gamma b_{13}(\beta bc_{11}-c_2c_{13})+\beta\gamma c_3c_{12}c_{13},$$

$$C=\gamma c_2 b_{13} c_{11}+\beta c_3 c_{12}(1-\gamma c_{11}).$$

为求出 x 的解，把式(9)～(17)代入方程$\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}=0$，可得如下关于 x 的方程：

$$M_0 x^3+M_1 x^2+M_2 x+M_3=0, \tag{18}$$

其中

$$M_0=4\alpha^2\beta a a_{12}K-2\alpha^2 a a_{13}b_{13}(\beta b y-c_2),$$
$$M_1=-2\alpha^2\beta a K(a_{11}+a_{13}y-\delta),$$
$$M_2=-\alpha\beta b c_1 a_{13},$$
$$M_3=\alpha\beta c_1 K+\beta c_1 a_{13},$$
$$K=-b(b_{11}-b_{12}y)+\frac{b b_{13}(c_{11}+c_{13}y)}{c_{12}}+\left(b-\frac{c_2}{\beta y}\right)(b_{12}y-\delta)+\frac{c_3 c_{13}}{\gamma}.$$

经讨论可知方程(18)必有正实根 x.

把 x,y,z 的实值及 E_1 和 E_2 代入系统(1)，可得如下取得极值的最优捕获策略：

$$E_1=\frac{b\alpha x-c_1-q_1\alpha x}{2a\alpha^2 x^2},$$
$$E_2=\frac{c_{12}(b_{11}-b_{12}y)-b_{13}(c_{11}+c_{13}y)}{\beta c_{12}},$$
$$E_3=\frac{c_{13}[(b-q_1)\alpha x-c_1]-2a\alpha x^2 c_{13}(a_{11}-a_{12}x+a_{13}y)}{2\alpha\gamma a a_{13}x^2}.$$

本文讨论的算法针对共生种群之一受外界因素(如病虫害、毒素、污染、外来入侵物种等)影响的情况，给出了在清除外界因素影响的同时实现最优采收的策略. 为混合养殖经济作物抵御外部因素干扰、实现最优采收提供了有效保障.

4 仿真实例

下面通过一个具体实例说明本文算法的有效性.

例 1 在我国，多数养殖者会对龙虾和莲藕进行混合养殖[22]，莲藕的农家肥释放出的微生物可供龙虾食用，龙虾的排泄物也能为莲藕提供底肥，这种共生关系可有效增加产量，提高经济效益. 可一旦出现蚜虫病虫害，就会危害莲藕的正常生长，进而龙虾的产量也会受到消极影响. 此时即可应用本文提出的毒素条件下共生种群的最优捕获策略. 设养殖者对龙虾和莲藕的初始投放数量分别为 0.3，0.4，蚜虫病虫害最初出现的数量为 0.3. 由于 3 个种群内部争夺共同资源而产生的制约系数分别为 0.01，0.001 和 0.05，龙虾因食用莲藕释放的微生物而增长的系数为 0.05. 蚜虫会刺吸莲藕汁液，这也是导致蚜虫数量增长的因素之一，其增长系数为 0.01. 莲藕受到病虫害，产量会随之减少，该系数为 0.03. 在养殖过程中，养殖者对龙虾和莲藕的捕获努力量系数分别为 0.4，10，对蚜虫的清除努力量系数为 0.1. 根据市场规律，可设现值折现率 $\delta=0.01$. 龙虾的单位捕获人工花费为人民币 3 元，莲藕的单位收割花费为人民币 5 元，蚜虫病虫害的单位清除花费为人民币 2 元. 每一单位龙虾和莲藕均价 b 为人民币 100 元. 鉴于供求关系对价格的影响，设龙虾产量增加，供过于求时，单位售价降低值 a 为人民币 5 元.

根据例 1，此时模型可表示为如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(0.3-0.01x+0.05y-0.4E_1),$$
$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=y(0.4-0.001y-0.03z-10E_2),$$
$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}=z(0.3-0.05z+0.01y-0.1E_3).$$

对应上述参数，可得相应的龙虾捕获努力量 E_1、莲藕捕获努力量 E_2 以及蚜虫的清除努力量 E_3 分别为

$$E_1=\frac{29.696x-20}{16x^2},$$

$$E_2=\frac{11-0.35y}{50},$$

$$E_3=\frac{4\ 113.04x-200-4x^2(30-x+5y)}{200x^2}.$$

根据上述捕获努力量，可得系统的最大利润如下：

$$J_{\max\limits_{E_1,E_2,E_3}}=\int_{t_0}^{T_0}\mathrm{e}^{-0.01t}[100(0.4E_1x+10E_2y)-0.8E_1^2x^2-2E_1-5E_2-3E_3]\mathrm{d}t.$$

通过计算可得 $E_1=2.227\ 6$，$E_2=0.020\ 9$，$E_3=1.257\ 9$，最大利润为 $J=24\ 688$ 元. 根据上述参数，可得最大利润仿真图像如图 1 所示.

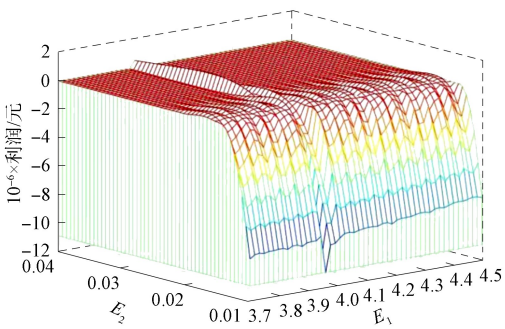


图 1　最大利润仿真图像

Fig. 1　Simulation image of maximum profit

在实际养殖过程中，由于蚜虫的过度生长，导致龙虾和莲藕的产量降低. 由图 1 可知，采用本文的最优收获策略，最大利润为 24 688 元. 该最大利润不低于没有蚜虫的利润.

综上所述，本文建立了共生种群模型，并考虑了其在毒素或病虫害环境下的动力性态，给出了模型种群系统的有限时间稳定条件，并利用基于 Lyapunov 方法的 Pontryagin 极大值原理，得到共生种群系统在清除毒素或病虫害条件下的最优采收方法，从而得到一般采收的最优算法. 最后，用实例验证了本文方法的可行性和有效性，仿真结果表明，一般算法可以在限定养殖周期内实现最优效益.

参　考　文　献

[1] KAWAGUCHI M. The Evolution of Symbiotic Systems [J]. Cellular and Molecular Life Sciences, 2011, 68(8): 1283-1284.

[2] 芦俊丽，王丽珍，赵家松，等. 从动态空间数据库中挖掘共生关系和竞争关系 [J]. 南京大学学报(自然科学)，2018，54(2)：436-451. (LU J L, WANG L Z, ZHAO J S, et al. Mining the Symbiotic and Competitive Relationships from Dynamic Spatial Databases [J]. Journal of Nanjing University (Natural Science), 2018, 54(2): 436-451.)

[3] 曹桂娟. 阐述绿色生态养殖技术在淡水养殖中的应用 [J]. 渔业致富指南，2021，1(5)：11-14. (CAO G J. An Exposition of the Application of Green Ecological Aquaculture Technology in Freshwater Aquaculture [J]. Fishery Guide to be Rich, 2021, 1(5): 11-14.)

[4] 李朝晖，施丽丽，王喆，等. 黄花水龙浮巢净化富营养化水体 [J]. 江苏大学学报(自然科学版)，2006，27(1)：1-5. (LI Z H, SHI L L, WANG Z, et al. Quantity-to-Quality Depurative Effects of Float Grass Jussiaea Stipu Lacea Ohwi in Treating Nutrition-Enriched Fry Culturing Water [J]. Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition), 2006, 27(1): 1-5.)

[5] 冯庆红，陈荣军，冯艳青，等. 三种群捕食系统动力行为与最优捕获策略 [J]. 扬州大学学报(自然科学版)，2020，23(4)：4-7. (FENG Q H, CHEN R J, FENG Y Q, et al. Dynamical Behavior and Optimal Capture Strategy of Three-Species Predator-Prey System [J]. Journal of Yangzhou University (Natural Science Edition), 2020, 23(4): 4-7.)

[6] 王宁，吕月明. 周期演化域上三种群互惠模型的动力学 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2023，61(2)：235-245. (WANG N, LÜ Y M. Dynamics of Three-Species Cooperating Model on Periodically Evolving Domain [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2023, 61(2): 235-245.)

[7] RAZA Z, SALEEM N, ABBAS M. Optimal Coincidence Points of Proximal Quasi-contraction Mappings in Non-archimedean Fuzzy Metric Spaces [J]. Journal of Nonlinear Sciences and Applications, 2016, 9(6):

3787-3801.

[8] 雷芳琨. 基于税收的渔业捕捞模型的最优问题的研究 [D]. 沈阳：东北大学，2014.（LEI F K. An Optimal Problem Research of the Fishing Model Based on Taxation [D]. Shenyang：Northeastern University，2014.）

[9] WANG W F，WANG B B，YANG H K. The Maximum Principle for a Stochastic Optimal Control System in the Absence of Linear Structure [J]. Mathematica Applicata，2017，30(2)：445-456.

[10] 郑云，夏米西努尔·阿布都热合曼. 不完全免疫的多阶段绵羊布鲁氏菌病模型的稳定性分析与最优控制 [J]. 应用数学，2023，36(3)：800-807.（ZHENG Y，XAMIXINUE A. Stability Analysis and Optimal Control of a Multistage Bruceellosis Model in Sheep with Incomplete Immunity [J]. Mathematica Applicata，2023，36(3)：800-807.）

[11] 马玉莲，何泽荣. 生态平衡条件下尺度结构模型的最优捕获 [J]. 杭州电子科技大学学报(自然科学版)，2015，35(4)：97-101.（MA Y L，HE Z R. Optimal Harvesting of a Size-Structurd Population Model at Equilibrium [J]. Journal of Hangzhou Dianzi University (Natural Sciences)，2015，35(4)：97-101.）

[12] 晋春，毛罕平，马国鑫，等. 基于改进遗传算法的温室环境动态优化控制 [J]. 江苏大学学报(自然科学版)，2022，43(2)：169-177.（JIN C，MAO H P，MA G X，et al. Dynamic Optimal Control of Greenhouse Environment Based on Improved Genetic Algorithm [J]. Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition)，2022，43(2)：169-177.）

[13] 李医民，周燕. 同时捕获且具有功能性反应的捕食与被捕食系统的定性分析 [J]. 江苏大学学报(自然科学版)，2007，28(5)：453-456.（LI Y M，ZHOU Y. Qualitative Analysis of a Kind of Predator-Prey System Exploited with the Beddington-DeAngelis Functional Response [J]. Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition)，2007，28(5)：453-456.）

[14] 陆继龙，刘奇志，王春珍，等. 二道松花江沉积物重金属特征及其潜在生态风险 [J]. 吉林大学学报(地球科学版)，2018，48(2)：566-573.（LU J L，LIU Q Z，WANG C Z，et al. Characteristics and Potential Ecological Risk of Heavy Metals of Sediments in Erdaosonghua River [J]. Journal of Jilin University (Earth Science Edition)，2018，48(2)：566-573.）

[15] 王燕飞，侯强，胡红萍. 基于检测行为的动物布病模型的动力学分析 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2023，61(6)：1251-1260.（WANG Y F，HOU Q，HU H P. Dynamic Analysis of Animal Brucellosis Model Based on Detection Behavior [J]. Journal of Jilin University (Science Edition)，2023，61(6)：1251-1260.）

[16] 杨雪雁. 延迟环境下非线性系统的有限时间稳定性与控制设计 [D]. 济南：山东师范大学，2023.（YANG X Y. Synchronization Control and Analysis of Complex Neworks Based on Delayed Impulses [D]. Jinan：Shandong Normal University，2023.）

[17] ZHANG J X，WEI Q，LIU G W，et al. A Supplier Switching Model with the Competitive Reactions and Economies of Scale Effects [J]. IEEE Transactions on Systems，Man，and Cybernetics：Systems，2017，47(11)：2831-2843.

[18] ZHANG Q X. Maximum Principle for Mean-Field Optimal Control Problems of Delayed Stochastic Systems Involving Continuous and Impulse Controls [C]//2022 41st Chinese Control Conference (CCC). Piscataway，NJ：IEEE，2022：1672-1678.

[19] WANG Y Y，SUN B. Pontryagin's Maximum Principle for Optimal Control of Vibrations of Two Nonlinear Gao Beams [C]//2020 IEEE 16th International Conference on Control & Automation (ICCA). Piscataway，NJ：IEEE，2020：913-918.

[20] BHAT S P，BERNSTEIN D S. Finite-Time Stability of Continuous Autonomous Systems [J]. Society for Industrial and Applied Mathematics，2000，38(3)：751-766.

[21] 陈国培，杨莹，李俊民. 非线性系统有限时间稳定的一个新的充分条件 [J]. 控制与决策，2011，26(6)：837-840.（CHEN G P，YANG Y，LI J M. New Sufficient Condition of Finite Time Stability for Nonlinear Systems [J]. Control and Decision，2011，26(6)：837-840.）

[22] 孙成. 莲田套养小龙虾技术试验 [J]. 科学养鱼，2020，1(8)：34-36.（SUN C. Experimental Study on Lobster Breeding in Lotus Field [J]. Scientific Fish Farming，2020，1(8)：34-36.）

（责任编辑：韩 啸）